ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ - ΧΕ2007

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι - Ημερομηνία Παράδοσης 23/10/2007

Άσκηση 1 Από το βιβλίο του S.R.S. Varadhan "Probability Theory", την 5.6

Άσκηση 2 Θεωρήστε μια διήθηση $\mathcal{F}_n$ και τους $\mathcal{F}_n$-χρόνους στάσης τ, σ. Δείξτε ότι τα σύνολα $\{\omega : \sigma(\omega) = \tau(\omega)\}$, $\{\omega : \sigma(\omega) \leq \tau(\omega)\}$ ανήκουν στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$. Δείξτε ακόμη ότι $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$

Άσκηση 3 Από το βιβλίο του S.R.S. Varadhan "Probability Theory", την 5.10

Άσκηση 4 Θεωρούμε ένα συμμετρικό τυχαίο περίπατο S_n στο $\mathbb{Z}$ που ξεκινά από το μηδέν και ορίζουμε τ_N το χρόνο εξόδου από το σύνολο $\{-N, \ldots, N\}$. Αφού δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανέλιξη

$$X_n = \frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh \lambda)^n}$$

είναι martingale ως προς την φυσική διήθηση υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace του τ_N: $\mathbb{E}\big[e^{-u\tau_N}\big]$. Υπολογίστε στη συνέχεια τα $\mathbb{E}\big[\tau_N\big]$ και $\mathbb{E}\big[\tau_N^2\big]$ παραγωγίζοντας το μετασχηματισμό Laplace στο $u = 0$.

Άσκηση 5 Θεωρήστε πάλι ένα τυχαίο περίπατο στο $\mathbb{Z}$ που ξεκινά από το x, αυτή τη φορά όμως η πιθανότητα να κινηθούμε δεξιά σε κάθε βήμα είναι $p < 1/2$. Βρείτε μια σταθερά $\vartheta \neq 1$ ώστε η ϑ^{S_n} να είναι martingale. Στη συνέχεια, αν $a < x < b$ υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[\tau_a < \tau_b\big]$. Ποιό είναι το όριο αυτής της πιθανότητας καθώς $a \to -\infty$;

Άσκηση 6 Θεωρήστε το χώρο πιθανότητας $\Omega = [0, 1)$ εφοδιασμένο με τη σ-άλγεβρα των συνόλων Borel και το μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε τη διαμέριση P_n του Ω

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}).$$

α. Ποιά είναι η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n$ που παράγουν τα σύνολα της P_n;
β. Δείξτε ότι η $\{\mathcal{F}_n\}$ είναι μια διήθηση.
Θεωρούμε τώρα μια μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $\int |X| \, dm < \alpha < +\infty$ και ορίζουμε

$$M_n = \mathbb{E}\big[\, |X| \,\big|\, \mathcal{F}_n\big].$$

γ. Υπολογίστε τις M_1, M_2, M_3. Ποιά θα είναι η M_n;
δ. Επιβεβαιώστε ότι η M_n είναι $\mathcal{F}_n$-martingale.
Θεωρούμε τώρα τον χρόνο στάσης $\tau(x) = \inf\{n : M_n \geq \alpha\}$ και τα σύνολα

$$F = \{x \in \Omega : \tau(x) = \infty\}, \qquad Q = \{x \in \Omega : \tau(x) < +\infty\}.$$

Προφανώς, $\Omega = F \cup Q$ και $F \cap Q = \phi$.
ε. Δείξτε ότι το Q είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων διαστημάτων Q_j και ότι σε καθένα από αυτά ισχύει:

$$\alpha < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |X| \, dm \leq 2\alpha.$$

στ. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Doob δείξτε ότι

$$m(Q) \leq \frac{1}{\alpha} \int |X| \, dm.$$

ζ. Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}\big[\ X \mid \mathcal{F}_\tau\big](x) = \begin{cases} X & \text{αν } x \in F \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} X\ dm & \text{αν } x \in Q_j. \end{cases}$$

η. Συμπεράνετε ότι γράφοντας τώρα $X = \mathbb{E}\big[\ X \mid \mathcal{F}_\tau\big] + \big(X - \mathbb{E}\big[\ X \mid \mathcal{F}_\tau\big]\big)$ έχουμε χωρίσει την X σε ένα κομμάτι που είναι φραγμένο, και σε ένα άλλο κομμάτι που μπορεί μεν να πάρει μεγάλες τιμές, είναι όμως μη μηδενικό μόνο στο $Q = \bigcup_j Q_j$ (το μέτρο του οποίου μπορούμε να κάνουμε όσο μικρό θέλουμε διαλέγοντας το α κατάλληλα μεγάλο) και που σε καθένα διάστημα Q_j η μέση του τιμή είναι μηδέν.
Αυτή είναι η περίφημη διάσπαση Calderon-Zygmund που χρησιμοποιείται στην Αρμονική Ανάλυση για την ανάλυση ιδιαζόντων ολοκληρωμάτων.