

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΙΙ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2007
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ (Ημερομηνία Παράδοσης 25/04/2007)

Άσκηση 1 Θεωρούμε ένα διωνυμικό υπόδειγμα 2 εξαμηνων περιόδων για μια αγορά στην οποία υπάρχει μια μετοχή και ένα ομόλογο όψεως €1 με ωρίμανση σε 1 έτος. Η σημερινή τιμή της μετοχής είναι €10 ενώ αυτή του ομολόγου είναι €0,9. Στο τέλος του πρώτου εξαμήνου η αγορά μπορεί να βρεθεί σε δύο καταστάσεις. Στη μια από αυτές η αξία της μετοχής είναι €12 και αυτή του ομολόγου είναι €0,95 ενώ στην άλλη κατάσταση η αξία της μετοχής είναι €9 και αυτή του ομολόγου είναι €0,94. Στο τέλος του δεύτερου εξαμήνου η αξία της μετοχής είναι είτε 20% πάνω είτε 10% κάτω από την τιμή της στους έξι μήνες.

α) Βρείτε το μέτρο martingale \mathbb{Q}_* που αντιστοιχεί στην επιλογή του ομολόγου ως "numeraire" και τιμολογήστε ένα δικαίωμα αγοράς 100 μετοχών προς €1000 χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$V_0 = B(0, T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}[V_T].$$

β) Επιβεβαιώστε το παραπάνω αποτέλεσμα κατασκευάζοντας ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μετοχές και ομόλογα και αναπαράγει την απόδοση του δικαιώματος στην ωρίμανση.

Άσκηση 2 Θεωρούμε ένα ομόλογο όψεως €1.000 με ωρίμανση σε 5 χρόνια. Υποθέτουμε ότι η σημερινή χρονική διάρθρωση των επιτοκίων περιγράφεται από την σχέση $B(0, t) = e^{-0.04t}$ για κάθε t , όταν ο χρόνος t εκφράζεται σε έτη.

α. Ποιά είναι η αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου επί του ομολόγου με ωρίμανση σε 2 έτη και παραδοτέα τιμή €800; Ποιά είναι η προθεσμιακή τιμή του ομολόγου;

β. Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα του Black (υποθέτοντας λογαριθμική κανονική κατανομή για την τιμή του ομολόγου σε δύο έτη) τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς του ομολόγου με τιμή εξάσκησης €800 και ωρίμανση σε δύο έτη. Η διασπορά του $\ln(B(2, 5))$ εκτιμάται ότι είναι 0,01.

Άσκηση 3 Σε ένα χρόνο από σήμερα πρόκειται να πάρετε ένα τρίμηνο δάνειο €10.000. Τα διατραπεζικά επιτόκια για 12 και 15 μήνες είναι αντίστοιχα 4,12% και 4,16%.

α. Βρείτε την σημερινή αξία μιας προθεσμιακής σύμβασης επιτοκίου, που σας εξασφαλίζει επιτόκιο R . Για ποιά τιμή του R είναι η αξία αυτής της συμφωνίας μηδενική;

β. Χρησιμοποιήστε το υπόδειγμα του Black για να τιμολογήσετε μια συμφωνία οροφής επιτοκίου 5%. Η μεταβλητότητα του επιτοκίου περιόδου 3 μηνών εκτιμάται σε $\sigma = 0,2/\sqrt{\text{έτος}}$.

γ. Επαναλάβετε τα ερωτήματα (α) και (β) αν η τράπεζα με την οποία συνάπτετε τις συμφωνίες χρεώνει προμήθεια 2% πάνω από το διατραπεζικό επιτόκιο.

Άσκηση 4 Τα σημερινά επιτόκια EURIBOR για 3,6,9 και 12 μήνες δανεισμού είναι αντίστοιχα 3,902%, 4,013%, 4,077% και 4,121%. Έχετε ένα ομόλογο όψεως €1.000 με ωρίμανση σε 1 έτος που πληρώνει τοκομερίδια σε 3,6,9 και 12 μήνες, με μεταβλητό επιτόκιο δύο μονάδες πάνω από το τρίμηνο EURIBOR που ισχύει στην αρχή κάθε περιόδου.

α. Ποιά είναι η σημερινή αξία αυτού του ομολόγου; Ποιά είναι η σημερινή αξία των τοκομεριδίων που πρόκειται να λάβετε;

β. Θέλετε να ανταλλάξετε αυτό το ομόλογο με ένα ομόλογο που πληρώνει σταθερά τοκομερίδια με επιτόκιο R . Ποιά είναι η θεωρητικά δίκαιη αξία αυτής της ανταλλαγής; Ποιό είναι το ισοδύναμο επιτόκιο ανταλλαγής;

γ. Έστω τώρα ότι συμφωνείτε να ανταλλάξετε μόνο τα δύο τελευταία τοκομερίδια με τα αντίστοιχα τοκομερίδια σταθερού επιτοκίου R . Ποιά είναι η αξία μιας τέτοιας ανταλλαγής; Ποιό είναι το προθεσμιακό επιτόκιο ανταλλαγής (forward swap rate);

δ. Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα του Black (υποθέτοντας ότι το ισοδύναμο επιτόκιο ανταλλαγής των δύο τελευταίων τοκομεριδίων ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή) τιμολογήστε το δικαίωμα να ανταλλάξετε τις δύο πληρωμές με τις αντίστοιχες σταθερού επιτοκίου 5%. Η μεταβλητότητα του επιτοκίου ανταλλαγής των δύο τελευταίων πληρωμών εκτιμάται σε $\sigma = 0,2/\sqrt{\text{έτος}}$.

Άσκηση 5 Η σημερινή ισοτιμία δολλαρίου/ευρώ είναι $\$1 = \text{€}0,75309$. Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται σημερινές τιμές ευρωπαϊκών και αμερικανικών ομολόγων χωρίς τοκομερίδια.

Τιμή Όψεως	Διάρκεια (μήνες)	Αξία
\$1000	12	\$939
\$1000	24	\$884
\$1000	36	\$830
€1000	12	€961
€1000	24	€926
€1000	36	€893

Σε 12,24 και 36 μήνες πρόκειται να λάβετε πληρωμές \$100.000.

- Προκειμένου να εξαλείψετε τον κίνδυνο πτώσης της τιμής του δολλαρίου επιθυμείτε να ανταλλάξετε αυτές τις πληρωμές με πληρωμές €75.000. Ποιά είναι η θεωρητικά δίκαιη τιμή μιας τέτοιας ανταλλαγής;
- Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα του Black τιμολογήστε το δικαίωμα να χρησιμοποιήσετε σε οποιαδήποτε από τις παραπάνω πληρωμές την ισοτιμία $\$1 = \text{€}0,75$ για τη μετατροπή της σε ευρώ. Η μεταβλητότητα της ισοτιμίας δολλαρίου/ευρώ εκτιμάται σε $\sigma = 0,10/\sqrt{\text{έτος}}$.

Άσκηση 6 Το 3μηνο επιτόκιο EURIBOR είναι 3,902%. Μια τράπεζα προσφέρει ανταλλαγές όπου ένα σταθερό επιτόκιο ανταλλάσσεται κάθε τρεις μήνες με το 3μηνο επιτόκιο EURIBOR. Τα ισοδύναμα επιτόκια ανταλλαγής (par swap rates) για ανταλλαγές διάρκειας 6,9 και 12 μηνών είναι αντίστοιχα 3,925%, 3,940% και 3,960%.

- Ποιά είναι η σημερινή τιμή του 6μηνου, του 9μηνου και του 12μηνου επιτόκιου EURIBOR;
- Ένας πελάτης της τράπεζας οφείλει να καταβάλλει (σε τρίτο πρόσωπο) σε 9 και 12 μήνες τους τόκους τριμήνου επί ενός υποθετικού κεφαλαίου €10.000. Το επιτόκιο που θα πληρώσει πρόκειται να καθοριστεί σε 6 και 9 μήνες αντίστοιχα και θα είναι μια ποσοστιαία μονάδα πάνω από το τότε ισχύον 3μηνο επιτόκιο EURIBOR. Ο πελάτης αυτός επιθυμεί να συνάψει σήμερα μια συμφωνία με την τράπεζα για να ανταλλάξει αυτό το επιτόκιο με ένα σταθερό επιτόκιο $R_{fix} = 4,90\%$. Ποια είναι το θεωρητικά δίκαιο τίμημα που πρέπει να καταβάλλει στην τράπεζα για μια τέτοια συμφωνία;
- Για ποια τιμή του R_{fix} είναι η αξία μιας τέτοιας συμφωνίας μηδενική;
- Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα του Black τιμολογήστε μια συμφωνία που προβλέπει ότι για κάθε πληρωμή το επιτόκιο που θα πληρώσει ο πελάτης θα είναι τουλάχιστον 4% αλλά δεν θα ξεπερνά το 5%. Η μεταβλητότητα του επιτοκίου περιόδου 3 μηνών εκτιμάται σε $\sigma = 0,2/\sqrt{\text{έτος}}$. Μια τέτοια συμφωνία (συνδυασμός οροφής (cap) και κατωφλίου (floor)) αναφέρεται συνήθως ως collar.