ΜΑΘ. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΙΙ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV

Οι ασκήσεις είναι από το βιβλίο του Simon Haykin. Θα ακολουθήσει ακόμη ένα φυλλάδιο τις επόμενες μέρες.

***Άσκηση* 1** (σελ. 366- πρόβλημα 5.6)
***Λύση*:** Υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του διανύσματος $(Z(t_1), Z(t_2))$.

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \mathbb{E}\big[e^{i(uZ(t_1)+vZ(t_2))}\big] \\ &\mathbb{E}\Big[\exp\big(i(u\cos(2\pi t_1)+v\cos(2\pi t_2))X + i(u\sin(2\pi t_1)+v\sin(2\pi t_2))Y\big)\Big] \\ &\mathbb{E}\Big[\exp\big(i(u\cos(2\pi t_1)+v\cos(2\pi t_2))X\big)\Big]\mathbb{E}\Big[\exp\big(i(u\sin(2\pi t_1)+v\sin(2\pi t_2))Y\big)\Big] \end{aligned}$$

γιατί οι X, Y είναι ανεξάρτητες. Η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυπικής κανονικής είναι $\mathbb{E}[e^{itX}] = e^{-t^2/2}$, επομένως

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \exp\big(-\frac{1}{2}(u\cos(2\pi t_1)+v\cos(2\pi t_2))^2 - \frac{1}{2}(u\sin(2\pi t_1)+v\sin(2\pi t_2))^2\big) \\ &= \exp\big(-\frac{1}{2}(u^2+v^2+2uv(\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)+\sin(2\pi t_1)\sin(2\pi t_2)))\big) \\ &= \exp\big(-\frac{1}{2}(u^2+v^2+2uv\cos(2\pi(t_2-t_1)))\big) \end{aligned}$$

Αυτή όμως είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας κανονικής σε δύο διαστάσεις με μέση τιμή (0,0) και πίνακα διασποράς

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \cos(2\pi(t_2-t_1)) \\ \cos(2\pi(t_2-t_1)) & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα οι $(Z(t_1), Z(t_2))$ ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ και πίνακα διασποράς $\mathbf{\Sigma}$.

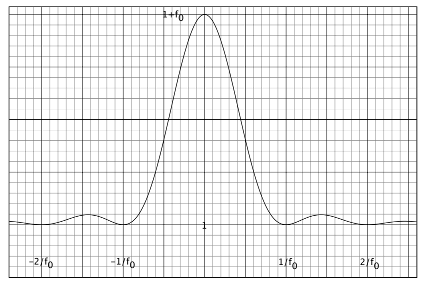
Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι οι $Z(t_i)$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των X, Y που έχουν από κοινού κανονική κατανομή. Επομένως οι $(Z(t_1), Z(t_2), \ldots, Z(t_k))$ ακολουθούν κανονική κατανομή για οποιαδήποτε k-άδα χρόνων $(t_1, \ldots, t_k)$, δηλαδή η Z είναι ανέλιξη Gauss. Μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους της ως εξής $\mathbf{m}_i = \mathbb{E}[Z(t_i)] = 0$ και

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_{ij} &= \mathbb{E}[Z(t_i)Z(t_j)] = \mathbb{E}\big[(X\cos(2\pi t_i)+Y\sin(2\pi t_i))(X\cos(2\pi t_j)+Y\sin(2\pi t_j))\big] \\ &= \mathbb{E}[X^2]\cos(2\pi t_i)\cos(2\pi t_j) + \mathbb{E}[Y^2]\sin(2\pi t_i)\sin(2\pi t_j) \\ &\quad + \mathbb{E}[XY](\cos(2\pi t_i)\sin(2\pi t_j)+\sin(2\pi t_i)\cos(2\pi t_j)) \\ &= \cos(2\pi t_i)\cos(2\pi t_j) + \sin(2\pi t_i)\sin(2\pi t_j) + 0 \\ &= \cos(2\pi(t_2-t_1)). \end{aligned}$$

Εφόσον η Z είναι ανέλιξη Gauss με σταθερή μέση τιμή και η συνδιασπορά $\mathbf{\Sigma}_{ij} = \mathbb{E}[Z(t_i)Z(t_j)]$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t_j - t_i$ η Z είναι στάσιμη.

Άσκηση 2 (σελ. 370- πρόβλημα 5.17)
Λύση: α) Η $R_X(\tau)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της

$$S_X(f) = \big(1 - \frac{|f|}{f_0}\big)^+ + \delta(f).$$



Άρα,

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \int_{-f_0}^{f_0} (1 - \frac{|f|}{f_0}) e^{2\pi i f \tau} \, df + 1 \\ &= 2\int_0^{f_0} (1 - \frac{f}{f_0}) \cos(2\pi f \tau) \, df + 1 \\ &= \frac{\sin^2(\pi f_0 \tau)}{\pi^2 f_0 \tau^2} + 1. \end{aligned}$$

β) Η ισχύς που αντιστοιχεί σε ένα εύρος συχνοτήτων $[f_1, f_2]$ είναι το ολοκλήρωμα της $S_X(f)$ στο διάστημα αυτό. Επομένως η ισχύς που αντιστοιχεί σε μηδενική συχνότητα είναι $P_{dc} = 1$.
γ) $P_{ac} = \int_{-f_0}^{f_0} 1 - \frac{|f|}{f_0} \, df = f_0$.
δ) Αν $f_0 \tau \in \mathbb{Z}$ τότε $\mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)] = 1$ (η ελάχιστη τιμή της $R_X(\tau)$. Αυτό από μόνο του δεν συνεπάγεται ότι οι $X(t)$ και $X(t+\tau)$ είναι ασυσχέτιστες. Πάρτε για παράδειγμα $X(t) = Z + Y(t)$ όπου η Y_t είναι στάσιμη στοχαστική διαδικασία με μέση τιμή 0 και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_Y(\tau) = \frac{\sin^2(\pi f_0 \tau)}{\pi^2 f_0 \tau^2}$ και Z τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από την $Y_\cdot$ με μέση τιμή μηδέν και διασπορά 1. Τότε οι $X(t), X(t+\tau)$ δεν είναι ασυσχέτιστες. Αν όμως $Z \equiv 1$ τότε $\mathbb{E}[X(t)] = 1$ και άρα οι $X(t), X(t+\tau)$ είναι ασυσχέτιστες. Ακόμη και σ' αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να συμπεράνουμε εν γένει ότι οι $X(t), X(t+\tau)$ είναι ανεξάρτητες. Ενδιαφέρουσα εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση που η $X_\cdot$ είναι Gauss, οπότε αν οι $X(t), X(t+\tau)$ είναι ασυσχέτιστες τότε είναι και ανεξάρτητες.

Άσκηση 3 (σελ. 371- πρόβλημα 5.19)
Η πυκνότητα φάσματος ισχύος της εισόδου δίνεται από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\nu|\tau|} e^{-2\pi i f \tau} \, d\tau.$$

Μπορείτε είτε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα απ' ευθείας είτε να ανακαλέσετε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{-|t|}$ είναι $\dfrac{2}{1 + 4\pi^2 f^2}$ και να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier ως προς την αλλαγή της χρονικής κλίμακας:

$$S_X(f) = \frac{1}{2\nu} \frac{2}{1 + 4\pi^2 (\frac{f}{2\nu})^2} = \frac{\nu}{\nu^2 + \pi^2 f^2}.$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος είναι $H(f) = \frac{1}{1+2\pi iRCf}$. Επομένως η πυκνότητα φάσματος ισχύος στην έξοδο θα είναι

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \frac{1}{1+4\pi^2(RC)^2f^2}\frac{\nu}{\nu^2+\pi^2f^2}.$$

Για να βρούμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου $R_Y(\tau)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της S_Y. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Είτε παρατηρώντας ότι η S_Y είναι το γινόμενο μετασχηματισμών γνωστών συναρτήσεων (οπότε η R_Y θα είναι η συνέλιξη αυτών των συναρτήσεων) είτε γράφοντας το γινόμενο στον τύπο για την S_Y ως διαφορά δύο κλασμάτων. Εδώ θα κάνουμε το δεύτερο. Συγκεκριμένα, αν $2\nu RC \neq 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$S_Y(f) = \frac{1}{1-(2\nu RC)^2}\left(\frac{1}{\nu^2+\pi^2f^2} - \frac{4(RC)^2}{1+4\pi^2(RC)^2f^2}\right)$$

και άρα

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{1-(2\nu RC)^2}\left(\frac{e^{-2\nu|\tau|}}{\nu} - 2RCe^{-\frac{|\tau|}{RC}}\right).$$

Επειδή η R_Y εξαρτάται συνεχώς από το ν μπορούμε να βρούμε την τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης όταν $2\nu RC = 1$ παίρνοντας το όριο $\nu \to 1/2RC$ στην παραπάνω σχέση:

$$\begin{aligned}R_Y(\tau) &= \lim_{\nu\to\frac{1}{2RC}} \frac{1}{1+2\nu RC}\frac{1}{2RC}\left(-\frac{\nu^{-1}e^{-2\nu|\tau|} - 2RCe^{-\frac{2|\tau|}{2RC}}}{\nu - \frac{1}{2RC}}\right)\\ &= \frac{1}{4RC}\,\frac{d}{d\nu}\left(-\frac{e^{-2\nu|\tau|}}{\nu}\right)\bigg|_{\nu=\frac{1}{2RC}}\\ &= (RC+|\tau|)e^{-\frac{|\tau|}{RC}}.\end{aligned}$$

Σαν άσκηση μπορείτε να επιβεβαιώσετε το τελευταίο αποτέλεσμα (όταν $2\nu RC = 1$) γράφοντας την R_Y σαν συνέλιξη της συνάρτησης $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2RC}}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$ με τον εαυτό της.

Άσκηση 4 (σελ. 371- πρόβλημα 5.20)
Υπολογίζουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της ανέλιξης X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)] &= A^2\mathbb{E}\Big[\cos\big(2\pi Ft+\Theta\big)\cos\big(2\pi F(t+\tau)+\Theta\big)\Big]\\ &= \frac{A^2}{2}\mathbb{E}\Big[\cos(2\pi F\tau) + \cos\big(2\pi F(2t+\tau)+2\Theta\big)\Big].\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τις παραπάνω αναμενόμενες τιμές ως εξής.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\cos(2\pi F\tau)\Big] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\pi w\tau)f_F(w)\,dw = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi iw\tau}+e^{-2\pi iw\tau}}{2}f_F(w)\,dw\\ &= \frac{\hat{f}_F(\tau)+\hat{f}_F(-\tau)}{2}.\end{aligned}$$

Για τη δεύτερη αναμενόμενη τιμή θα χρειαστούμε την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των F, Θ. Εφόσον είναι ανεξάρτητες αυτή θα είναι

$$\Phi(w,\theta) = \frac{f_F(w)}{2\pi},\ w \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Επομένως,

$$\mathbb{E}\Big[\cos\big(2\pi F(2t+\tau)+2\Theta\big)\Big] = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_0^{2\pi}\cos\big(2\pi w(2t+\tau)+2\theta\big)d\theta\Big)\frac{f_F(w)}{2\pi}\,dw = 0.$$

Άρα η X είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια και

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\frac{\hat{f}_F(\tau)+\hat{f}_F(-\tau)}{2}.$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier στην παραπάνω υπολογίζουμε την πυκνότητα φάσματος ισχύος

$$S_X(\xi) = \frac{A^2}{2}\frac{f_F(-\xi)+f_F(\xi)}{2}.$$

Αν η f_F είναι άρτια έχουμε $S_X(\xi) = A^2/2 f_F(\xi)$ και αν η F παίρνει μια μόνο τιμή f_0 δηλαδή $f_F(\xi) = \frac{\delta(\xi-f_0)+\delta(\xi+f_0)}{2}$ τότε $S_X = \frac{A^2}{2}\frac{\delta(\xi-f_0)+\delta(\xi+f_0)}{2}$.

Άσκηση 5 (σελ. 378- πρόβλημα 5.32)
Η συνάρτηση μεταφοράς του εν λόγω βαθυπερατού φίλτρου είναι

$$H(f) = \frac{1}{1+2\pi i f RC}.$$

Δεδομένου ότι ο θόρυβος στην είσοδο έχει σταθερή πυκνότητα φάσματος ισχύος $N_0/2$ η πυκνότητα φάσματος ισχύος του θορύβου $n(\cdot)$ στην έξοδο είναι

$$S_n(f) = |H(f)|^2 S_w(f) = \frac{N_0/2}{1+4\pi^2 f^2 (RC)^2}.$$

Όπως έχουμε δει εφόσον η είσοδος του γραμμικού φίλτρου είναι στάσιμη ανέλιξη Gauss το ίδιο θα ισχύει και για την έξοδο n, ενώ η μέση τιμή της εξόδου θα είναι μηδέν αφού η μέση τιμή της εισόδου είναι μηδέν. Άρα $n(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη διασπορά είτε από την πυκνότητα φάσματος ισχύος, είτε από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της n:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[n^2(t)] = R_n(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,df.$$

Μπορείτε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Εναλλακτικά, παρατηρήστε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της S_n (η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δηλαδή) μας είναι γνωστός.

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{4RC}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}.$$

Επομένως $\sigma^2 = \frac{N_0}{4RC}$.

Άσκηση 6 (σελίδα 378- πρόβλημα 5.34)
Υπολογίζουμε πρώτα τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου. Αν $x(t)$ και $y(t)$ είναι η τάση στην είσοδο και στην έξοδο αντίστοιχα και $i(t)$ το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα έχουμε $x(t) - i(t)R - y(t) = 0$. Όμως η τάση στα άκρα του πηνίου (που συμπίπτει με την τάση εξόδου) συνδέεται με το ρεύμα $i(t)$ με τη σχέση $y(t) = L\frac{di(t)}{dt}$. Παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier στις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(f) = \frac{2\pi i f L}{R + 2\pi i f L},$$

οπότε η πυκνότητα φάσματος ισχύος της εξόδου είναι

$$S_n(f) = |H(f)|^2 \frac{N_0}{2} = \frac{N_0}{2} \frac{4\pi^2 f^2 L^2}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}.$$

Για να υπολογίσετε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης παρατηρήστε ότι

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}\left(1 - \frac{R^2}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}\right),$$

οπότε

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) - \frac{N_0 R}{4L} e^{-\frac{R|\tau|}{L}}.$$

Άσκηση 7 (σελ. 380- πρόβλημα 5.39) Θεωρούμε ότι η κεντρική συχνότητα του θορύβου είναι f_c =5,5Hz με εύρος ζώνης $B = 1,5$Hz. Όπως είδαμε στην τάξη η συμφασική και ορθογώνια συνιστώσα έχουν πυκνότητα φάσματος ισχύος

$$S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = \begin{cases} S_n(f - f_c) + S_n(f + f_c), & \text{αν } |f| \le B \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}.$$

Από τη γραφική παράσταση της S_n βρίσκουμε

$$S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = \begin{cases} 1,5 & \text{αν } |f| \le 0,5 \\ 2,25 - 1,5|x| & \text{αν } 0,5 \le |f| \le 1,5 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}.$$

Αντίστοιχα, οι ετεροφασματικές πυκνότητες δίνονται από τις

$$S_{n_c n_s}(f) = -S_{n_s n_c}(f) = \begin{cases} i(S_n(f + f_c) + S_n(f - f_c)), & \text{αν } |f| \le B \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}.$$

οπότε

$$S_{n_c n_s}(f) = -S_{n_s n_c}(f) = \begin{cases} i(0,5f + 0,75) & \text{αν } -1,5 \le f \le -0,5 \\ -if & \text{αν } |f| \le 0,5 \\ i(0,5f - 0,75) & \text{αν } 0,5 \le f \le 1,5 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}.$$

Άσκηση 8 (σελ. 381- πρόβλημα 5.41)
Για τον ζωνοπερατό θόρυβο Gauss $N(t)$ θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση

$$N(t) = r(t)\cos\big(2\pi f_c t + \psi(t)\big),$$

όπου $r(t) = \sqrt{N_c^2(t) + N_s^2(t)}$ και η $\psi(t)$ είναι ομοιόμορφη στο $[0, 2\pi]$ και ανεξάρτητη της $r(t)$. Η περιβάλλουσα της $N(\cdot)$ είναι επομένως η $r(\cdot)$ και άρα η έξοδος της διάταξης που δίνει το τετράγωνο της περιβάλλουσας είναι η

$$Z(t) = r^2(t) = N_c^2(t) + N_s^2(t).$$

Οι $N_c(t), N_s(t)$ ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν αφού ο $N(t)$ είναι Gauss με μέση τιμή μηδέν. Παρατηρήστε ότι οι $N_c(t)$ και $N_s(t)$ έχουν πυκνότητα φάσματος ισχύος που βρίσκεται όπως στην προηγούμενη άσκηση

$$S_{N_c}(f) = S_{N_s}(f) = \begin{cases} N_0, & \text{αν } |f| \le B \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases},$$

και ετεροφασματικές πυκνότητες $S_{N_cN_s}(f) = -S_{N_sN_c}(f) = 0$ (παρατηρήστε ότι η $S_N(f)$ είναι τοπικά συμμετρική γύρω από την f_c.) Άρα οι $N_c(t), N_s(t)$ είναι ανεξάρτητες (είναι ασυσχέτιστες αφού $R_{N_cN_s} \equiv 0$ και η από κοινού τους κατανομή είναι κανονική) και η διασπορά καθεμιάς δίνεται από την

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[N_c^2(t)] = \mathbb{E}[N_s^2(t)] = \int_{-B}^{B} N_0 df = 2N_0B.$$

Δηλαδή η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας είναι

$$f(u,v) = \frac{1}{4\pi N_0 B} e^{-\frac{u^2+v^2}{4N_0B}}.$$

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση κατανομής της $Z(t)$. Για κάθε $z > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}\big[Z(t) \le z\big] = \mathbb{P}\big[N_c^2(t) + N_s^2(t) \le z\big] \\ &= \int\int_{u^2+v^2\le z} \frac{1}{4\pi N_0 B} e^{-\frac{u^2+v^2}{4N_0B}}\ dudv \end{aligned}$$

Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi N_0 B} e^{-\frac{r^2}{4N_0B}} r\ d\theta dr \\ &= 1 - e^{-\frac{z}{4N_0B}}. \end{aligned}$$

Επομένως η Z ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $4N_0B$.