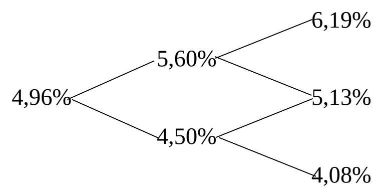
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ- Εαρινό Εξάμηνο 2007

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ

Άσκηση 1 Θεωρήστε το ακόλουθο διωνυμικό μοντέλο για το επιτόκιο εξάμηνου δανεισμού. Κάθε περίοδος του δέντρου αντιστοιχεί σε 6 μήνες, ενώ οι αδιάφορες κινδύνου πιθανότητες είναι $\frac{1}{2}$ σε όλους τους κόμβους.



Θεωρήστε τώρα ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης με ωρίμανση σε 12 μήνες επί ενός 18μηνου ομολόγου όψεως €10.000.

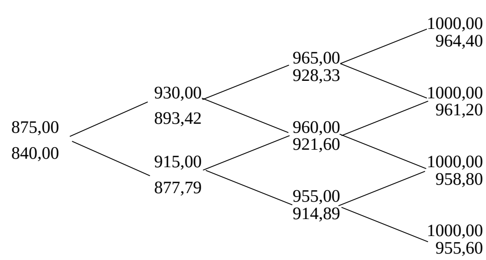
α. Ποιά είναι σήμερα η (12μηνη) μελλοντική τιμή (future price) του ομολόγου;

β. Τιμολογήστε ένα δικαίωμα αγοράς του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης με ωρίμανση (του δικαιώματος) σε έξι μήνες και παραδοτέα τιμή €9.735.

γ. Έστω τώρα ότι θέλετε να αντισταθμίσετε το παραπάνω δικαίωμα χρησιμοποιώντας συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης όπως αυτό που περιγράψαμε και 6μηνα ομόλογα. Περιγράψτε πώς θα το επιτυγχάνατε.

δ. Ποιά είναι σήμερα η (12μηνη) προθεσμιακή τιμή (forward price) του ομολόγου;

Άσκηση 2 Θεωρήστε το παρακάτω υπόδειγμα για τις αξίες ενός τριετούς και ενός τετραετούς ομολόγου, αμφότερα όψεως €1000. Κάθε περίοδος του δέντρου αντιστοιχεί σε 1 έτος.



α. Βρείτε το μέτρο martingale $\mathbb{Q}^*$ που αντιστοιχεί στην επιλογή του τριετούς ομολόγου ως προϊόν αναφοράς (numeraire.)

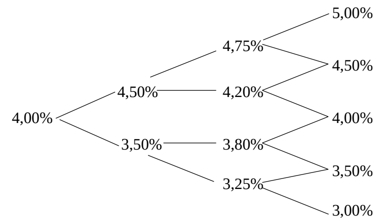
β. Τιμολογήστε βάσει του παραπάνω υποδείγματος το δικαίωμα να ανταλλάξουμε σε δύο χρόνια το τριετές ομόλογο με ένα τετραετές και €40.

γ. Υπολογίστε το ετήσιο επιτόκιο σε κάθε κόμβο του δέντρου και την αξία του λογαριασμού αγοράς σε τέσσερα έτη.

δ. Βρείτε το μέτρο martingale $\mathbb{Q}$ που αντιστοιχεί στην επιλογή του λογαριασμού αγοράς ως προϊόν αναφοράς (numeraire.)

ε. Βρείτε την μελλοντική τιμή για ένα τριετές συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης επί του τετραετούς ομολόγου.

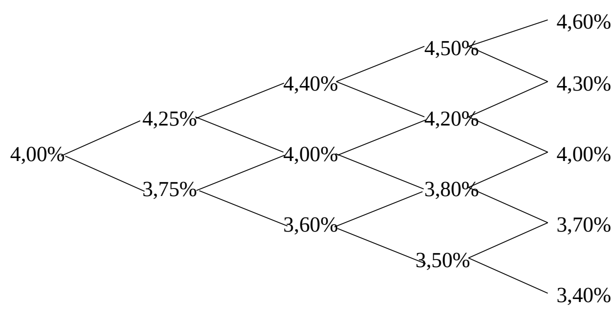
Άσκηση 3 Με βάση το ακόλουθο υπόδειγμα για το ετήσιο επιτόκιο EURIBOR όπου το μέτρο martingale $\mathbb{Q}$ που αντιστοιχεί στο λογαριασμό αγοράς δίνει την ίδια πιθανότητα σε κάθε πιθανό μονοπάτι απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:



α. Υπολογίστε τις ράντες αποπληρωμής ενός δανείου ύψους €10.000,00 σε τέσσερις ισόποσες ετήσιες δόσεις όταν το επιτόκιο δανεισμού είναι 6%.
β. Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα αν το επιτόκιο δανεισμού είναι δύο μονάδες πάνω από το ετήσιο επιτόκιο EURIBOR. Εδώ η απάντησή σας θα αλλάζει από κόμβο σε κόμβο.
γ. Μια τράπεζα προσφέρει δάνεια όπως αυτό του ερωτήματος (β) και ένας πελάτης της επιθυμεί να ανταλλάξει το μεταβλητό επιτόκιο με σταθερό επιτόκιο R. Για ποιά τιμή του R είναι η αξία της ανταλλαγής μηδενική;

Άσκηση 4 Οι τιμές ενός 6μηνου, ενός ετήσιου και ενός 18μηνου ομολόγου όψεως €100 είναι αντίστοιχα €97,90, €95,60, €93,30. Κατασκευάστε ένα δυωνυμικό δέντρο για το στιγμιαίο επιτόκιο προσαρμοσμένο ώστε να τιμολογεί σωστά τα παραπάνω ομόλογα για μεταβλητότητα του στιγμιαίου επιτοκίου $\sigma = 0,16/\sqrt{\text{έτος}}$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας αυτό το υπόδειγμα τιμολογήστε ένα δικαίωμα πώλησης επί του 18μηνου ομολόγου με ωρίμανση σε 12 μήνες και τιμή άσκησης €98.

Άσκηση 5 Θεωρήστε το παρακάτω υπόδειγμα για το ετήσιο επιτόκιο EURIBOR όπου κάθε περίοδος του δέντρου αντιστοιχεί σε 12 μήνες και το μέτρο martingale $\mathbb{Q}$ που αντιστοιχεί στο λογαριασμό αγοράς δίνει την ίδια πιθανότητα σε κάθε μονοπάτι του δέντρου.



α. Βρείτε τη σημερινή αξία (σαν ποσοστό της τιμής όψεως) ενός 5ετούς ομολόγου που πληρώνει ετήσια τοκομερίδια με σταθερό επιτόκιο 3,5%.
β. Επαναλάβετε το ίδιο ερώτημα για ένα 5ετές ομόλογο που πληρώνει ετήσια τοκομερίδια με μεταβλητό επιτόκιο 0,5% κάτω από το ετήσιο EURIBOR.
γ. Τιμολογήστε το δικαίωμα να ανταλλάξουμε σε δύο έτη το ομόλογο του ερωτήματος (β) για αυτό του ερωτήματος (α) για τιμή όψεως €10.000,00.
δ. Βρείτε τη σημερινή αξία (σαν ποσοστό της τιμής όψεως L) ενός 3ετούς ομολόγου που πληρώνει ετήσια τοκομερίδια βάσει του ακόλουθου αλγορίθμου: Το πρώτο τοκομερίδιο αντιστοιχεί σε σταθερό επιτόκιο 6%. Για το δεύτερο και το τρίτο τοκομερίδιο υπολογίζονται στην αρχή της εν λόγω περιόδου τα ισοδύναμα επιτόκια ανταλλαγής $R_2(t_i)$ και $R_3(t_i)$ του EURIBOR για διετείς και τριετείς ανταλλαγές.

- Αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους είναι πάνω από 1% τότε το τοκομερίδιο που καταβάλλεται στο τέλος της περιόδου αντιστοιχεί σε 1,5% πάνω από το ισχύον ετήσιο επιτόκιο EURIBOR: $C_{i+1} = L \times (r(t_i, t_{i+1}) + 1,5\%)$.

- Αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους είναι κάτω από 1% τότε το τοκομερίδιο που καταβάλλεται στο τέλος της περιόδου αντιστοιχεί στο πενταπλάσιο αυτής: $C_{i+1} = 5 \times L \times |R_3(t_i) - R_2(t_i)|$