

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ

Άσκηση 1 Δείξτε επαγωγικά ότι στο δοχείο του Polya με κ κόκκινες και μ μαύρες σφαίρες αρχικά, η πιθανότητα να επιλέξουμε στο n -οστό βήμα μια κόκκινη σφαίρα είναι $\frac{\kappa}{\kappa+\mu}$.

Άσκηση 2 Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, δείξτε ότι και τα A και B^c , A^c και B , A^c και B^c είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 3 Μια αεροπορική εταιρεία έχει παρατηρήσει ότι 5% όσων έχουν αγοράσει εισιτήριο δεν εμφανίζεται για να ταξιδέψει. Τη σημερινή πτήση εκτελεί ένα αεροπλάνο με 200 θέσεις και η εταιρεία έχει πουλήσει 203 εισιτήρια. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορέσει να εξυπηρετήσει ένα επιβάτη με εισιτήριο; Υποθέστε ότι αν A_i είναι το ενδεχόμενο να εμφανιστεί ο επιβάτης i , τα ενδεχόμενα A_i είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 4 Μια μαϊμού πληκτρολογεί τυχαία χαρακτήρες σε ένα υπολογιστή. Δείξτε ότι (αν συνεχίσει να πληκτρολογεί για πάντα) με πιθανότητα 1 κάποια στιγμή θα έχει γράψει το σετ λύσεων για το παρόν φυλλάδιο ασκήσεων χωρίς κανένα τυπογραφικό λάθος.

Άσκηση 5 Οι παίχτες A και B ρίχνουν ένα ζάρι διαδοχικά μέχρι κάποιος να φέρει 6. Ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσει το παιχνίδι μετά από n ζαριές; Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο A ; Δεδομένου ότι ο B βγήκε νικητής ποια είναι η πιθανότητα να έφερε 6 στην πρώτη του προσπάθεια;

Άσκηση 6 Δυο παίχτες παίζουν μια ένα παιχνίδι πόκερ. Σε κάθε παρτίδα κάθε παίκτης στοιχηματίζει 1 και ο νικητής της παρτίδας παίρνει το στοιχείμα για την παρτίδα. Η πιθανότητα νίκης σε κάθε παρτίδα είναι $\frac{1}{2}$ για κάθε παίκτη. Ο παίκτης A ξεκινά με αρχικό ποσό x και ο παίκτης B με αρχικό ποσό y . Το παιχνίδι τελειώνει όταν ένας παίκτης συγκεντρώσει όλα τα χρήματα. Υπολογίστε την πιθανότητα νίκης κάθε παίκτη.

Άσκηση 7 Λύστε το προηγούμενο πρόβλημα αν η πιθανότητα νίκης του A σε κάθε παρτίδα είναι $p > \frac{1}{2}$.

Άσκηση 8 Στην ταινία “Τρέξε Λόλα τρέξε” η Λόλα έχει 1.000 μάρκα και χρειάζεται να συγκεντρώσει 1.296.000 μάρκα για να σώσει τον φίλο της Ντόνι από τα χέρια της μαφίας. Η Λόλα μπαίνει σ’ ένα καζίνο και προσπαθεί να συγκεντρώσει το ποσό στη ρουλέτα. Μπορεί είτε να ποντάρει σε αριθμό με πιθανότητα επιτυχίας $\frac{1}{36}$ οπότε και παίρνει 36 φορές το ποντάρισμά της αν νικήσει, είτε σε χρώμα με

πιθανότητα επιτυχίας $\frac{18}{36}$ οπότε και παίρνει 2 φορές το ποντάρισμά της αν νικήσει. Η Λόλα θέλει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο στρατηγικές. Είτε να ποντάρει συνέχεια 1 μάρκο σε χρώμα μέχρι να συγκεντρώσει το ποσό που χρειάζεται ή να χάσει, είτε να ποντάρει όλο το ποσό της σε έναν αριθμό και αν κερδίσει να ποντάρει πάλι τα πάντα στον ίδιο αριθμό. Ποια στρατηγική έχει μεγαλύτερη πιθανότητα επιτυχίας;

Άσκηση 9 Στην πραγματικότητα η πιθανότητα επιτυχίας αν ποντάρει κανείς αριθμό στη ρουλέτα είναι $\frac{1}{38}$ ενώ αν ποντάρει σε χρώμα είναι $\frac{18}{38}$. Τι θα συμβουλευάτε τώρα τη Λόλα;

Άσκηση 10 Η έκφραση ενός κληρονομικού νοσήματος καθορίζεται γενετικά ως εξής. Κάθε άνθρωπος έχει ένα ζεύγος αλληλόμορφων γονιδίων, καθένα από τα οποία μπορεί να είναι είτε A είτε a . Έτσι, ο γονότυπος όπως λέμε κάθε ανθρώπου μπορεί να είναι είτε AA , είτε Aa , είτε aa . Το νόσημα εκφράζεται μόνο αν κάποιος έχει το γονότυπο aa . Κάθε παιδί κληρονομεί από ένα αλληλόμορφο γονίδιο από κάθε γονιό. Τα γονίδια κληρονομούνται ανεξάρτητα από τους δύο γονείς και κάθε γονίδιο του γονέα έχει την ίδια πιθανότητα να κληροδοτηθεί.

α) Βρείτε την πιθανότητα κάθε γονότυπου για ένα παιδί με γονείς που έχουν και οι δύο γονότυπο Aa .

β) Βρείτε την πιθανότητα κάθε γονότυπου για ένα παιδί με γονείς που έχουν ο ένας γονότυπο AA και ο άλλος γονότυπο Aa .

γ) Αν τα παιδιά των ερωτημάτων (α) και (β) αποκτήσουν μεταξύ τους ένα παιδί ποια είναι η πιθανότητα κάθε γονότυπου σε αυτό;

δ) Αν κάθε γονιός έχει γονότυπο AA , Aa ή aa με πιθανότητα 0,81, 0,18 και 0,01 αντίστοιχα, υπολογίστε την πιθανότητα το δεύτερο παιδί τους να εκφράσει το νόσημα δεδομένου ότι το πρώτο παιδί τους έχει εκφράσει το νόσημα.