

ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΝ- ΧΕ2010
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ (παράδοση 3/11)

Άσκηση 1 Για τις παρακάτω οικογένειες εξακριβώστε αν ικανοποιούν την LDP.

1. \mathbb{P}_n είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο $[-n, n]$.
2. \mathbb{P}_n είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1/n, 1/n]$.
3. \mathbb{P}_n είναι η κατανομή του $\min_{1 \leq i \leq n} X_i$ όταν η $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από i.i.d. τ.μ. με κοινή κατανομή την ομοιόμορφη στο $[0,1]$.

Άσκηση 2 Έστω \mathbb{P}_n μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας σ' ένα πολωνικό χώρο \mathbb{X} , που ικανοποιεί την LDP με συνάρτηση ταχύτητας I . Ορίζουμε το σύνολο $K = \{x \in \mathbb{X} : I(x) = 0\}$. Δείξτε ότι αν $\mathbb{P}_{n_k} \rightarrow \mathbb{P}$ τότε $\mathbb{P}[K] = 1$. Συμπεράνετε ότι αν $K = \{x_0\}$ τότε $\mathbb{P}_n \rightarrow \delta_{x_0}$.

Άσκηση 3 Αν η $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από i.i.d. τ.μ. με κοινή κατανομή εκθετική με μέση τιμή 1 και $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, από το νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε $S_n/n \rightarrow 1$ σ.β. Με τη βοήθεια του λήμματος του Varadhan υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_n}{n} \right)^n \right].$$

Άσκηση 4 Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον (Ω, \mathcal{F}) και $A \in \mathcal{F}$ ένα σύνολο με $\mu[A] > 0$. Ορίζουμε τον περιορισμό του μ στο A , $\mu_A = \mu[\cdot | A]$, ως εξής: για κάθε $B \in \mathcal{F}$, $\mu_A[B] = \mu[B \cap A] / \mu[A]$. Δείξτε ότι το μ_A είναι η μοναδική λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης

$$\inf_{\nu: \nu[A]=1} H(\nu | \mu).$$

Άσκηση 5 Αποδείξτε την ταυτότητα του παραλληλογράμμου του Csiszár:

$$H(\pi | \mu) + H(\nu | \mu) = 2H\left(\frac{\pi + \nu}{2} | \mu\right) + H\left(\pi | \frac{\pi + \nu}{2}\right) + H\left(\nu | \frac{\pi + \nu}{2}\right),$$

και συμπεράνετε ότι αν το K είναι ένα μη κενό, κυρτό σύνολο μέτρων πιθανότητας και κλειστό ως προς την νόρμα της ολικής κύμανσης, δηλαδή, αν $\mu_n \in K$ και $\|\mu_n - \mu\|_{t.v.} \rightarrow 0$ τότε $\mu \in K$, η $H(\cdot | \mu)$ λαμβάνει το ελάχιστό της στο K .