ΜΑΘ. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΙΙ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V

Οι παραπομπές αναφέρονται σε ασκήσεις από κεφάλαιο 6 στο βιβλίο του Simon Haykin.

Άσκηση 1 (σελ. 429- πρόβλημα 6.2)
Λύση: Από τη γραμμικότητα του συστήματος η απόκριση στο σήμα εισόδου $x(t)$ ισούται με το άθροισμα της απόκρισης $y_c(t)$ στο σήμα $A_c\cos(2\pi f_c t)$ και της απόκρισης $n(t)$ στο λευκό θόρυβο Gauss. Η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος είναι $H(f) = (1+2\pi i f RC)^{-1}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\hat{y}_c(f) &= \frac{A_c}{2}\frac{\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)}{1+2\pi i f RC}\\ &= \frac{A_c}{2(1+2\pi i f_c RC)}\delta(f-f_c) + \frac{A_c}{2(1-2\pi i f_c RC)}\delta(f+f_c).\end{aligned}$$

Στην παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $g(f)\delta(f-f_0) = g(f_0)\delta(f-f_0)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}y_c(t) &= \frac{A_c}{2}\Big(\frac{e^{2\pi i f_c t}}{1+2\pi i f_c RC} + \frac{e^{-2\pi i f_c t}}{1-2\pi i f_c RC}\Big)\\ &= \frac{A_c}{1+4\pi^2 f_c^2 (RC)^2}\big(\cos(2\pi f_c t) + 2\pi RC f_c \sin(2\pi f_c t)\big).\end{aligned}$$

Αν ορίσουμε τώρα ως θ_0 εκείνη τη γωνία στο $[0, 2\pi]$ για την οποία

$$\cos(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 f_c^2 (RC)^2}} \qquad \sin(\theta_0) = \frac{2\pi f_c RC}{\sqrt{1+4\pi^2 f_c^2 (RC)^2}}$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\begin{aligned}y_c(t) &= \frac{A_c}{\sqrt{1+4\pi^2 f_c^2 (RC)^2}}\big(\cos(\theta_0)\cos(2\pi f_c t) + \sin(\theta_0)\sin(2\pi f_c t)\big)\\ &= \frac{A_c}{\sqrt{1+4\pi^2 f_c^2 (RC)^2}}\cos(2\pi f_c t - \theta_0).\end{aligned}$$

Από εδώ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη μέση ισχύ της εξόδου $y_c(t)$.

$$P_c = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y_c^2(t)\ dt = \frac{A_c^2}{2(1+4\pi^2 f_c^2 (RC)^2)}.$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την ισχύ της απόκρισης $n(t)$ στο λευκό θόρυβο Gauss. Η πυκνότητα φάσματος ισχύος της n δίνεται από την

$$S_n(f) = |H(f)|^2 S_w(f) = \frac{N_0}{2}\frac{1}{1+4\pi^2 f^2 (RC)^2}.$$

Επομένως η ισχύς της n είναι

$$P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\ df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2}.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται είτε με χρήση του θεωρήματος ολοκληρωτικών υπολοίπων, είτε παρατηρώντας ότι η ποσότητα που ολοκληρώνουμε είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $R(t) = \frac{1}{2RC} e^{-\frac{|t|}{RC}}$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με $R(0)$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$P_n = \frac{N_0}{4RC},$$

και άρα ο σηματοθορυβικός λόγος στην έξοδο του κυκλώματος είναι

$$(SNR)_o = \frac{P_c}{P_n} = \frac{2A_c^2 RC}{N_0(1 + 4\pi^2 f_c^2 (RC)^2)}.$$

Χρησιμοποιώντας τη στοιχειώδη ανισότητα $2ab \leq a^2 + b^2$ μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι ανεξάρτητα από την επιλογή της αντίστασης R και της χωρητικότητας του πυκνωτή C έχουμε

$$(SNR)_o \leq \frac{A_c^2}{2\pi f_c N_0}$$

με την ισότητα να ισχύει στην παραπάνω όταν $2\pi f_c RC = 1$.

Άσκηση 2 (σελ. 430- πρόβλημα 6.6)
Στη διαμόρφωση DSBSC το διαμορφωμένο σήμα έχει τη μορφή

$$x(t) = Am(t)\cos(2\pi f_c t),$$

όπου m είναι το σήμα πληροφορίας που θέλουμε να μεταδώσουμε. Η αποδιαμόρφωση επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας το εισερχόμενο σήμα με ένα συνημιτονικό όρο στη φέρουσα συχνότητα και περνώντας το αποτέλεσμα από ένα βαθυπερατό φίλτρο. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι ο συνημιτονικός όρος στον δέκτη είναι δύσκολο να είναι συμφασικός με το εισερχόμενο σήμα- είναι πιο ρεαλιστικό να θεωρήσουμε ότι παρουσιάζει μια τυχαία διαφορά φάσης $\theta(t)$ για την οποία υποθέτουμε ότι έχει κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ_Θ^2.

Έτσι στην έξοδο του πολλαπλασιαστή θα έχουμε το σήμα

$$\begin{aligned} x_m(t) &= Am(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \theta(t)) \\ &= \frac{Am(t)}{2}\big(\cos(4\pi f_c t + \theta(t)) + \cos(\theta(t))\big). \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι η $\theta(t)$ είναι τον περισσότερο χρόνο μικρή συγκρινόμενη με τη μονάδα, η έξοδος από το βαθυπερατό φίλτρο θα είναι περίπου ίση με

$$y(t) = \frac{Am(t)}{2}\cos(\theta(t)).$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα που οφείλεται στη θ:

$$R = \mathbb{E}\Big[\frac{A^2m^2(t)}{4}\big(1-\cos(\theta(t))\big)^2\Big] = \frac{A^2m^2(t)}{4}\mathbb{E}\big[\sin^4\Big(\frac{\theta(t)}{2}\Big)\big].$$

Χρησιμοποιώντας της ταυτότητα

$$\sin(w) = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

και ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας κανονικής τ.μ. με μέση τιμή 0 και διασπορά σ είναι $\phi(t) = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$ έχουμε ότι

$$R = \frac{A^2m^2(t)}{32}\big(e^{-2\sigma_\theta^2} - 4e^{-\sigma_\theta^2/2} + 3\big) = \frac{3A^2m^2(t)}{64}\sigma_\theta^4 + o(\sigma_\theta^4).$$

Άσκηση 3 (σελ. 433- πρόβλημα 6.13)
Αγνοήστε το ερώτημα (α).

$$\begin{aligned} x(t) &= A_c\cos(2\pi f_c t) + A_i\cos(2\pi f_i t + \theta_i) \\ &= Re\big[e^{i2\pi f_c t}\big(A_c + A_i e^{i2\pi(f_i-f_c)t+\theta_i}\big)\big] \\ &= Re\big[e^{i2\pi f_c t} r(t) e^{i\psi(t)}\big)\big] \\ &= r(t)\cos(2\pi f_c t + \psi(t)), \end{aligned}$$

όπου $r(t), \psi(t)$ είναι αντίστοιχα το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $A_c + A_i e^{i2\pi(f_i-f_c)t+\theta_i}$. Αν η συχνότητα f_i είναι κοντά στη συχνότητα f_c τότε η $\psi(t)$ είναι μια αργά μεταβαλλόμενη γωνία. Αυτό μπορείτε να το δείτε υπολογίζοντας την παράγωγο της $\psi(t)$ και δείχνοντας ότι φράσσεται από $2\pi\frac{A_i}{A_c-A_i}|f_i - f_c|$. Η έξοδος του φωρατή περιβάλλουσας θα είναι επομένως η $r(t)$ η οποία μπορεί να υπολογιστεί από το νόμο των συνημιτόνων:

$$r(t) = \sqrt{A_c^2 + A_i^2 + 2A_cA_i\cos(2\pi(f_i-f_c)t+\theta_i)}.$$

Υποθέτοντας ότι $A_i << A_c$ μπορούμε να γράψουμε την $r(t)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} r(t) &= A_c\sqrt{1 + \Big(\frac{A_i}{A_c}\Big)^2 + 2\frac{A_i}{A_c}\cos(2\pi(f_i-f_c)t+\theta_i)} \\ &= A_c\big(1 + \frac{A_i}{A_c}\cos(2\pi(f_i-f_c)t+\theta_i) + o(\frac{A_i}{A_c})\big) \end{aligned}$$

Άσκηση 4 (σελ. 433- πρόβλημα 6.14)
Χρησιμοποιούμε για το ζωνοπεριορισμένο θόρυβο την αναπαράσταση

$$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

όπου n_c, n_s η συμφασική και ορθογώνια συνιστώσα του θορύβου. Όπως έχουμε δει όταν ο αρχικός θόρυβος είναι λευκός η πυκνότητα φάσματος ισχύος για αυτούς τους βαθυπερατούς θορύβους είναι

$$S_{n_c} = S_{n_s} = \begin{cases} N_0 & \text{όταν } |f| < W \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

και οι n_c, n_s είναι ανεξάρτητες ανελίξεις Gauss. Το συνολικό σήμα στο φωρατή περιβάλλουσας θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= (A + n_c(t))\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t) \\ &= r(t)\cos(2\pi f_c t + \theta(t)), \end{aligned}$$

όπου $r(t) = \sqrt{(A + n_c(t))^2 + n_s^2(t)} = A\left(1 + \frac{n_c(t)}{A} + \text{ όροι μικρότερης τάξης}\right)$.
Ο λόγος σήματος προς θόρυβο (μέση ισχύς του σταθερού σήματος A προς μέση ισχύς του θορύβου) θε είναι

$$(SNR)_0 = \frac{A^2}{P_{n_c}} = \frac{A^2}{2N_0 W}.$$

Άσκηση 5 Αν Z είναι μια στάσιμη ανέλιξη Gauss με μέση τιμή μηδέν και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_Z(\tau)$ και πυκνότητα φάσματος ισχύος $S_Z(f)$, υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και την πυκνότητα φάσματος ισχύος της Z^2.

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι αν η από κοινού κατανομή των X, Y είναι κανονική τότε

$$\mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] + 2\big(\mathbb{E}[XY]\big)^2.$$

Αυτό μπορεί να το δει κανείς με πολλούς τρόπους. Μπορείτε π.χ. να παραγωγίσετε δυο φορές ως προς u και δυο φορές ως προς v τη χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(u,v) = \mathbb{E}[\exp(iuX + ivY)] = \exp(-\frac{u^2\mathbb{E}[X^2]+v^2\mathbb{E}[Y^2]+2uv\mathbb{E}[XY]}{2})$, και να θέσετε στο αποτέλεσμα $u = v = 0$. Εναλλακτικά, μπορείτε να δείτε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\tilde{X} = X - \frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]}Y$ και Y είναι ασυσχέτιστες και άρα ανεξάρτητες αφού είναι από κοινού κανονικές. Μπορείτε τώρα να υπολογίσετε την $\mathbb{E}[X^2Y^2]$ γράφοντας την X ως $\tilde{X} + \frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]}Y$ και χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των $\tilde{X}$ και Y. Σε κάθε περίπτωση, αφού οι $Z(t), Z(t+\tau)$ ακολουθούν διδιάστατη κανονική κατανομή θα έχουμε

$$\begin{aligned} R_{Z^2}(\tau) &= \mathbb{E}[Z^2(t)Z^2(t+\tau)] = \mathbb{E}[Z^2(t)]\mathbb{E}[Z^2(t+\tau)] + 2\big(\mathbb{E}[Z(t)Z(t+\tau)]\big)^2 \\ &= R_Z^2(0) + 2R_Z^2(\tau). \end{aligned}$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier στα δύο μέλη λαμβάνουμε

$$S_{Z^2}(f) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S_Z(f)\, df\right)^2 \delta(f) + 2S_Z * S_Z(f).$$

Άσκηση 6 Θεωρήστε μια πραγματική στάσιμη με την ευρεία έννοια διαδικασία $n(\cdot)$ τέτοια ώστε $S_n(f) = 0$ για $|f| > B$, και ένα βαθυπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς H, τέτοια ώστε $H(f) = 0$ για $|f| > W$. Αν το σήμα $m(\cdot)$ είναι τέτοιο ώστε $\hat{m}(f) = 0$ για $|f| < W + B$, δείξτε ότι το σήμα $x(t) = m(t)n(t)$ αποκόπτεται τελείως από το φίλτρο.

Απόδειξη: Έστω $h(\cdot)$ η κρουστική απόκριση του φίλτρου και $y(\cdot)$ η απόκριση του φίλτρου στο σήμα x. Έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)m(t-s)n(t-s)\ ds$$

και

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(r)m^*(t-r)n(t-r)\ dr.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|y(t)|^2] &= \iint_{\mathbb{R}^2} h(s)h^*(r)m(t-s)m^*(t-r)\mathbb{E}[n(t-s)n(t-r)]\ drds \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} h(s)h^*(r)m(t-s)m^*(t-r)R_n(r-s)\ drds \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} h(s)h^*(r)m(t-s)m^*(t-r)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)e^{2\pi i f(r-s)}\ df\right)\ drds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)m(t-s)e^{-2\pi i f s}\ ds\right|^2 df.
\end{aligned}$$

Αν ορίσουμε $g_t(\cdot) = m(t-\cdot)$ η ποσότητα μέσα στην απόλυτη τιμή είναι ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου $h(s)g_t(s)$, και άρα είναι ίση με

$$\begin{aligned}
\hat{g}_t * H(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_t(\xi)H(f-\xi)\ d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{m}(-\xi)e^{-2\pi i\xi t}H(f-\xi)\ d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{m}(\xi)e^{2\pi i\xi t}H(f+\xi)\ d\xi.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|y(t)|^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{m}(\xi)e^{2\pi i\xi t}H(f+\xi)\ d\xi\right|^2 df \\
&= \int_{|f|<B} S_n(f)\left|\int_{|\xi|>W+B} \hat{m}(\xi)e^{2\pi i\xi t}H(f+\xi)\ d\xi\right|^2 df.
\end{aligned}$$

Αυτό όμως είναι ίσο με μηδέν γιατί $|f+\xi| > |\xi| - |f| > W + B - B = W$ άρα $H(f+\xi) = 0$ στο σύνολο που ολοκληρώνουμε.

Άσκηση 7 Έστω $x(\cdot)$ στάσιμη με την ευρεία έννοια διαδικασία με πυκνότητα φάσματος ισχύος S. Αν $y(\cdot)$ είναι η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς H στη διέγερση x, δείξτε ότι

$$\mathbb{E}\big[\big(y(t)-x(t)\big)^2\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\big|1-H(f)\big|^2 \, df.$$

Συμπεράνετε ότι αν $H(f)=1$ για όλες τις συχνότητες για τις οποίες $S(f)>0$ τότε $y(t)=x(t)$ με πιθανότητα 1.

Απόδειξη: Αν h είναι η κρουστική απόκριση του γραμμικού συστήματος έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\big(y(t)-x(t)\big)^2\big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)x(t-s)\, ds - x(t)\Big)^2\Big] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)\mathbb{E}[x(t-s)x(t-r)]\, dsdr + \mathbb{E}[x^2(t)] \\
&\quad - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\mathbb{E}[x(t-s)x(t)]ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{2\pi i f(s-r)}df\right) dsdr \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)df - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{2\pi i f s}df\right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\big(|H(f)|^2+1\big)df - 2\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(-f)df.
\end{aligned}$$

Επειδή η S είναι άρτια συνάρτηση ο τελευταίος όρος μπορεί να γραφεί και ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\big(H(-f)+H(f)\big)df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\big(H^*(f)+H(f)\big)df,$$

οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 8 (σελ. 434- πρόβλημα 6.16)
Η έξοδος του φωρατή τετραγωνικού νόμου είναι

$$\begin{aligned}
v(t) &= (1+m(t))^2\cos^2(2\pi f_c t) \\
&= \frac{(1+m(t))^2}{2} + \frac{(1+m(t))^2}{2}\cos(4\pi f_c t) \\
&= \frac{1}{2} + m(t) + \frac{m^2(t)}{2} + \frac{\cos(4\pi f_c t)}{2} + m(t)\cos(4\pi f_c t) + \frac{m^2(t)}{2}\cos(4\pi f_c t).
\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι ο πρώτος όρος περνά ανέπαφος, ενώ από την προηγούμενη άσκηση το ίδιο συμβαίνει και με το δεύτερο όρο $m(t)$. Είναι επίσης φανερό ότι ο τέτερτος όρος θα κοπεί από το βαθυπερατό φίλτρο. Από την άσκηση 6 και ο όρος $m(t)\cos(4\pi f_c t)$ θα κοπεί από το φίλτρο αν $2f_c > W+W$. Από την άσκηση 5 η πυκνότητα φάσματος ισχύος της $m^2(t)$ θα είναι 0 για συχνότητες μεγαλύτερες του $2W$ και άρα από την άσκηση 6 πάλι και ο τελευταίος όρος θα κοπεί από το φίλτρο αν $2f_c > 2W + W$.

Τελικά η έξοδος του βαθυπερατου φίλτρου θα είναι

$$y(t) = \frac{1}{2} + m(t) + \frac{N(t)}{2},$$

όπου $N(t)$ θα είναι η απόκριση του φίλτρου στο σήμα $m^2(t)$. Η πυκνότητα φάσματος ισχύος της m^2 μπορεί να βρεθεί από την άσκηση 5.

$$\begin{aligned} S_{m^2}(f) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f)\, df \right)^2 \delta(f) + 2S_m * S_m(f) \\ &= (2S_0W)^2\delta(f) + 2S_0^2(2W - |f|). \end{aligned}$$

Αν αφαιρέσουμε την dc συνιστώσα της εξόδου η ισχύς του θορύβου θα είναι

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4} \int_{0<|f|<W} |H(f)|^2 S_{m^2}(f)\, df \\ &= \frac{1}{4} \int_{-W}^{W} S_{m^2}(f)\, df \\ &= \frac{3}{2} S_0^2 W^2. \end{aligned}$$