Φυσική Ι

Σταύρος Κομηνέας

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

18 Δεκεμβρίου 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Κινηματική

1.1 Εισαγωγή. Μονάδες μέτρησης

1.1.1 Φυσική και Μαθηματικά

Η Φυσική ενδιαφέρεται για την περιγραφή του κόσμου και αυτή γίνεται με τα εργαλεία των Μαθηματικών. Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται η ανάπτυξη νέων μαθηματικών μεθόδων ώστε να προχωρήσει η φυσική περιγραφή.

Στη Φυσική αξία έχει ό,τι είναι δυνατόν να δώσει μετρήσιμα αποτελέσματα. Έτσι, ενδιαφέροντα θεωρούνται τα Μαθηματικά τα οποία θα χρησιμοποιηθούν προς αυτή την κατεύθυνση. Άλλα μαθηματικά εργαλεία, μέθοδοι, κλπ τα οποία δεν βοηθούν αυτόν τον σκοπό εκτιμώνται λιγότερο. Είναι όμως γνωστό ότι, στην εξέλιξη της επιστήμης, τα μαθηματικά εργαλεία που κάποτε δεν φαίνονται χρήσιμα μπορεί να γίνουν τέτοια αργότερα. Τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά βρίσκονται κοντά σε αυτόν τον τρόπο επιστημονικής προόδου. Εδώ, οι αφορμές για νέες μαθηματικές μεθόδους δίνονται από προβλήματα που προκύπτουν στο χώρο της Φυσικής και άλλων επιστημών και μπορούν να συνεισφέρουν στην περιγραφή ή στη λύση τους.

Παρατήρηση 1.1.1. *Σε τι θα μπορούσε να φανεί χρήσιμη η Φυσική στα Μαθηματικά και ειδικότερα όσον αφορά τη Χρηματοοικονομία, τη Μαθηματική Μοντελοποίηση, την Ανάλυση (ή όποια άλλη μαθηματική κατεύθυνση); Ας δούμε τι μπορούμε να πούμε γι' αυτό.*

Μαθηματικές έννοιες, όπως η παράγωγος, ολοκλήρωμα, κλπ, περιγράφουν μέσω της Φυσικής πραγματικά συστήματα ή φυσικές διεργασίες. Οι μαθηματικές αυτές έννοιες μπορούν να ειδωθούν, η κάθε μία, ως περιγραφή διαφόρων φυσικών εννοιών.

Μπορούμε να δούμε ότι η Φυσική προσφέρει πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα για τα οποία μία αυστηρή μαθηματική μοντελοποίηση και ανάλυση θα ήταν ενδιαφέρουσα και χρήσιμη. Τα προβλήματα αυτά μπορεί να έχουν ιδιαίτερες απαιτήσεις σε Μαθηματική Ανάλυση και έτσι παρουσιάζουν ενδιαφέρον για έναν μαθηματικό. Ας δούμε παραδείγματα.

Η Μηχανική αναπτύχθηκε τους περασμένους αιώνες με αφορμή την ανάγκη περιγραφής κινήσεως σωμάτων (π.χ., ουρανίων σωμάτων). Πολλοί μαθηματικοί ανέπτυξαν μία σειρά μεθόδων οι οποίες σήμερα χρησιμοποιούνται στον κλάδο της Φυσικής που λέγεται *«Κλασική Μηχανική»*.

Δεν μπορούμε να δώσουμε μία εξ΄ ίσου σαφή περιγραφή όσον αφορά τη σχέση της Φυσικής με τη *Μαθηματική Χρηματοοικονομία.* Ας δούμε όμως τι έχει συνβεί. Βλέπουμε ότι η ανάπτυξη ομάδων χρηματοοικονομικής ανάλυσης σε επενδυτικές τράπεζες, όπως άρχισαν να διαμορφώνονταν πριν λίγες δεκαετίες, βασίστηκε σε φυσικούς οι οποίοι κατάφεραν να θέσουν και να μελετήσουν τα σχετικά θέματα με βάση, κατ' αρχήν, τις δικές τους επιστημονικές εμπειρίες. Σήμερα πλέον αυτές οι ομάδες αποτελούνται από φυσικούς και μαθηματικούς και η Χρηματοοικονομία έχει ένα σαφέστερο μαθηματικό υπόβαθρο.

1.1.2 Μετρήσεις και μονάδες

Η μέτρηση είναι η βάση της Φυσικής και γι' αυτό χρειαζόμαστε μία συμφωνία ως προς τα μέτρα με τα οποία θα μετράμε τα φυσικά μεγέθη. Χρειαζόμαστε πρότυπα μεγέθη (μήκος, χρόνος κλπ) με τα οποία θα κάνουμε μετρήσεις, δηλαδή, θα συγκρίνουμε κάθε άλλο μέγεθος.

Στο πιο διαδεδομένο σύστημα μονάδων (S.I.) τα πρότυπα μεγέθη, δηλαδή, οι μονάδες, ορίστηκαν με βάση την *«ανθρώπινη κλίμακα»*. Π.χ., το μέτρο (μονάδα μήκους) είναι ένα μήκος που εύκολα αναγνωρίζουμε στην καθημερινή ζωή. Ως μονάδα χρόνου κάποτε οριζόταν ένα κλάσμα της μέσης ηλιακής ημέρας. Η μονάδα του χρόνου είναι τώρα το *δευτερόλεπτο*. Ως μονάδα μάζας έχουμε το *χιλιόγραμμο*, κλπ.

Πάντως, με αυτούς τους ορισμούς κάποια βασικά μεγέθη της Φυσικής έχουν άβολες τιμές. Για παράδειγμα, η ταχύτητα του φωτός προκύπτει να έχει τη μεγάλη τιμή

$$c = 299\,792\,458\,\text{meters/sec} \approx 3 \times 10^8\,\text{m/sec}.$$

Υπάρχει ανάγκη να έχουμε ακριβείς ορισμούς για τις μονάδες μέτρησης. Για παράδειγμα, να είναι ακριβής ο ορισμός του δευτερολέπτου, αυτό ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να κάνει ενεργειακές μεταπτώσεις (για να κάνει 9 192 631 770 κύκλους) ένα άτομο καισίου. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται με μεγάλη ακρίβεια η μονάδα χρόνου.

Σε κάθε πρόβλημα βρισκόμαστε αντιμέτωποι με διαφορετικές κλίμακες μεγεθών. Ας δούμε παραδείγματα.

- Η ταχύτητα του φωτός είναι $c \approx 3 \times 10^8\,\text{m/sec} = 300\,000\,\text{km/sec}$.
- Ένα σωματίδιο ή ένα φιλμ από τα μικρότερα που μπορούν να κατασκευαστούν έχει διαστάσεις μερικών νανομέτρων (nm), δηλαδή, μερικών 10^{-9} m.
- Ένας σκληρός δίσκος έχει χωρητικότητα δεδομένων 500×10^9 byte/in^2 (σημειώστε ότι $1\,\text{inch} = 2.54\,\text{cm}$).
- Οι εγγραφές στη μνήμη ενός υπολογιστή γίνεται προσπάθεια να συμβαίνουν σε χρόνους picosecond (10^{-12} sec).

Έτσι βρισκόμαστε στην ανάγκη να ορίζουμε πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια των βασικών μονάδων. Ορίζουμε

kilo−	10^3	milli−	10^{-3}
mega−	10^6	micro−	10^{-6}
giga−	10^9	nano−	10^{-9}
tera−	10^{12}	pico−	10^{-12}.

Παράδειγμα 1.1.1. Η χωρητικότητα ενός συνηθισμένου σκληρού δίσκου μνήμης υπολογιστή είναι 10^{12} byte ή 1 Terabyte.

Παράδειγμα 1.1.2. (Μετατροπές μονάδων) Αυτοκίνητο έχει επιτύχει ταχύτητα 1228 km/h. Ποια είναι αυτή η ταχύτητα στις συνηθισμένες μονάδες της Φυσικής (σε m/sec);
Λύση.

$$1228\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \left(1228 \times 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{sec}}\right) = 341.1\,\text{m/sec}.$$

Παρατηρήστε ότι η δεύτερη παρένθεση (μετά την 1η ισότητα) είναι ίση με τη μονάδα, διότι $1\,\text{h} = 3600\,\text{sec}$. □

1.1.3 Διαστατική ανάλυση

Κάθε εξίσωση της Φυσικής είναι μία ισότητα μεταξύ αριθμών αλλά επίσης είναι και μία ισότητα μεταξύ φυσικών μεγεθών. Ειδικότερα, οι διαστάσεις αυτών των μεγεθών πρέπει να συνφωνούν. Για παράδειγμα, αν ένα σώμα έχει ταχύτητα v, τότε σε χρόνο t διανύει απόσταση d ίση με

$$d = vt.$$

Ώστε, αν υποθέσουμε τις τιμές $v = 2\,\mathrm{m/sec}$ και $t = 5\,\mathrm{sec}$ τότε το δεξιό μέλος της εξίσωσης δίνει $(2\,\mathrm{m/sec})(5\,\mathrm{sec}) = 10\,\mathrm{m} \Rightarrow d = 10\,\mathrm{m}$ και αυτό πραγματικά εκφράζει μήκος, όπως φαίνεται από τις μονάδες του αποτελέσματος.

Παράδειγμα 1.1.3. Δίνεται η εξίσωση $x = \frac{1}{2}at^2$. Ελέγξτε τις διαστάσεις αριστερού και δεξιού μέλους.
Λύση. Συμβολίζουμε με L την διάσταση του μήκους και με T την διάσταση του χρόνου. Βλέπουμε ότι το δεξιό μέλος της εξίσωσης έχει την ίδια διάσταση με το αριστερό,

$$\frac{L}{T^2} \cdot T^2 = L.$$

1.2 Κίνηση σε μία διάσταση

1.2.1 Θέση και ταχύτητα

Ας υποθέσουμε ότι ένα αυτοκίνητο κινείται σε έναν διάδρομο (αυτοκινητόδρομο, πίστα, κλπ). Για να περιγράψουμε την κίνησή του είναι βολικό να θεωρήσουμε ότι η θέση του βρίσκεται σε ένα σημείο. Αυτό σημαίνει ότι ουσιαστικά θα θεωρήσουμε ότι όλο το αυτοκίνητο βρίσκεται σε ένα σημείο. Το θεωρούμε, δηλαδή, ως *σημειακό σωμάτιο.* Το σημείο αυτό θα μπορούσε να είναι ένα αντιπροσωπευτικό σημείο του αυτοκινήτου. Για την περίπτωση αγώνων αυτοκινήτων, αυτό θα ήταν η μπροστινή άκρη του. Αυτή η περιγραφή δεν είναι πάντα καλή για ένα αυτοκίνητο, είναι όμως συνήθως επαρκής για την περίπτωση μικρότερων σωμάτων.

Παρατήρηση 1.2.1. *Αν σχεδιάσουμε μία ευθεία επάνω στην οποία κινείται το σωμάτιο, τότε κάθε σημείο παριστάνει μια δυνατή θέση του κινητού. Αν επιλέξουμε ένα δεδομένο σημείο O ως σημείο αναφοράς (σημείο μηδέν), τότε κάθε σημείο της ευθείας μπορεί να ορισθεί από την προσημασμένη απόστασή του από το O. Την απόσταση ονομάζουμε x και θέτουμε θετικό πρόσημο για τα σημεία δεξιά του O και αρνητικό πρόσημο για τα σημεία αριστερά του O.*

Αν το κινητό βρίσκεται στην θέση $x = x_1$ την χρονική στιγμή $t = t_1$ και στην θέση $x = x_2$ την χρονική στιγμή $t = t_2$, τότε διανύει απόσταση $\Delta x = x_2 - x_1$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$.

Ορίζουμε ως *μέση ταχύτητα* τον λόγο

$$v_\mu = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{1.2.1}$$

Π.χ., για $x_1 = 19\,\mathrm{m},\ x_2 = 277\,\mathrm{m}$ και $t_1 = 1\,\mathrm{sec},\ t_2 = 4\,\mathrm{sec}$ έχουμε

$$v_\mu = \frac{277\,\mathrm{m} - 19\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{sec} - 1\,\mathrm{sec}} = 86\,\mathrm{m/sec}.$$

Δείτε ότι αν εναλλάξουμε τις τιμές $x_1 = 277\,\mathrm{m},\ x_2 = 19\,\mathrm{m}$ τότε η ταχύτητα θα ήταν αρνητική $v_\mu = -86\,\mathrm{m/sec}$. Το πρόσημο της ταχύτητας μας λέει, κατά σύμβαση, εάν η κίνηση είναι προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά.

Έστω ότι για το κινητό που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο έχουμε την επιπλέον πληροφορία ότι βρίσκεται στην θέση $x = 119\,\mathrm{m}$ την χρονική στιγμή $t = 3\,\mathrm{sec}$. Αυτό δίνει ταχύτητα

$$v_\mu = \frac{119\,\mathrm{m} - 19\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{sec} - 1\,\mathrm{sec}} = 50\,\mathrm{m/sec}.$$

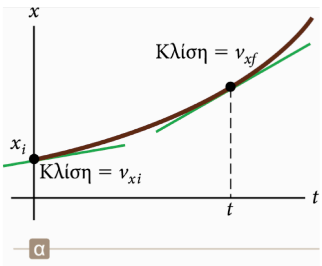
Μπορούμε επίσης να υπολογίζουμε ότι στο χρόνο $t = 3\,\mathrm{sec}$ έως $t = 4\,\mathrm{sec}$ η ταχύτητα είναι

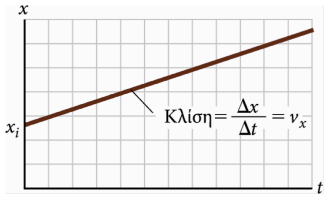
$$v_\mu = \frac{277\,\mathrm{m} - 119\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{sec} - 3\,\mathrm{sec}} = 158\,\mathrm{m/sec}.$$

Αν μετρήσουμε την θέση σε περισσότερες χρονικές στιγμές θα έχουμε πιο λεπτομερή καταγραφή της ταχύτητας και αυτή μπορεί να είναι διαφορετική σε κάθε χρονικό διάστημα. Για κάθε χρονικό διάστημα Δt το κινητό διανύει απόσταση Δx. Ειδικότερα, αν έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε μετρήσεις σε οσοδήποτε μικρά διαστήματα Δt τότε αυτά τα ονομάζουμε dt και τις αντίστοιχες μετατοπίσεις ονομάζουμε dx. Η ταχύτητα τότε είναι

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{1.2.2}$$

Μπορούμε να ορίσουμε την στιγμιαία ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή t και έχουμε $v = v(t)$.





Σχήμα 1.1: (Αριστερά) Η κλίση της εφαπτομένης δίνει την ταχύτητα. (Δεξιά) Όταν η ταχύτητα είναι σταθερή η $x = x(t)$ έχει σταθερή κλίση. (Πηγή: [5])

Παρατήρηση 1.2.2. *Η ταχύτητα δίνεται από την κλίση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της* $x = x(t)$.

Παράδειγμα 1.2.1. Σχεδιάστε την $x = x(t)$ για σωμάτιο με σταθερή ταχύτητα. (Δείτε Σχ. 1.1.)

Παράδειγμα 1.2.2. Οδηγείτε αγροτικό αυτοκίνητο σε δρόμο για 8.4 km με 70 km/h μέχρι που το αυτοκίνητο ξεμένει από καύσιμα και σταματά. Για τα επόμενα 30 min περπατάτε (με σταθερή ταχύτητα) 2 km μέχρι να φθάσετε στο επόμενο πρατήριο καυσίμων.

(α) Πόση είναι η συνολική σας μετατόπιση;
(β) Πόσο είναι το συνολικό χρονικό διάστημα Δt κατά το οποίο κινηθήκατε;
(γ) Πόση ήταν η στιγμιαία και η μέση ταχύτητά σας;

Λύση. (α) $\Delta x = 8.4\,\mathrm{km} + 2\,\mathrm{km} = 10.4\,\mathrm{km}$

(β) $\Delta t = \Delta x / v$. Άρα

$$\Delta t = \frac{8.4\,\mathrm{km}}{70\,\mathrm{km/h}} + 30\,\mathrm{min} = 0.12\,\mathrm{h} + 0.5\,\mathrm{h} = 0.62\,\mathrm{h} \quad (= 37.2\,\mathrm{min}).$$

(γ) Μέση ταχύτητα

$$v_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10.4\,\mathrm{km}}{0.62\,\mathrm{h}} = 16.8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Στιγμιαία ταχύτητα (δώστε σχήμα $x = x(t)$)

$$v = 70\,\mathrm{km/h}, \qquad v = \frac{2\,\mathrm{km}}{30\,\mathrm{min}} = 4\,\mathrm{km/h}.$$

Παρατήρηση 1.2.3. *Το πρόσημο της ταχύτητας δίνει την κατεύθυνση της κίνησης. Το μέτρο της ταχύτητας χρησιμοποιείται όταν μας ενδιαφέρει η μεταβολή της θέσης με τον χρόνο και όχι η κατεύθυνση της κίνησης.*

1.2.2 Επιτάχυνση

Η μεταβολή της ταχύτητας μετράται από τον λόγο

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{1.2.3}$$

όπου η ταχύτητα είναι v_1 στον χρόνο t_1 και v_2 στον χρόνο t_2. Την παραπάνω ονομάζουμε *μέση επιτάχυνση*.

Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1.2.4}$$

και, βέβαια, μπορεί να είναι συνάρτηση του χρόνου $a = a(t)$. Η επιτάχυνση είναι ένα σημαντικό φυσικό μέγεθος, πράγμα που το αντιλαμβάνεται κανείς όταν ξεκινάει ένα τρένο από την ακινησία μέχρι τη μέγιστη ταχύτητά του, όταν ξεκινάει ένα ασανσέρ, κλπ.

Βλέπουμε ότι η επιτάχυνση είναι η δεύτερη παράγωγος της θέσης ως προς χρόνο,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{1.2.5}$$

Παράδειγμα 1.2.3. Έστω η θέση ενός σωματίου η οποία δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = 4 - 27t + t^3.$$

Η ταχύτητά του είναι

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -27 + 3t^2.$$

Η επιτάχυνσή του είναι

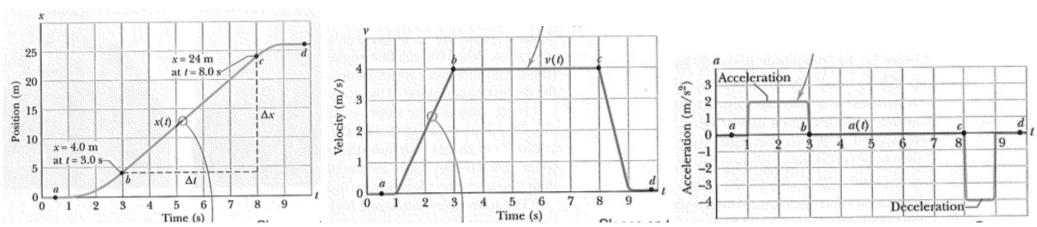
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t.\square$$

Παρατήρηση 1.2.4. *Το πρόσημο της επιτάχυνσης δεν μας λέει από μόνο του αν το σώμα επιταχύνεται ή επιβραδύνεται. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να συγκρίνουμε τα πρόσημα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.*

Παράδειγμα 1.2.4. Ένα αεροπλάνο προσγειώνεται σε αεροπλανοφόρο με ταχύτητα μέτρου $64\,\mathrm{m/s}$. Ποια είναι η επιτάχυνση του αεροσκάφους αν το συρματόσχοινο προσνήωσης στο οποίο γατζώνεται το ακινητοποιεί μέσα σε $2.0\,\mathrm{s}$; [Θα υποθέσουμε ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή.]
Λύση. Μοντελοποιούμε το αεροπλάνο ως κινούμενο σωμάτιο. Θεωρούμε ότι έχει σταθερή επιτάχυνση. Γνωρίζουμε την αρχική ταχύτητα $v_i = 63\,\mathrm{m/s}$ και την τελική $v_f = 0\,\mathrm{m/s}$ και τον χρόνο που κινείται $t = 2.0\,\mathrm{s}$. Έχουμε την επιτάχυνση

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{(0-64)\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{s}} = -32\,\mathrm{m/s^2}.$$

Παράδειγμα 1.2.5. Στο σχήμα 1.2 αριστερά δίνεται η θέση σωματίου $x = x(t)$. Η κλίση της καμπύλης είναι αρχικά μηδέν, μετά περίπου σταθερή και τελικά πάλι μηδέν. Η κλίση δίνει την ταχύτητα του κινητού, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο μεσαίο σχήμα. Η επιτάχυνση του κινητού (η οποία είναι η κλίση της ταχύτητας) δίνεται στο δεξιό σχήμα. Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση είναι μη-μηδενική στα σημεία που μεταβάλλεται η ταχύτητα.



Σχήμα 1.2: Θέση (αριστερά), ταχύτητα (κέντρο) και επιτάχυνση (δεξιά) σαν συνάρτηση του χρόνου για ένα κινητό. (Πηγή: [4] σελ 19.)

Ταχύτητα και θέση οι οποίες δίνουν σταθερή επιτάχυνση

Έστω ότι η επιτάχυνση ενός σωματίου είναι σταθερή. Αυτό επιτυγχάνεται αν η ταχύτητά του είναι

$$v = v_0 + a_0\,t, \tag{1.2.6}$$

όπου v_0, a_0 είναι σταθερές. Βλέπουμε τότε πραγματικά ότι

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = a_0.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η μέση επιτάχυνση είναι

$$a_\mu = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_0 + a_0 t_2) - (v_0 + a_0 t_1)}{t_2 - t_1} = a_0,$$

δηλαδή είναι σταθερή και ίση με την στιγμιαία επιτάχυνση.

Η θέση του σωματίου δίνεται από

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2, \qquad x_0 : \text{σταθερά}. \tag{1.2.7}$$

Πραγματικά, έχουμε

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t. \tag{1.2.8}$$

Η σταθερά v_0 δίνει την v για $t = 0$, δηλ., $v(t = 0) = v_0$.

Σταθερή επιτάχυνση: εύρεση ταχύτητας και θέσης

Αν η επιτάχυνση είναι σταθερή (a_0) τότε έχουμε

$$a_0 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a_0\, dt.$$

Αν υποθέσουμε ότι ένα κινητό αρχίζει (τη στιγμή $t = 0$) με κάποια αρχική ταχύτητα v_0 και επιταχύνεται με την επιτάχυνση a_0 τότε θα έχει ταχύτητα έστω v σε κάποια χρονική στιγμή t. Την v θα τη βρούμε προσθέτοντας τις μεταβολές ταχύτητας dv για κάθε χρονικό διάστημα dt. Αυτό γίνεται με το ολοκλήρωμα

$$\int dv = \int a_0\, dt \Rightarrow \int dv = a_0 \int dt \Rightarrow v = a_0 t + C.$$

Εφόσον ζητάμε $v(t = 0) = v_0$ πρέπει η σταθερά C που εμφανίστηκε στην ολοκλήρωση να είναι $C = v_0$. Έχουμε λοιπόν βρει ότι αν η επιτάχυνση σώματος a_0 είναι σταθερή αυτό έχει ταχύτητα

$$v(t) = v_0 + a_0 t. \tag{1.2.9}$$

Για την θέση x του σώματος έχουμε

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\, dt \Rightarrow \int dx = \int v\, dt \Rightarrow \int dx = \int (v_0 + a_0 t) dt.$$

Το τελευταίο είναι άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων:

$$\int dx = v_0 \int dt + a_0 \int t\, dt \Rightarrow x = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + C'.$$

Η σταθερά C' που προκύπτει από την ολοκλήρωση δίνει την θέση $x(t = 0)$. Ας υποθέσουμε ότι αυτή η αρχική θέση είναι x_0 οπότε $C' = x_0$. Έχουμε λοιπόν βρει ότι αν η επιτάχυνση σώματος a_0 είναι σταθερή η θέση του δίνεται από

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2. \tag{1.2.10}$$

Παράδειγμα 1.2.6. Μπορούμε να βρούμε τις $x(t), v(t)$ χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα:

$$\int_{v_0}^{v} dv' = a_0 \int_0^t dt' \Rightarrow v - v_0 = a_0 t \Rightarrow v = v_0 + a_0 t.$$

και

$$\int_{x_0}^{x} dx' = v_0 \int_0^t dt' + a_0 \int_0^t t'\, dt' \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2.$$

1.2.3 Σχετική ταχύτητα

Η ταχύτητα με την οποία κινείται έναν κινητό έχει νόημα να μετρηθεί μόνο σε σχέση με ένα άλλο σώμα. Για παράδειγμα, όλα όσα βλέπουμε ακίνητα γύρω μας θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι κινούνται με την ταχύτητα που κινείται η Γη.

Παράδειγμα 1.2.7. Έστω ότι βρισκόμαστε σε αυτοκίνητο που τρέχει με $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$, ενώ ένα άλλο αυτοκίνητο κοντά μας κινείται με $v_2 = 100\,\mathrm{km/h}$. Με τι ρυθμό βλέπουμε να αλλάζει θέση το 2ο αυτοκίνητο ως προς τη δική μας θέση;
Λύση. Η δική μας θέση είναι $x_1 = x_{1,0}+v_1 t$, ενώ η θέση του άλλου αυτοκινήτου είναι $x_2 = x_{2,0}+v_2 t$. Η θέση του 2ου αυτοκινήτου ως προς την δική μας είναι

$$x_2 - x_1 = x_{2,0} - x_{1,0} + (v_2 - v_1)t \Rightarrow \Delta x = \Delta x_0 + vt,$$

όπου Δx η απόσταση του 2ου από το δικό μας αυτοκίνητο και

$$v = v_2 - v_1 \tag{1.2.11}$$

η σχετική ταχύτητα του άλλου αυτοκινήτου ως προς το δικό μας (δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της σχετικής θέσης του) και $\Delta x_0 = x_{2,0} - x_{1,0}$ η διαφορά των θέσεών μας για $t = 0$. □

Παρατήρηση 1.2.5. *Για να μετρήσουμε ταχύτητες θεωρούμε την ύπαρξη ενός συστήματος αναφοράς και μετράμε ταχύτητες σωμάτων ως προς αυτό το σύστημα. Κάθε άλλο σύστημα το οποίο κινείται ευθύγραμμα, με σταθερή ταχύτητα, ως προς σύστημα αναφοράς μπορεί επίσης να χρησιμεύσει ως σύστημα αναφοράς. Όλα αυτά τα συστήματα λέγονται αδρανειακά συστήματα αναφοράς.*

Δείτε ότι η επιτάχυνση σώματος δεν εξαρτάται από το επιλεγόμενο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι το δεύτερο αυτοκίνητο του προηγουμένου παραδείγματος επιταχύνει με μία επιτάχυνση a. Τότε η θέση του δίνεται από την $x_2 = x_{2,0}+v_2 t+a_2 t^2/2$ και θα έχουμε ότι η θέση του ως προς το πρώτο αυτοκίνητο είναι $\Delta x = x_2 - x_1 = x_{2,0} - x_{1,0} + (v_2 - v_1)t + a_2 t^2/2$. Η επιτάχυνσή του θα είναι ίδια ως προς το έδαφος όπως και ως προς το δικό μας αυτοκίνητο, διότι

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = a_2, \qquad \frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = a_2. \tag{1.2.12}$$

Δεν είναι όλα τα συστήματα αδρανειακά. Για να το δούμε αυτό ας πάρουμε ένα αδρανειακό σύστημα και ένα άλλο το οποίο επιταχύνεται ως προς το αδρανειακό. Τότε η επιτάχυνση ενός κινητού είναι διαφορετική στο αδρανειακό από ότι στο επιταχυνόμενο σύστημα. Π.χ., ένα σώμα που είναι ακίνητο ως προς το αδρανειακό σύστημα βλέπουμε να επιταχύνεται στο μη-αδρανειακό σύστημα.

1.3 Κίνηση σε δύο και τρεις διαστάσεις

1.3.1 Θέση και μετατόπιση

Η θέση σωματίου δίνεται από ένα διάνυσμα

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}, \tag{1.3.1}$$

όπου $x\hat{\imath}, y\hat{\jmath}, z\hat{k}$ είναι οι συνιστώσες του $\vec{r}$, ενώ οι x, y, z λέγονται συντεταγμένες του. Το $\vec{r}$ λέγεται *διάνυσμα θέσης*. Βλέπουμε ότι οι x, y, z είναι αρκετές για να προσδιορίσουμε την θέση του σωματίου.

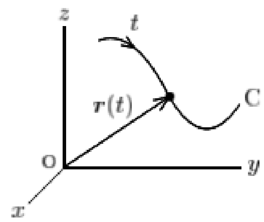
Έστω ότι ένα σώμα είναι σε μία χρονική στιγμή t_1 στην θέση $\vec{r}_1$ και σε ακόλουθη στιγμή t_2 στην θέση $\vec{r}_2$ (σχήμα). Παρατηρούμε ότι έχει μετατοπιστεί κατά διάνυσμα

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{1.3.2}$$

Αυτό γράφεται και ως

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Delta r} &= (x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k} \\ &= \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} + \Delta z\,\hat{k}.\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Παρατήρηση 1.3.1. *Οι διαδοχικές θέσεις κινούμενου σωματίου διαγράφουν την τροχιά του, δηλαδή μία καμπύλη στο χώρο. Αυτή ξεκινά από σημείο $\vec{r}_1$ σε χρονική στιγμή t_1 και καταλήγει σε σημείο $\vec{r}_2$ σε χρονική στιγμή t_2. Η τυχούσα θέση στην τροχιά γράφεται $\vec{r}(t)$, όπως στο σχήμα 1.3.*



Σχήμα 1.3: Η τροχιά $\vec{r}(t)$ σωματίου στον χώρο.

Παράδειγμα 1.3.1. Ένα κουνέλι τρέχει μέσα σε ένα πάρκινγκ στο οποίο έχουμε σχεδιάσει ένα σύστημα συντεταγμένων. Οι συντεταγμένες του δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}x(t) &= -0.3t^2 + 7.2t + 28 \\ y(t) &= 0.2t^2 - 9.1t + 30\end{aligned}$$

όπου t είναι η χρονική στιγμή. (α) Σε ποια θέση βρίσκεται τη στιγμή $t = 10$, (β) σε ποια θέση τη στιγμή $t = 20$, (γ) ποια είναι η μετατόπισή του από τη στιγμή $t = 10$ μέχρι $t = 20$.
Λύση. (α) $\vec{r}_1 = 70\hat{\imath} - 41\hat{\jmath}$ (β) $\vec{r}_2 = 52\hat{\imath} - 72\hat{\jmath}$ (γ) $\overrightarrow{\Delta r} = -18\hat{\imath} - 31\hat{\jmath}$. □

1.3.2 Ταχύτητα

Έχουμε ήδη δει τον ορισμό της μέσης ταχύτητας

$$\text{μέση ταχύτητα} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρονικό διάστημα}}.$$

Αν τον εφαρμόσουμε για μετατόπιση από θέση που δίνεται από διάνυσμα $\vec{r}_1$ (σε χρόνο t_1) σε $\vec{r}_2$ (για t_2) έχουμε

$$\vec{v}_\mu = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}, \qquad \overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1.$$

Παρατήρηση 1.3.2. *Η ταχύτητα είναι διάνυσμα με διεύθυνση ίδια με τη μετατόπιση.*

Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$\vec{v}_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}.$$

Παράδειγμα 1.3.2. Για $\overrightarrow{\Delta r} = (-18\,\mathrm{m})\,\hat{\imath} + (-31\,\mathrm{m})\,\hat{\jmath}$ και $\Delta t = 10\,\mathrm{sec}$ (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα), έχουμε μέση ταχύτητα

$$\vec{v}_\mu = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = (-1.8\,\mathrm{m/sec})\,\hat{\imath} + (-3.1\,\mathrm{m/sec})\,\hat{\jmath}.$$

Ας θεωρήσουμε την τροχιά σωματίου και ένα οποιοδήποτε σημείο της $\vec{r}_1$ για μία στιγμή t_1. Μπορούμε να πάρουμε έναν χρόνο t_2 κοντά στο t_1 και άρα το $\Delta t = t_2 - t_1$ οσοδήποτε μικρό (dt). Τότε έχουμε σε κάθε σημείο της τροχιάς $\vec{r}_1$ το διάνυσμα της *στιγμιαίας ταχύτητας*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Παρατήρηση 1.3.3. *Το διάνυσμα της ταχύτητας δείχνει προς την διεύθυνση κίνησης σε κάθε σημείο της τροχιάς. Επίσης, παρατηρούμε ότι εφάπτεται της τροχιάς σε κάθε σημείο της, ώστε λέμε ότι έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στην καμπύλη, δηλαδή στην τροχιά (φτιάξτε ένα σχετικό σχήμα).*

Το διάνυσμα της ταχύτητας

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \tag{1.3.4}$$

έχει συνιστώσες

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.3.5}$$

Παράδειγμα 1.3.3. Βρείτε την ταχύτητα του παραδείγματος με το κουνέλι. □

Παράδειγμα 1.3.4. Έστω μία κυκλική τροχιά σωματίου. Αν η στιγμιαία ταχύτητα του σωματίου είναι $\vec{v} = (2\,\mathrm{m/s})\hat{\imath} - (2\,\mathrm{m/s})\hat{\jmath}$, σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σωμάτιο τη δεδομένη χρονική στιγμή; Θεωρήστε ότι το σωμάτιο κινείται (α) αριστερόστροφα, (β) δεξιόστροφα.
Λύση. Σχεδιάζουμε την κυκλική τροχιά και τοποθετούμε το διάνυσμα $\vec{v}$ ώστε να είναι εφαπτόμενο στην τροχιά. (α) Το σωμάτιο βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο. (β) Το σωμάτιο βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο. □

1.3.3 Επιτάχυνση

Έστω σωματίδιο με ταχύτητα v_1 τη χρονική στιγμή t_1 και v_2 τη χρονική στιγμή t_2. Ορίζουμε

$$\text{μέση επιτάχυνση} = \frac{\text{μεταβολή ταχύτητας}}{\text{χρονικό διάστημα}},$$

συμβολικά

$$\vec{a}_\mu = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.3.6}$$

Η *στιγμιαία επιτάχυνση* ορίζεται ως

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{1.3.7}$$

Παρατήρηση 1.3.4. *Είτε μεταβάλλεται το μέτρο είτε η κατεύθυνση της ταχύτητας, αυτό συμβαίνει ως αποτέλεσμα μίας μη-μηδενικής επιτάχυνσης.*

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \tag{1.3.8}$$

έχει συνιστώσες

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{1.3.9}$$

Παράδειγμα 1.3.5. Βρείτε την επιτάχυνση του παραδείγματος με το κουνέλι. □

1.3.4 Σταθερή επιτάχυνση

Ας θεωρήσουμε κίνηση σε δύο διαστάσεις με επιτάχυνση $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$, ώστε έχουμε

$$a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}. \tag{1.3.10}$$

Αν οι a_x, a_y είναι σταθερές, τότε οι δύο παραπάνω εξισώσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και περιγράφουν κινήσεις με σταθερή επιτάχυνση ξεχωριστά στους δύο άξονες.

Παρατήρηση 1.3.5. *Αν η επιτάχυνση είναι σταθερή, η κίνηση σε δύο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δύο ανεξάρτητες κινήσεις σε κάθε μία από τις δύο κάθετες διευθύνσεις των αξόνων x και y. Οποιαδήποτε επίδραση στην κίνηση κατά τον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση κατά τον άλλον άξονα.*

Βρίσκουμε την ταχύτητα

$$\begin{cases} v_x(t) &= v_{x,0} + a_x t \\ v_y(t) &= v_{y,0} + a_y t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t. \tag{1.3.11}$$

Μπορούμε να βρούμε την θέση λύνοντας τις εξισώσεις (1.3.10) ανεξάρτητα στους δύο άξονες

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t) &= y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \tag{1.3.12}$$

Παράδειγμα 1.3.6. Έστω σώμα το οποίο κινείται σε δύο διαστάσεις και έχει επιτάχυνση $\vec{a} = (4\,\mathrm{m/sec^2})\,\hat{\imath}$. Ποια είναι η ταχύτητα $\vec{v}(t)$ και η θέση του $\vec{r}(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$, αν η αρχική θέση του ήταν $\vec{r}(t=0) = 0$ και η αρχική του ταχύτητα $\vec{v}(t=0) = (20\,\mathrm{m/sec})\hat{\imath} + (-15\,\mathrm{m/sec})\hat{\jmath}$.
Λύση. Η ταχύτητα είναι

$$\vec{v}(t) = (20 + 4t)\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}.$$

Η θέση είναι

$$\vec{r}(t) = (20t + 2t^2)\hat{\imath} - 15t\hat{\jmath}.$$

Παράδειγμα 1.3.7. Από την ταράτσα ενός κτηρίου, σε ύψος $h = 45.0\,\mathrm{m}$ κάποιος ρίχνει μία πέτρα προς τα επάνω υπό γωνία $\theta = 30.0^o$ ως προς την οριζόντιο με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = 20.0\,\mathrm{m/s}$. (α) Βρείτε την ταχύτητα της πέτρας σαν συνάρτηση του χρόνου. (β) Πόσο χρόνο χρειάζεται η πέτρα για να φθάσει στο έδαφος; [Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $-10\,\mathrm{m/s^2}$.]
Λύση. (α) Οι συνιστώσες της αρχικής ταχύτητας είναι $v_{x,0} = v_0\cos\theta = 17.3\,\mathrm{m/s}$, $v_{y,0} = v_0\sin\theta = 10.0\,\mathrm{m/s}$. Η επιτάχυνση, λόγω βαρύτητας, έχει συνιστώσες $a_x = 0$, $a_y = -10\,\mathrm{m/s^2}$. Έχουμε

$$\begin{cases} v_x(t) &= v_{x,0} \\ v_y(t) &= v_{y,0} + a_y t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) &= 17.3\,\mathrm{m/s} \\ v_y(t) &= (10.0 - 10.0t)\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

όπου το t θεωρείται απλώς ως αριθμητική τιμή (χωρίς μονάδες).

(β) Η πέτρα θα πέσει στο έδαφος όταν $y = -h = -45.0\,\mathrm{m}$. Ο χρόνος που ζητάται προσδιορίζεται από την

$$-h = v_{y,0}\,t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow t = 4.16\,\mathrm{s}.$$

Χρησιμοποιήσαμε $a_y = -10\,\mathrm{m/s^2}$.

1.3.5 Κίνηση σε πολικές συντεταγμένες

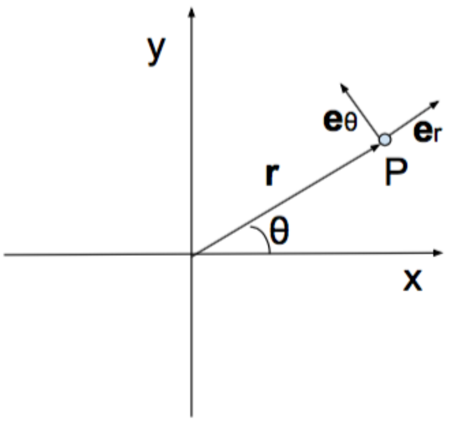
Οι πολικές συντεταγμένες για ένα σημείο P του επιπέδου είναι (ρ, θ) και ορίζονται από τις

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta. \tag{1.3.13}$$

Ώστε, η θέση ενός σημείο P του επιπέδου δίνεται από διάνυσμα

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath}. \tag{1.3.14}$$

Παρατήρηση 1.3.6. *Η παραμετρική έκφραση μίας καμπύλης στο επίπεδο δίνεται από εκφράσεις $r = r(t), \theta = \theta(t)$. Φυσικά, μπορεί κανείς να απαλείψει την παράμετρο t και να πάρει έκφραση καμπύλης στην μορφή $r = r(\theta)$.*



Σχήμα 1.4: Οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) ενός σημείου P του επιπέδου. Το διάνυσμα θέσης του είναι $\vec{r}$ (λείπει το βελάκι στο σχήμα). Τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος συντεταγμένων που ορίζονται στο P είναι $\hat{e}_\mathrm{r}, \hat{e}_\theta$.

Σε κάθε σημείο P του επιπέδου ορίζουμε δύο κάθετα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_\mathrm{r}, \hat{e}_\theta$, δηλαδή ορίζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Το $\hat{e}_\mathrm{r}$ ορίζεται ώστε να έχει την ακτινική διεύθυνση (δηλαδή αυτή του διανύσματος $\vec{r}$) ενώ το $\hat{e}_\theta$ είναι κάθετο σε αυτή. Η θέση ενός κινητού στο σημείο P δίνεται ως

$$\vec{r} = r\hat{e}_\mathrm{r} \tag{1.3.15}$$

όπου r είναι το μέτρο του $\vec{r}$, δηλαδή η απόσταση του P από την αρχή των αξόνων. Για να προχωρήσουμε σε υπολογισμούς είναι απαραίτητο να έχουμε εκφράσεις για τα $\hat{e}_\mathrm{r}, \hat{e}_\theta$ σε κάθε σημείο του επιπέδου. Αυτές είναι

$$\hat{e}_\mathrm{r} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath} \qquad \hat{e}_\theta = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}. \tag{1.3.16}$$

Παρατηρήστε ότι το $\hat{e}_\mathrm{r}$ έχει την διεύθυνση του $\vec{r}$ και μέτρο μονάδα (είναι $\hat{e}_\mathrm{r} = \vec{r}/r$). Το $\hat{e}_\theta$ είναι κάθετο στο $\hat{e}_\mathrm{r}$, αφού $\hat{e}_\mathrm{r} \cdot \hat{e}_\theta = 0$, και έχει επίσης μέτρο μονάδα.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κινητό το οποίο κινείται σε καμπύλη τροχιά $(r(t), \theta(t))$ τα $\hat{e}_\mathrm{r}, \hat{e}_\theta$ μεταβάλλονται συνεχώς. Οι παράγωγοί τους δίνονται από

$$\frac{d\hat{e}_\mathrm{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}) = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\hat{\imath} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\hat{\jmath} \Rightarrow \frac{d\hat{e}_\mathrm{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{e}_\theta. \tag{1.3.17}$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\hat{e}_\mathrm{r}. \tag{1.3.18}$$

Η ταχύτητά του είναι

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_\mathrm{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{e}_\mathrm{r} + r\frac{d\hat{e}_\mathrm{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_\mathrm{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta. \tag{1.3.19}$$

Πραγωγίζοντας την ταχύτητα μπορούμε να βρούμε τον γενικό τύπο για την επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{e}_\mathrm{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta\right) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{e}_\mathrm{r} + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{e}_\theta. \tag{1.3.20}$$

1.3.6 Ομαλή κυκλική κίνηση

Θεωρούμε ένα σωμάτιο το οποίο κινείται επάνω σε κύκλο ακτίνας r με ταχύτητα v. Ξέρουμε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο στην τροχιά του σωματίου, δηλαδή το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο στον κύκλο (φτιάξτε σχήμα). Τα σημεία του κύκλου έχουν συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{1.3.21}$$

όπου θ η γωνία της ακτίνας $\vec{r}$ με τον οριζόντιο άξονα. Μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω ως

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_\mathrm{r}, \qquad \hat{e}_\mathrm{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \tag{1.3.22}$$

όπου η ακτίνα r είναι σταθερά.

Η ταχύτητα είναι εφαπτομενική στην τροχιά και άρα κάθετη στην ακτίνα $\vec{r}$. Αν το μέτρο της είναι v τότε είναι

$$\vec{v} = v\,\hat{e}_\theta, \qquad \hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}. \tag{1.3.23}$$

Παρατήρηση 1.3.7. *Όταν το κινητό διαγράφει τόξο, έστω Δs, στον κύκλο τότε η πολική γωνία μεταβάλλεται κατά $\Delta\theta$, όπου $\Delta s = r\Delta\theta$. Από αυτήν την σχέση παίρνουμε*

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}. \tag{1.3.24}$$

Ορίζουμε την γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{1.3.25}$$

και έχουμε

$$v = r\omega. \tag{1.3.26}$$

Ας θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο v, οπότε λέμε ότι το σωμάτιο κάνει *ομαλή κυκλική κίνηση*. Μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση παίρνοντας την παράγωγο της ταχύτητας

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(v\,\hat{e}_\theta) = v\,\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -v\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\mathrm{r}. \tag{1.3.27}$$

Από τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας (1.3.25) και την (1.3.26) έχουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{e}_\mathrm{r}. \tag{1.3.28}$$

Άρα η επιτάχυνση (είναι, βέβαια, μη-μηδενική και) έχει τη διεύθυνση της ακτίνας, αλλά αντίθετη φορά. Λέγεται *κεντρομόλος επιτάχυνση*.

1.3.7 Γενική κυκλική κίνηση

Μπορούμε να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα για την περίπτωση που το μέτρο της ταχύτητας v δεν είναι σταθερό. Η επιτάχυνση προκύπτει ως

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = v\,\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \frac{dv}{dt}\,\hat{e}_\theta \\ \Rightarrow \vec{a} &= -\frac{v^2}{r}\,\hat{e}_\mathrm{r} + \frac{dv}{dt}\,\hat{e}_\theta. \end{aligned} \tag{1.3.29}$$

Ώστε η επιτάχυνση έχει γραφεί ως άθροισμα δύο συνιστωσών:

$$\vec{a} = a_r\,\hat{e}_\mathrm{r} + a_t\,\hat{e}_\theta, \qquad a_r = -\frac{v^2}{r}, \quad a_t = \frac{dv}{dt}, \tag{1.3.30}$$

οι οποίες λέγονται *κεντρομόλος* (a_r) και *επιτρόχιος* (a_t) επιτάχυνση.

1.3.8 Καμπυλόγραμμη κίνηση

Παρατήρηση 1.3.8. *Για μία καμπυλόγραμμη κίνηση στο επίπεδο η επιτάχυνση έχει δύο συνιστώσες, την κεντρομόλο και την επιτρόχιο. Θεωρώντας κύκλο με ακτίνα καμπυλότητας αυτήν της καμπύλης (σε τυχόν σημείο της) η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει διεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου και η επιτρόχιος προς την εφαπτομένη του.*

Παράδειγμα 1.3.8. Αυτοκίνητο αρχίζει να κινείται με επιτάχυνση $a_1 = 0.3\,\mathrm{m/sec^2}$. Το αυτοκίνητο περνάει από ύψωμα του δρόμου το οποίο στην κορυφή του έχει κυκλικό σχήμα με ακτίνα $R = 500\,\mathrm{m}$. Όταν το αυτοκίνητο βρίσκεται στην κορυφή του υψώματος το διάνυσμα της ταχύτητάς του έχει μέτρο $v = 6\,\mathrm{m/sec}$. Ποιο το μέτρο και η κατεύθυνση του διανύσματος της συνολικής επιτάχυνσης του αυτοκινήτου εκείνη την χρονική στιγμή.
Λύση. Κεντρομόλος

$$a_r = -\frac{v^2}{R} = -\frac{(6\,\mathrm{m/sec})^2}{500\,\mathrm{m}} = -0.072\,\mathrm{m/sec^2}.$$

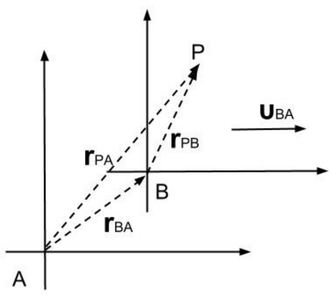
Επιτρόχιος

$$a_t = a_1 = 0.3\,\mathrm{m/sec^2}.$$

Μέτρο επιτάχυνσης

$$\sqrt{a_r^2 + a_t^2} = 0.309\,\mathrm{m/sec^2}.$$

1.3.9 Σχετική κίνηση σε δύο διαστάσεις



Σχήμα 1.5: Το σύστημα με αρχή B κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{BA}$ ως προς το σύστημα με αρχή το A.

Έστω σύστημα αναφοράς με αρχή A και άλλο σύστημα με αρχή B. Το 2ο σύστημα κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{BA}$ ως προς το 1ο. Η θέση σώματος P ως προς το σύστημα A δίνεται από διάνυσμα $\vec{r}_{PA}$ ενώ η θέση του P ως προς το B δίνεται από διάνυσμα $\vec{r}_{PB}$, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.5. Ισχύει

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}, \tag{1.3.31}$$

όπου $\vec{r}_{BA}$ η θέση του B ως προς A. Μπορούμε να γράψουμε τη σχέση αυτή στη μορφή

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{v}_{BA}t + \vec{r}_0, \tag{1.3.32}$$

όπου $\vec{v}_{BA}$ η ταχύτητα του B ως προς A και $\vec{r}_0$ η θέση του B ως προς το A την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση για τις θέσεις βρίσκουμε τη σχέση για τις ταχύτητες

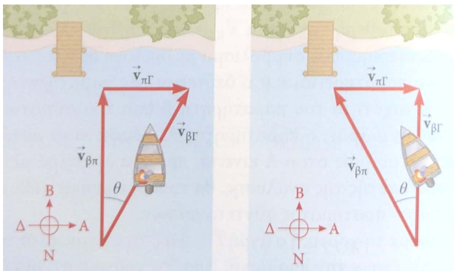
$$\vec{u}_{PA} = \vec{u}_{PB} + \vec{v}_{BA}. \tag{1.3.33}$$

Αυτές λέγονται *εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου.*

Υποθέτουμε ότι $\vec{v}_{BA}$ σταθερή και παραγωγίζοντας βρίσκουμε για τις επιταχύνσεις

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \tag{1.3.34}$$

Παράδειγμα 1.3.9. Βάρκα που διασχίζει ένα πλατύ ποτάμι κινείται με ταχύτητα μέτρου $\vec{v}_{\beta\pi} = 10\,\mathrm{km/h}$ σε σχέση με το νερό. Το νερό του ποταμού κυλάει ανατολικά με ταχύτητα σταθερού μέτρου $\vec{v}_{\pi\Gamma} = 5\,\mathrm{km/h}$ σε σχέση με την Γη. Αν η βάρκα κινείται βόρεια προσδιορίστε την ταχύτητα της βάρκας σε σχέση με παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται σε μία από τις όχθες της.



Σχήμα 1.6: (Πηγή: [2])

Λύση. Θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα της βάρκας ως προς την Γη:

$$\vec{v}_{\beta\Gamma} = \vec{v}_{\beta\pi} + \vec{v}_{\pi\Gamma} = \ldots$$

Το μέτρο της είναι

$$v_{\beta\Gamma} = \sqrt{10^2 + 5^2}\,\mathrm{km/h} = 11.2\,\mathrm{km/h}.$$

Κεφάλαιο 2

Δυνάμεις

2.1 Νόμοι της κίνησης

2.1.1 1ος νόμος του Νεύτωνα και δύναμη

Παρατήρηση 2.1.1. *Αν ένα σώμα δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα (δεν του ασκείται καμμία δύναμη) τότε η ταχύτητα του σώματος δεν μεταβάλλεται, δηλαδή το σώμα δεν επιταχύνεται. Ειδικότερα, μπορούμε να ορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το σώμα έχει μηδενική επιτάχυνση.*

Ο νόμος αυτός εισάγει την εικόνα ότι τα απομονωμένα σώματα (τα οποία δεν δέχονται επιδράσεις) μπορούν να κινούνται με σταθερή ταχύτητα.

Με βάση πειραματικές παρατηρήσεις γνωρίζουμε ότι οι δυνάμεις συμπεριφέρονται ως διανύσματα, δηλαδή, όταν ασκούνται περισσότερες από μία δυνάμεις σε ένα σώμα τότε στο σώμα επιδρά η συνισταμένη τους. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί σε γενίκευση της προηγούμενης παρατήρησης και έχουμε τον εής νόμο.

Παρατήρηση 2.1.2. (1ος νόμος του Νεύτωνα) *Αν σε ένα σώμα δεν ασκείται συνισταμένη δύναμη τότε η ταχύτητα του σώματος δεν μπορεί να μεταβληθεί, δηλαδή το σώμα δεν επιταχύνεται.*

Ο νόμος του Νεύτωνα ισχύει σε αδρανειακά συστήματα. Συνέπεια μάλιστα αυτού είναι ότι ο νόμος του Νεύτωνα δεν μπορεί να ισχύει σε ένα μη-αδρανειακό σύστημα.

Παρατήρηση 2.1.3. *Αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι αυτό στο οποίο ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα.*

Μία ακόμα διατύπωση του πρώτου νόμου του Νεύτωνα είναι η εξής.

Παρατήρηση 2.1.4. *Αν δεν υπάρχει συνισταμένη δύναμη και οι παρατηρήσεις γίνονται από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ένα ακίνητο σώμα θα παραμείνει σε ηρεμία και ένα σώμα που κινείται θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα (σε διεύθυνση και μέτρο).*

2.1.2 2ος νόμος του Νεύτωνα

Θα υποθέσουμε ότι μία δύναμη δρα ώστε να επιταχύνει ένα σώμα (αυτή την υπόθεση είμαστε ουσιαστικά υποχρεωμένοι να την κάνουμε ώστε να έχει νόημα ο 1ος νόμος). Η επιτάχυνση που επιτυγχάνει μία δύναμη όταν ασκείται σε ένα σώμα εξαρτάται από το σώμα. Θα προσδώσουμε σε κάθε σώμα την ιδιότητα ότι έχει μία *μάζα* m.

Παρατήρηση 2.1.5. *Μάζα είναι η ιδιότητα ενός σώματος η οποία καθορίζει πόση αντίσταση προβάλλει* *το σώμα στις μεταβολές της ταχύτητας.*

Σε κάποιο πρότυπο σώμα ασκούμε μία δεδομένη δύναμη $F = 1\,\mathrm{N}$ και παρατηρούμε ότι αυτή προκαλεί επιτάχυνση $a_0 = 1\,\mathrm{m/sec}^2$. Ας συμβολίσουμε την μάζα αυτού του σώματος με m_0. Ξέρουμε από πείρα ότι σε ένα μεγαλύτερο σώμα η ίδια δύναμη θα προκαλούσε μικρότερη επιτάχυνση a. Ορίζουμε την μάζα m του δεύτερου σώματος έτσι ώστε ο λόγος των επιταχύνσεων που προκύπτουν από την ίδια δύναμη να είναι αντιστρόφως ανάλογος του λόγου των μαζών,

$$\frac{a_0}{a} = \frac{m}{m_0}. \tag{2.1.1}$$

Για παράδειγμα, αν $a_0 = 1\,\mathrm{m/sec}^2,\ a = 0.25\,\mathrm{m/sec}^2$ και η μάζα του πρότυπου σώματος m_0 θεωρηθεί μονάδα, $m = 1\,\mathrm{kg}$, τότε η μάζα του δεύτερου σώματος θα πρέπει να καθορισθεί ως

$$m = \frac{a_0}{a} m_0 = 4\,\mathrm{kg}.$$

Ας δούμε αν η έννοια της μάζας που ορίσαμε έχει κάποια γενικότερη αξία. Αν ασκήσουμε μεγαλύτερη δύναμη στην πρότυπη μάζα και αυτή προσλάβει επιτάχυνση $a'_0 = 8\,\mathrm{m/sec}^2$ θα θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι $8\,\mathrm{N}$. Παρατηρούμε πειραματικά ότι η νέα επιτάχυνση a' στο σώμα m είναι μεγαλύτερη και μάλιστα είναι τέτοια ώστε η μάζα του προκύπτει και πάλι

$$m = \frac{a'_0}{a'} m_0 = 4\,\mathrm{kg}.$$

Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να προσδώσουμε σε κάθε σώμα μία μάζα για την οποία ο νόμος του Νεύτωνα ισχύει σε κάθε περίπτωση (κάθε δύναμη). Για κάθε δύναμη ο λόγος των μαζών μεταξύ σωμάτων δίνει και τον λόγο των επιταχύνσεων που παράγονται.

Παρατήρηση 2.1.6. (2ος νόμος του Νεύτωνα) *Η συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα είναι ίση με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνσή του. Δηλαδή*

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.1.2}$$

Παρατηρήστε ότι πρόκειται για διανυσματική εξίσωση και ισοδυναμεί με τρεις εξισώσεις για τις συνιστώσες των διανυσμάτων. Ισχύει ότι η επιτάχυνση κατά δεδομένο άξονα προκαλείται μόνο από τις συνιστώσες των δυνάμεων προς αυτόν τον άξονα (οι συνιστώσες προς άλλους άξονες δεν συνεισφέρουν).

Παρατήρηση 2.1.7. *Αν οι συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι μηδέν τότε η επιτάχυνσή του σώματος είναι μηδέν $\vec{a} = 0$.*

Παράδειγμα 2.1.1. Ένα σώμα με μάζα $m = 2\,\mathrm{kg}$ επιταχύνεται με $a = 3\,\mathrm{m/sec}^2$ στην κατεύθυνση η οποία σχηματίζει γωνία $\theta = 50^o$ ως προς τον άξονα x. Αυτό οφείλεται σε τρεις δυνάμεις. Η $\vec{F}_1$ έχει μέτρο $10\,\mathrm{N}$ και σχηματίζει γωνία 30^o με τον άξονα $-x$ (είναι δηλαδή στο 3ο τεταρτημόριο) και η $\vec{F}_2$ έχει μέτρο $20\,\mathrm{N}$ και είναι προς τον άξονα y. Ποια είναι η τρίτη δύναμη;
Λύση. Έχουμε

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_3 = m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2.$$

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ έχουν μέτρα $F_1 = 10\,\mathrm{N},\ F_2 = 20\,\mathrm{N}$ και γράφονται

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= F_1 \cos(-150^o)\,\hat{\imath} + F_1 \sin(-150^o)\,\hat{\jmath} = -\frac{\sqrt{3}F_1}{2}\,\hat{\imath} - \frac{F_1}{2}\,\hat{\jmath},\\ \vec{F}_2 &= F_2\,\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

Για τις δύο συνιστώσες της $\vec{F}_3$ έχουμε

$$F_{3,x} = ma_x - F_{1,x} - F_{2,x} = ma\cos 50^o + \frac{\sqrt{3}F_1}{2} = 12.5\,\mathrm{N}.$$

$$F_{3,y} = ma_y - F_{1,y} - F_{2,y} = ma\sin 50^o + \frac{F_1}{2} - F_2 = -10.4\,\mathrm{N}.$$

Ως διάνυσμα

$$\vec{F}_3 = (12.5\,\mathrm{N})\,\hat{\imath} + (-10.4\,\mathrm{N})\,\hat{\jmath}.$$

Μέτρο και γωνία κατεύθυνσης

$$F_3 = \ldots = 16\,\mathrm{N}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{3,y}}{F_{3,x}}\right) = -40^o.$$

2.1.3 Ειδικές περιπτώσεις δυνάμεων

Βαρυτική δύναμη. Έχει φορά προς το έδαφος και μέτρο

$$F_g = mg. \tag{2.1.3}$$

Βάρος. Το βάρος W ενός σώματος είναι ίσο με το μέτρο F_g της βαρυτικής δύναμης στο σώμα.

$$W = mg. \tag{2.1.4}$$

Τριβή. Σώματα που εφάπτονται παρεμποδίζουν την σχετική τους κίνηση. Η παρατηρούμενη δύναμη τριβής έχει φορά αντίθετη της κίνησης του σώματος (της ταχύτητάς του). Μπορούμε, με κάποια προσέγγιση, να γράψουμε ότι η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας.

Τάση. Ένα σχοινί μπορεί να τραβάει ένα σώμα με κάποια δύναμη $\vec{T}$ (η $\vec{T}$ έχει την κατεύθυνση του σχοινιού και απομακρύνεται από το σώμα). Ονομάζουμε *τάση* του σχοινιού το μέτρο T της δύναμης στο σώμα.

Σε πολλά προβλήματα θεωρούμε ότι ένα σχοινί δρα ως μέσο μεταφοράς δύναμης, ενώ το ίδιο δεν έχει μάζα (δείτε σχήματα [1] σελ. 120).

2.1.4 3ος νόμος του Νεύτωνα

Παρατήρηση 2.1.8. (3ος νόμος του Νεύτωνα) *Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, οι δυνάμεις που ασκούν τα σώματα το ένα στο άλλο είναι πάντα ίσες σε μέτρο και αντίθετες σε κατεύθυνση:*

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}. \tag{2.1.5}$$

Μία χρήσιμη εικόνα παίρνουμε αν φανταστούμε ότι κοιτάζουμε από μακριά τα δύο σώματα που αλληλεπιδρούν. Τότε δεν παρατηρούμε καμμία δύναμη, αφού η συνισταμένη των δύο δυνάμεων μηδενίζεται.

Παράδειγμα 2.1.2. Μία οθόνη η οποία είναι ακίνητη επάνω σε τραπέζι, δέχεται δύναμη $\vec{F}_g$ από την Γη και ασκεί μία ίση και αντίθετη δύναμη $\vec{F}_{o\Gamma}$ στην Γη. Επίσης, το τραπέζι ασκεί μία δύναμη $\vec{F}_{\tau o}$ την ορθόνη και αυτή του ασκεί μία ίση και αντίθετη δύναμη $\vec{F}_{o\tau}$. Η οθόνη είναι ακίνητη διότι δέχεται τις $\vec{F}_g$ και $\vec{F}_{\tau o}$ που έχουν συνισταμένη μηδέν.

Παράδειγμα 2.1.3. Ένας επιβάτης με μάζα $m = 72.2\,\mathrm{kg}$ βρίσκεται σε ανελκυστήρα ο οποίος επιταχύνεται προς τα επάνω με $a = 3.2\,\mathrm{m/s}^2$. (α) Αν ο επιβάτης βρίσκεται επάνω σε ζυγαριά, πόση δύναμη μετράει αυτή; (β) Εφασμόστε τον νόμο του Νεύτωνα στο σύστημα αναφοράς του θαλάμου του ανελκυστήρα.

Λύση. Αν ο ανελκυστήρας ήταν ακίνητος τότε ο επιβάτης θα ασκούσε δύναμη ίση με το βάρος του $F_g = (72.2\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2}) = 708\,\mathrm{N}$ και ο ανεκλυστήρας επίσης δύναμη F_g στον επιβάτη (3ος νόμος Νεύτωνα), ώστε αυτός να μένει ακίνητος.

Η ζυγαριά μετράει τη δύναμη που ασκείται από τον ανεκλυστήρα στον επιβάτη. Αυτή είναι ίση με το βάρος του $F_g = (72.2\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2}) = 708\,\mathrm{N}$ συν τη δύναμη που χρειάζεται για την επιτάχυνση. Αυτή η δύναμη είναι ίση με $ma = (72.2\,\mathrm{kg})(3.2\,\mathrm{m/s^2}) = 231\,\mathrm{N}$. Άρα η ζυγαριά μετράει

$$F_N = m(g + a) = (72.2\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2} + 3.2\,\mathrm{m/s^2}) = 939\,\mathrm{N}.$$

(β) Η συνισταμένη δύναμη στον επιβάτη είναι $F_N - F_g = 231\,\mathrm{N}$ και η επιτάχυνσή του είναι $a_{p,cab} = 0$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα, διότι το σύστημα του θαλάμου δεν είναι αδρανειακό. □

2.2 Απλές μορφές δυνάμεων σε μία διάσταση

2.2.1 Σταθερή δύναμη

Ας θεωρήσουμε μία μάζα m η οποία κινείται σε μία διάσταση (στον άξονα x) υπό την επίδραση σταθερής δύναμης $F = F_0$. Ο νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$ma = F_0. \tag{2.2.1}$$

Αυτό μπορεί να γραφεί, χρησιμοποιώντας την ταχύτητα και ως

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m}. \tag{2.2.2}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με τη μορφή

$$dv = \frac{F_0}{m}dt \Rightarrow \int dv = \int \frac{F_0}{m}dt. \tag{2.2.3}$$

Από τα ολοκληρώματα παίρνουμε την λύση

$$v(t) = \frac{F_0}{m}t + c_1, \tag{2.2.4}$$

όπου c_1 είναι μία σταθερά. Αν δίνεται η αρχική ταχύτητα του κινητού ως $v(t = 0) = v_0$ τότε πρέπει να θέσουμε $c_1 = v_0$, ώστε έχουμε τη λύση

$$v(t) = \frac{F_0}{m}t + v_0, \tag{2.2.5}$$

η οποία ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη για την ταχύτητα.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε, από την $v = dx/dt$, την εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}t + v_0 \Rightarrow \int dx = \int \frac{F_0}{m}t\,dt + \int v_0\,dt \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 + v_0t + c_2. \tag{2.2.6}$$

Αν δίνεται η αρχική θέση του κινητού ως $x(t = 0) = x_0$ τότε πρέπει να θέσουμε $c_2 = x_0$, ώστε έχουμε τη λύση

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 + v_0t + x_0 \tag{2.2.7}$$

η οποία ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη για την θέση (αλλά και για την ταχύτητα).

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω μάζα m υπό την επίδραση της βαρύτητας η οποία κινείται κατακόρυφα στον άξονα z. Βρείτε την ταχύτητα και θέση της σαν συνάρτηση του χρόνου. Υποθέστε ότι η ταχύτητα και η θέση για χρόνο $t = 0$ είναι v_0 και z_0 αντίστοιχα.

Λύση. Θα θεωρήσουμε ότι το σωμάτιο κινείται στον κατακόρυφο άξονα z. Επίσης, ότι η θετική φορά του άξονα αυτού είναι προς τα επάνω. Η δύναμη της βαρύτητας είναι σταθερή και έχει φορά προς τα κάτω, δηλαδή, έχει αρνητικό πρόσημο. Είναι $F = -mg$. Για την ταχύτητα έχουμε τον νόμο του Νεύτωνα

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \Rightarrow dv = -g\,dt \Rightarrow v(t) = -gt + v_0.$$

Για την θέση έχουμε

$$\frac{dz}{dt} = v(t) \Rightarrow dz = (-gt + v_0)\,dt \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0.$$

Έχουμε θέσει τις σταθερές ολοκλήρωσης έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες $v(t = 0) = v_0,\ z(t = 0) = z_0$.

Θα μπορούσαμε να πάρουμε την θετική φορά του άξονα z να είναι προς τα κάτω. Τότε θα είχαμε δύναμη της βαρύτητας $F = mg$ και τον νόμο Νεύτωνα

$$m\frac{dv}{dt} = mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g.$$

Ακολούθως:

$$dv = gdt \Rightarrow v = gt + v_0$$

και

$$dx = vdt \Rightarrow x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0.$$

□

Λύσαμε τη διαφορική εξίσωση του Νεύτωνα (2.2.1) με τη βοήθεια αορίστου ολοκληρώματος. Θα μπορούσαμε να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με τη βοήθεια ορισμένου ολοκληρώματος. Αν υποθέσουμε ότι ένα σώμα έχει ταχύτητα $v = v(t)$ και αρχική ταχύτητα $v = v_0$ την χρονική στιγμή $t = 0$, τότε έχουμε

$$\int_{v_0}^{v} dv' = \int_0^t \frac{F_0}{m} dt' \Rightarrow v - v_0 = \frac{F_0}{m}(t-0) \Rightarrow v(t) = \frac{F_0}{m}t + v_0. \tag{2.2.8}$$

Επίσης, άν η θέση του είναι $x = x(t)$ με αρχική συνθήκη $x(t=0) = x_0$, τότε έχουμε

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_0^t \left(\frac{F_0}{m}t' + v_0\right) dt' \Rightarrow x - x_0 = \frac{F_0}{m}\frac{t^2}{2} + v_0 t \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 + v_0 t + x_0. \tag{2.2.9}$$

Σε αυτή την περίπτωση οι τιμές για τις αρχικές συνθήκες εισάγωνται απευθείας στην ολοκλήρωση.

2.2.2 Δύναμη που εξαρτάται από τον χρόνο

Ας θεωρήσουμε μία μάζα m η οποία κινείται σε μία διάσταση (στον άξονα x) υπό την επίδραση δύναμης που εξαρτάται από τον χρόνο $F = F(t)$. Ο νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F(t)}{m}. \tag{2.2.10}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με τη μορφή

$$dv = \frac{1}{m}F(t)\,dt \Rightarrow \int dv = \frac{1}{m}\int F(t)\,dt. \tag{2.2.11}$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα της $F(t)$ είναι μία άλλη συνάρτηση του χρόνου και θα την συμβολίσουμε $G(t)$. Η ταχύτητα δίνεται από την

$$v(t) = \frac{1}{m}G(t) + c_1, \tag{2.2.12}$$

όπου c_1 είναι μία σταθερά.

Στη συνέχεια μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση για την θέση

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}G(t) + c_1 \Rightarrow \int dx = \int \left(\frac{1}{m}G(t) + c_1\right) dt \Rightarrow \int dx = \frac{1}{m}\int G(t)dt + c_1 \int dt \tag{2.2.13}$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα της $G(t)$ είναι μία άλλη συνάρτηση του χρόνου και θα την συμβολίσουμε $H(t)$. Τότε η θέση δίνεται από την

$$x(t) = \frac{1}{m}H(t) + c_1\,t + c_2. \tag{2.2.14}$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Οι σταθερές αυτές μπορούν να προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $v(t=0) = v_0$, $x(t=0) = x_0$.

Παράδειγμα 2.2.2. Σημειακή μάζα m κινείται ματά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δύναμης

$$F = F_0 \frac{t^2}{t_0^2}, \qquad t \geq t_0,$$

όπου F_0, t_0 σταθερές. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ η μάζα βρίσκεται στην θέση $x = x_0$ και έχει ταχύτητα $v = v_0$. Να βρεθεί η ταχύτητα και θέση της σαν συνάρτηση του χρόνου.
Λύση. Για την ταχύτητα ισχύει η εξίσωση

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 \frac{t^2}{t_0^2}.$$

Βρίσκουμε την ταχύτητα ως εξής

$$\int dv = \frac{F_0}{m} \int \frac{t^2}{t_0^2}\, dt \Rightarrow v(t) = \frac{F_0}{m} \frac{t^3}{3t_0^2} + c_1. \tag{1}$$

Εφόσον ισχύει η αρχική συνθήκη $v(t = t_0) = v_0$ αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε

$$v_0 = \frac{F_0\, t_0}{3m} + c_1 \Rightarrow c_1 = v_0 - \frac{F_0\, t_0}{3m}.$$

Μπορούμε να γράψουμε την ταχύτητα ως

$$v(t) = \frac{F_0\, t_0}{3m} - \frac{F_0\, t_0}{3m} + v_0 \Rightarrow v(t) = \frac{F_0}{3m\, t_0^2}(t^3 - t_0^3) + v_0.$$

Για την θέση έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{3m\, t_0^2}(t^3 - t_0^3) + v_0 \Rightarrow dx = \frac{F_0}{3m\, t_0^2} \int (t^3 - t_0^3)\, dt + \int v_0\, dt \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{3m\, t_0^2} \left(\frac{t^4}{4} - t_0^3 t \right) + v_0\, t + c_2.$$

Αν ισχύει η αρχική συνθήκη $x(t = t_0) = x_0$ αντικαθιστούμε στην προηγουμένη και παίρνουμε

$$x_0 = -\frac{F_0\, t_0^2}{4m} + v_0\, t_0 + c_2 \Rightarrow c_2 = x_0 + \frac{F_0\, t_0^2}{4m} - v_0\, t_0.$$

Γνωρίζοντας την σταθερά c_2 έχουμε την θέση

$$x(t) = \frac{F_0}{12m\, t_0^2}\,(t^4 - t_0^4) - \frac{F_0\, t_0}{3m}\,(t - t_0) + v_0(t - t_0) + x_0.$$

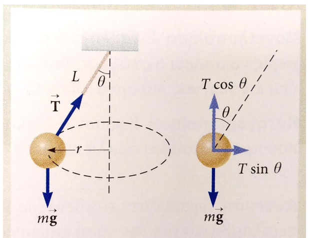
Παρατήρηση 2.2.1. *Η γενική λύση της εξίσωσης Νεύτωνα περιέχει σταθερές οι οποίες πρέπει να προσδιορισθούν κάθε φορά ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Δηλαδή, διαφορετικές λύσεις προκύπτουν, σε κάθε ειδικό πρόβλημα, από την ίδια γενική λύση των εξισώσεων.*

2.2.3 Δύναμη κατά την κυκλική κίνηση

Ένα σωμάτιο μάζας m το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα v και ακτίνα r έχουμε δεί ότι έχει επιτάχυνση με μέτρο $a = v^2/r$. Η κατεύθυνση της δύναμης είναι προς το κέντρο του κύκλου. Ο νόμος του Νεύτωνα λέει ότι η δύναμη που πρέπει να ασκήσουμε σε ένα τέτοιο σωμάτιο ώστε να κάνει κυκλική κίνηση είναι

$$\vec{F} = -m \frac{v^2}{r} \hat{e}_{\mathrm{r}}. \tag{2.2.15}$$

Παράδειγμα 2.2.3. (Το κωνικό εκκρεμές) Μία σφαίρα μάζας m κρέμεται από νήμα μήκους L. Η σφαίρα περιφέρεται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο ακτίνας $r < L$. Βρείτε μία σχέση για το μέτρο της ταχύτητας v.



Σχήμα 2.1: Πηγή [2].

Λύση. Στην σφαίρα ασκείται η δύναμη της βαρύτητας $\vec{F}_g = m\vec{g}$ και επίσης η τάση του νήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.3. Αυτές οι δυνάμεις θα πρέπει να είναι υπεύθυνες για την κίνησή της. Μπορούμε να αναλύσουμε την τάση του νήματος σε οριζόντια και σε κάθετη συνιστώσα. Έχουμε δύο εξισώσεις για την κάθετη και οριζόντια διεύθυνση στον χώρο

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$$
$$\sum F_x = T\sin\theta = \frac{mv^2}{r}.$$

Για να γράψουμε τις εξισώσεις λάβαμε υπόψιν ότι (α) στην κάθετη διεύθυνση δεν έχουμε επιτάχυνση (ή κίνηση) άρα η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν και (β) στο επίπεδο του κύκλου έχουμε κυκλική κίνηση με κεντρομόλο επιτάχυνση v^2/r. Διαιρώντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr} \Rightarrow v^2 = gr\tan\theta.$$

Αυτό είναι το μέτρο της ταχύτητας v με την οποία θα γυρίζει η σφαίρα και εξαρτάται από την γωνία θ την οποία κάνει το νήμα με την κατακόρυφο. Μπορούμε να δούμε ότι $r = L\sin\theta$, ώστε το τελικό αποτέλεσμα για την ταχύτητα είναι

$$v = \sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}.$$

Τέλος, η τάση του νήματος μπορεί να βρεθεί από την πρώτη εξίσωση $T = mg/\cos\theta$.

2.3 Τριβή

Μεταξύ δύο σωμάτων τα οποία έρχονται σε επαφή ασκούνται δυνάμεις. Η κίνηση του ενός ως προς το άλλο παρεμποδίζεται. Οι δυνάμεις που λαμβάνουν μέρος μπορεί να έχουν διάφορες προελεύσεις και να είναι περίπλοκες σε βαθμό που η μικροσκοπική (λεπτομερής) τους περιγραφή να είναι σχεδόν αδύνατη.

2.3.1 Ιδιότητες της τριβής

Τριβή ολίσθησης. *Είναι δύναμη σταθερού μέτρου η οποία ασκείται σε σώμα που ολισθαίνει επάνω σε άλλο σώμα.*

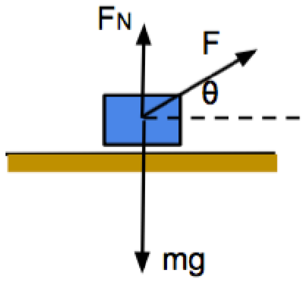
Αν υποθέσουμε ένα σώμα το οποίο κινείται επάνω σε επίπεδο, τότε η τριβή ολίσθησης f_s είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης F_N που ασκείται από το επίπεδο στο σώμα. Είναι

$$f_s = \mu F_N, \tag{2.3.1}$$

όπου μ είναι σταθερά η οποία λέγεται *συντελεστής τριβής*.

Στατική Τριβή. *Είναι δύναμη μεταβλητού μέτρου η οποία ασκείται σε σώμα που βρίσκεται ακίνητο επάνω σε άλλο σώμα.*

Παράδειγμα 2.3.1. Ένας κύβος μάζας $m = 3.0\,\mathrm{kg}$ ολισθαίνει κατά μήκος ενός δαπέδου καθώς μία δύναμη $\vec{F}$ μέτρου $12.0\,\mathrm{N}$ εφαρμόζεται σε αυτόν, υπό μία γωνία θ. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κύβου και του δαπέδου είναι $\mu_k = 0.40$. Μπορούμε να μεταβάλουμε τη γωνία θ από 0 έως 90^o. Ποια γωνία θ δίνει τη μέγιστη τιμή του μέτρου a της επιτάχυνσης του κύβου; [Θεωρούμε δεδομένο ότι ο κύβος παραμένει πάντα σε επαφή με δάπεδο.]



Λύση. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο είναι η δλυβανε $\vec{F}$, η δύναμη της βαρύτητας με μέτρο mg και η αντίσταση του εδάφους F_N, όπως φαίνονται στο σχήμα. Η συνισταμένη δύναμη στην κάθετη διεύθυνση πρέπει να είναι μηδέν,

$$F_N + F\sin\theta - mg = 0.$$

Από την σχέση αυτή βρίσκουμε την κάθετη δύναμη που ασκείται στο σώμα από το έδαφος

$$F_N = mg - F\sin\theta.$$

Ο νόμος του Νεύτωνα για την επιτάχυνση a και την συνισταμένη δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση δίνει

$$ma = F\cos\theta - f_s \Rightarrow ma = F\cos\theta - \mu_k F_N$$

όπου $f_s = \mu_k F_N$ είναι η δύναμη τριβής ολίσθησης και έχει φορά αντίθετη στην κίνηση. Αντικαθιστούμε την F_N την οποία βρήκαμε παραπάνω και και βρίσκουμε ότι η επιτάχυνση είναι συνάρτηση της γωνίας θ,

$$a(\theta) = -\mu_k g + \frac{F}{m}(\cos\theta + \mu_k\sin\theta).$$

Η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν $da/d\theta = 0$ δηλαδή για

$$-\sin\theta + \mu_k\cos\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = \mu_k.$$

Από τις τιμές που μας δίνονται έχουμε

$$\theta = \tan^{-1}\mu_k \approx 21.8^o.$$

2.3.2 Δύναμη που εξαρτάται από την ταχύτητα

Ας δούμε την περίπτωση όπου σε σώμα ασκείται δύναμη που εξαρτάται από την ταχύτητα $f = f(v)$. Τέτοια παραδείγματα είναι οι δυνάμεις τριβής, όπως η οπισθέλκουσα δύναμη. Ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$m\frac{dv}{dt} = f(v). \tag{2.3.2}$$

Μπορούμε να βρούμε τη λύση εξισώσεων όπως η (2.3.2) με ολοκλήρωση (με την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών)

$$m\frac{dv}{f(v)} = dt \Rightarrow m\int\frac{dv}{f(v)} = \int dt. \tag{2.3.3}$$

Η λύση εξαρτάται βέβαια από τη μορφή της $f(v)$.

Παράδειγμα 2.3.2. Μία βάρκα μάζας m κινείται σε λίμνη σε ευθεία γραμμή υπό την επίδραση σταθερής δύναμης $F_0 > 0$. Θεωρήστε ότι η τριβή του νερού είναι δύναμη ανάλογη της ταχύτητας που αντιτίθεται στην κίνηση. (α) Βρείτε την ταχύτητα της βάρκας αν για $t = 0$ η βάρκα ήταν ακίνητη. (β) Μελετήστε την ταχύτητα της βάρκας όταν ο χρόνος $t \to \infty$. (Η βάρκα θεωρείται ως υλικό σημείο.)
Λύση. (α) Η δύναμη τριβής είναι της μορφής $-Rv$, όπου υποθέσαμε σταθερά $R > 0$. Η εξίσωση κίνησης της βάρκας είναι

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 - Rv.$$

Η δύναμη τριβής συνεισφέρει μία επιτάχυνση αντίθετη της ταχύτητας είτε για $v > 0$ είτε για $v < 0$, άρα η $-Rv$ είναι η σωστή μορφή και για τις δύο περιπτώσεις.

Με την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών έχουμε

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m} - \frac{R}{m}v \Rightarrow m\,\frac{dv}{F_0 - Rv} = dt \Rightarrow \frac{m}{F_0}\int \frac{dv}{1-(R/F_0)v} = \int dt.$$

Άρα

$$-\frac{m}{R}\ln\left|1 - \frac{R}{F_0}v\right| = t + c \Rightarrow 1 - \frac{R}{F_0}v = e^{-(R/m)t}\,e^{-(R/m)c}.$$

Θέτουμε μία νέα σταθερά $c_1 = e^{-(R/m)c}$ και μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση ως

$$v(t) = \frac{F_0}{R}\left(1 - c_1\,e^{-(R/m)t}\right).$$

Παρατηρείστε ότι η ποσότητα F_0/R έχει διαστάσεις ταχύτητας, ενώ οι ποσότητες στην παρένθεση είναι αδιάστατες.

Επιβάλλουμε στη γενική λύση την αρχική συνθήκη

$$v(t=0) = 0 \Rightarrow \frac{F_0}{m}(1 - c_1) = 0 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Τελικά, η ζητούμενη λύση είναι

$$v(t) = \frac{F_0}{R}\left(1 - e^{-(R/m)t}\right). \qquad t > 0.$$

(β) Παρατηρούμε ότι για $t \to \infty$ η ταχύτητα είναι $v(t \to \infty) = F_0/R$, δηλαδή η βάρκα κινείται τελικά με μία *οριακή ταχύτητα*

$$v_\ell = \frac{F_0}{R}.$$

Την ταχύτητα αυτή προκύπτει και από την συνθήκη μηδενισμού της δύναμης

$$F = 0 \Rightarrow F_0 - Rv_\ell = 0 \Rightarrow v_\ell = \frac{F_0}{R}.$$

2.3.3 Οπισθέλκουσα δύναμη και οριακή ταχύτητα

Ρευστό είναι οτιδήποτε μπορεί να ρέει, για παράδειγμα, ένα υγρό ή αέριο. Όταν σώμα βρίσκεται σε σχετική κίνηση μέσα σε ρευστό σε αυτό ασκείται μία *οπισθέλκουσα δύναμη* που αντιστέκεται στην κίνηση. Αυτή είναι μία αύξουσα συνάρτηση της σχετικής ταχύτητας του σώματος.

Η κίνηση ρευστού είναι γενικά ένα περίπλοκο πρόβλημα και οι δυνατές καταστάσεις πολλές. Ας δούμε την περίπτωση ενός σώματος που είναι αμβλύ (μία μπάλα) το οποίο κινείται γρήγορα ώστε κάνει το ρευστό (τον αέρα) να κινείται με τυρβώδη ροή. Η οπισθέλκουσα δύναμη έχει τη μορφή

$$D = \frac{1}{2}C\rho A\,v^2 \tag{2.3.4}$$

όπου

- v: η ταχύτητα του σώματος
- ρ: πυκνότητα του αέρα
- A: η επιφάνεια διατομής του κάθετα στην ταχύτητα (*ενεργός διατομή*)
- C: συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα σώμα που κινείται σε ρευστό του ασκείται η D και επίσης ασκείται μία επιπλέον δύναμη, όπως για παράδειγμα, η δύναμη της βαρύτητας F_g σε ένα σώμα που πέφτει. Ο νόμος του Νεύτωνα μας δίνει

$$ma = F_g - D.$$

Θέτοντας $F_g = mg$ θεωρούμε την κατεύθυνση του άξονα θετική προς τα κάτω. Η οπισθέλκουσα δύναμη θα πρέπει να έχει το πρόσημο μείον αν η ταχύτητα είναι θετική. Αυτό συμβαίνει διότι η επιτάχυνση που δημιουργεί η D πρέπει να είναι αντίθετη της ταχύτητας.

Αν το σώμα ξεκινήσει από ταχύτητα μηδέν, τότε $D = 0$ και η ταχύτητα θα αυξηθεί λόγω της F_g. Όταν η ταχύτητα γίνει αρκετά μεγάλη ταχύτητα η δύναμη και άρα και η επιτάχυνση θα μηδενιστούν. Αυτό θα συμβεί για $v = v_l$, η οποία ικανοποιεί την

$$F_g - \frac{1}{2} C\rho A\, v_l^2 = 0 \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}. \tag{2.3.5}$$

Παράδειγμα 2.3.3. Αν μία γάτα που πέφτει φτάσει μία πρώτη οριακή ταχύτητα $v = 97\,\mathrm{km/h}$ ενώ ήταν μαζεμένη και στη συνέχεια διπλασιάσει την επιφάνειά της, πόση είναι η νέα οριακή ταχύτητα v';
Λύση. Έστω αρχική επιφάνεια A και τελική $A' = 2A$. Έχουμε

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2F_g/(C\rho A')}}{\sqrt{2F_g/(C\rho A)}} = \sqrt{\frac{A}{A'}} = \sqrt{0.5}.$$

Άρα, η νέα οριακή ταχύτητα είναι

$$v' = \sqrt{0.5}\, v \approx 0.7 \times 97\,\mathrm{km/h} \approx 68\,\mathrm{km/h}. \ \square$$

Παράδειγμα 2.3.4. Σωμάτιο μάχας m κινείται κατά άξονα x και επιβραδύνεται από δύναμη τριβής με μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας. Αυτή η δύναμη του προσδίδει επιτάχυνση

$$a = -b\, v^2, \qquad b > 0 \text{ σταθ.}$$

Αν η αρχική ταχύτητα είναι $v(t = 0) = v_0 > 0$ δείξτε ότι η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου είναι

$$v(t) = \frac{v_0}{bv_0 t + 1}, \qquad t \geq 0.$$

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι η δεδομένη $v = v(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση του Νεύτωνα και την αρχική συνθήκη.

Η εξίσωση του Νεύτωνα έχει τη μορφή

$$\frac{dv}{dt} = -b\, v^2.$$

Με υπολογισμό βρίσκουμε ότι η εξίσωση του Νεύτωνα επαληθεύεται,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_0}{(bv_0 t + 1)^2} bv_0 = -b \left(\frac{v_0}{bv_0 t + 1} \right)^2 = -bv^2.$$

Επίσης βλέπουμε ότι $v(t = 0) = v_0$ όπως απαιτεί η αρχική συνθήκη. $\square$

Ας δούμε πιο λεπτομερειακά τη σχέση $a = -bv^2$. Βλέπουμε ότι όταν $v_0 > 0$ τότε

$$v(t \to \infty) = \lim_{t\to\infty} \frac{v_0}{bv_0 t + 1} \to 0, \qquad v_0 > 0,$$

όπως θα αναμέναμε για ένα σώμα που επιβραδύνεται συνεχώς. Αν όμως είχαμε αρχική ταχύτητα $v_0 < 0$ τότε θα βρίσκαμε ότι η ταχύτητα θα πήγαινε στο άπειρο για χρόνο $t = -1/(bv_0) > 0$. Δηλαδή δεν θα είχαμε το σωστό φυσικό αποτέλεσμα. Παρατηρούμε όμως ότι η αρχική εξίσωση $a = -bv^2$ δεν θα ήταν σωστή σε αυτή την περίπτωση, πράγμα που είναι η αιτία του λανθασμένου φυσικού αποτελέσματος.

Κεφάλαιο 3

Ενέργεια

3.1 Κινητική ενέργεια και έργο

3.1.1 Κινητική ενέργεια και έργο για σταθερή δύναμη

Τα υλικά αντικείμενα έχουν τη δυνατότητα να κινούνται και θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουν κάποια μικρότερη ή μεγαλύτερη ενέργεια όταν βρίσκονται σε μία αργή είτε ταχύτερη κίνηση. Η ενέργεια αυτή μπορεί να μεταβιβαστεί, π.χ., όταν συγκρουστούν με άλλα σώματα. Αυτή θα την ονομάζαμε *κινητική ενέργεια*. Μπορούμε να επιταχύνουμε ή να επιβραδύνουμε ένα σώμα, μεταβάλοντας έτσι την κινητική του ενέργεια.

Υπάρχουν και άλλα είδη ενέργειας, π.χ., θερμική, ηλεκτρική κλπ.

Ας θεωρήσουμε μία χάντρα η οποία είναι περιορισμένη να ολισθαίνει κατά μήκος νήματος. Έχουμε για τη δύναμη που της ασκείται

$$F_x = ma_x \tag{3.1.1}$$

όπου m η μάζα της και a_x η επιτάχυνσή της κατά μήκος της ευθείας του νήματος. Αν a_x σταθερά, τότε η χάντρα θα επιταχυνθεί από αρχική ταχύτητα v_0 σε τελική v και θα έχει διανύσει απόσταση d. Ισχύουν οι

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_x t \\ d &= v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + a_x d$$

ή

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d. \tag{3.1.2}$$

Ονομάζουμε τους δύο όρους (με θετικό πρόσημο) στο αριστερό μέλος *κινητική ενέργεια* στην τελική και στην αρχική στιγμή αντίστοιχα. Ο όρος στο δεξιό μέλος λέγεται *έργο* $W = F_x d$ που παρήγαγε η δύναμη F_x.

Παρατήρηση 3.1.1. *Έργο W είναι η ενέργεια που μεταφέρεται από ή προς ένα σώμα μέσω της δύναμης που δρα στο σώμα. Μπορούμε να έχουμε αρνητικό ή θετικό έργο δύναμης. Είναι θετικό αν η δύναμη έχει ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση και αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση.*

Παρατήρηση 3.1.2. *Έργο παραγάγει μόνο η συνιστώσα της δύναμης κατά μήκος της μετατόπισης του σώματος.*

Τα παραπάνω εκφράζουν το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας

$$K_f - K_i = W \tag{3.1.3}$$

όπου K_f, K_i η τελική και η αρχική κινητική ενέργεια αντίστοιχα.

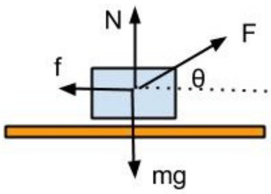
3.1.2 Έργο. Ορισμός, βασικά παραδείγματα

Ορισμός (Έργο). Ονομάζουμε έργο σταθερής δύναμης το γινόμενο της συνιστώσας της δύναμης στη διεύθυνση της μετατόπισης επί το μέτρο της μετατόπισης

$$W = (F \cos\theta)d.$$

Η μονάδα μέτρησης έργου είναι το Joule με σύμβολο $\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

Παράδειγμα 3.1.1. Ένα κιβώτιο σύρεται επάνω σε ένα τραχύ πάτωμα από μία σταθερή δύναμη μέτρου $F = 50\,\mathrm{N}$. Η κατεύθυνση της δύναμης σχηματίζει γωνία $\theta = 37^o$ πάνω από το οριζόντιο επίπεδο. Μία δύναμη τριβής μέτρου $f = 10\,\mathrm{N}$ επιβραδύνει την κίνηση και το κιβώτιο μετατοπίζεται $d = 3\,\mathrm{m}$ προς τα δεξιά. (α) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη F. (β) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη τριβής f. (γ) Ποιο το συνολικό έργο που παράγουν όλες οι δυνάμεις επάνω στο σώμα;



Λύση. (α) Από τον ορισμό του έργου, το έργο που παράγει η F είναι

$$W_F = (F\cos\theta)\, d = 120\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = 120\,\mathrm{J}.$$

(β) Το έργο της δύναμης τριβής είναι

$$W_f = -f\, d = -30\,\mathrm{J}.$$

Το W_f έχει αρνητικό πρόσημο, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η f_s προκαλεί μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος. Λέμε ότι η f_s *καταναλώνει έργο*.

(γ) Οι βαρυτική δύναμη και η κάθετη δύναμη N (αντίσταση του εδάφους) δεν παράγουν έργο διότι είναι κάθετες στην μετατόπιση. Το συνολικό έργο είναι

$$W_{\text{net}} = W_F + W_f = 120\,\mathrm{J} - 30\,\mathrm{J} = 90\,\mathrm{J}.$$

Παράδειγμα 3.1.2. Αν υποθέσουμε ότι η βαρυτική δύναμη κινεί ένα σώμα προς τα κάτω τότε το έργο που παράγει είναι

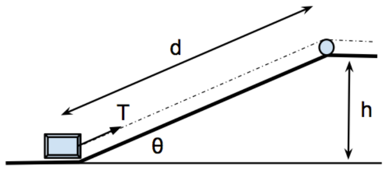
$$W_g = mgd \tag{3.1.4}$$

και το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας γίνεται

$$K_f - K_i = W_g. \tag{3.1.5}$$

Αν το σώμα ανυψώνεται τότε $W_g = -mgd < 0$.

Παράδειγμα 3.1.3. Ένα αρχικά ακίνητο κιβώτιο μάζας $m = 15\,\mathrm{kg}$ έλκεται μέσω ενός σχοινιού σε απόσταση $d = 5.70\,\mathrm{m}$ πάνω σε ράμπα χωρίς τριβές και τελικά ανεβαίνει σε ύψος $h = 2.50\,\mathrm{m}$ όπου και σταματά. Πόσο έργο W_g εκτελείται στο κιβώτιο από τη βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ κατά την ανύψωση;



Λύση.

$$W_g = mg\cos(\theta + 90)\, d = -mgd\sin\theta.$$

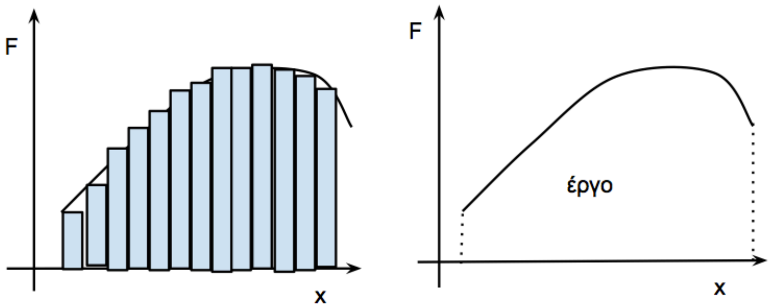
Αυτό γράφεται και ως

$$W_g = -mgh.$$

Δηλαδή, το έργο W_g που εκτελείται από την βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ εξαρτάται από την κατακόρυφη μετατόπιση (και όχι από την συνολική μετατόπιση).

3.1.3 Έργο δύναμης που εξαρτάται από την θέση σε μία διάσταση

Υπάρχει μία μεγάλη κατηγορία δυνάμεων οι οποίες εξαρτώνται από την θέση στην οποία βρίσκεται η μάζα στην οποία επιδρούν. Μία τέτοια δύναμη είναι η δύναμη παγκόσμιας έλξης, δηλαδή η δύναμη με την οποία ένα ουράνιο σώμα έλκει το άλλο. Για παράδειγμα, η έλξη που ασκεί ο ήλιος σε έναν πλανήτη είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης του πλανήτη από τον ήλιο. Επίσης, η δύναμη την οποία ασκεί ένα ελατήριο σε μία μάζα είναι ανάλογη της θέσης της μάζας ως προς την θέση ισορροπίας του ελατηρίου.



Σχήμα 3.1: Δύναμη F η οποία εξαρτάται από την θέση x. Το έργο που παράγει η δύναμη F είναι ίσο με το εμβαδό κάτω από την καμπύλη.

Θα θεωρήσουμε εδώ μία δύναμη $F = F(x)$ η οποία εξαρτάται από την θέση του σώματος x. Αν υποθέσουμε ότι το σώμα κινείται και κάνει μία μικρή μεταβολή της θέσης του κατά Δx τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη έχει μία συγκεκριμένη (σταθερή) τιμή F_x. Οπότε, το έργο που παράγει είναι

$$\Delta W \approx F_x\, \Delta x.$$

Αυτό είναι ίσο με μία από τις σκιασμένες επιφάνειες (κουτάκια) στο σχήμα 3.1. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το σώμα μετατοπίζεται από μία αρχική θέση x_i σε μία τελική θέση x_f υπό την επίδραση της δύναμης F. Σε κάθε μικρή μετακίνηση παράγεται έργο το οποίο αντιστοιχεί σε ένα από τα ορθογώνια κουτάκια του σχήματος 3.1. Αθροίζοντας τα στοιχειώδη έργα ΔW για κάθε διαδοχική μετατόπιση Δx παίρνουμε ένα συνολικό έργο

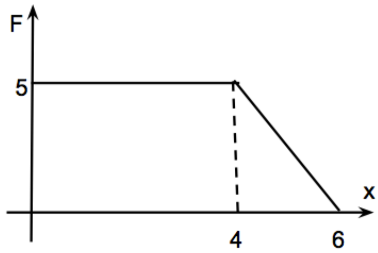
$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x\, \Delta x. \tag{3.1.6}$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή της F είναι διαφορετική για κάθε διαφορετικό κουτάκι (διαφορετική θέση x). Για να κάνουμε τον υπολογισμό ακριβή θεωρούμε το Δx απειροστό ($\Delta x \to dx$) και έχουμε το έργο ως ολοκλήρωμα

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \, \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx. \tag{3.1.7}$$

Αυτό είναι το έργο που παράγει η δύναμη F κατά την μετατόπιση του σώματος από την θέση x_i στην θέση x_f.

Παράδειγμα 3.1.4. Μία δύναμη που δρα σε ένα σώμα εξαρτάται από το x όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη καθώς μετατοπίζει το σώμα από $x = 0$ σε $x = 6\,\mathrm{m}$.



Λύση. Το έργο ισούται με την επιφάνεια κάτω από την καμπύλη. Αυτή είναι ίση με την επιφάνεια ορθογωνίου σύν την επιφάνεια τριγώνου

$$W = 5 \cdot 4\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} + \frac{1}{2} 5 \cdot 2\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 25\,\mathrm{J}.$$

Παράδειγμα 3.1.5. Αν τεντώσουμε ή συμπιέσουμε ελατήριο τότε υπάρχει *δύναμη επαναφοράς* η οποία τείνει να το επαναφέρει στο αρχικό του μήκος ισορροπίας. Στην απλή περίπτωση η δύναμη είναι ανάλογη της έκτασης ή συμπίεσης:

$$F_s = -kx.$$

Βρείτε το έργο που παράγει αυτή η δύναμη για αλλαγή της θέσης σώματος από $x = x_i$ σε $x = x_f$. Ποια η μεταβολή στην κινητική του ενέργεια;
Λύση. Το έργο που παράγεται για μετακίνηση από αρχική θέση x_i σε τελική x_f είναι

$$\begin{aligned} W_s &= \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_f} -kx\, dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x\, dx \\ &= -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2). \end{aligned}$$

Ως ειδικότερο παράδειγμα έχουμε ότι αν η αρχική θέση είναι η θέση ισορροπίας $x_i = 0$ τότε το έργο του ελατηρίου για μετατόπιση μέχρι θέση x είναι

$$W_s = \frac{1}{2} k x^2. \tag{3.1.8}$$

Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια θα είναι

$$K_f - K_i = W_s \Rightarrow K_f - K_i = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2).$$

Σε ένα ειδικότερο παράδειγμα όπου το σώμα ξεκινάει από την θέση $x_i = 0$ με ταχύτητα $v_i = v_0$ έχουμε, σε τυχούσα θέση $x_f = x$ ταχύτητα $v_f = v$ και ισχύει

$$K_f - K_i = W_s \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} k x^2. \; \square$$

3.1.4 Ισχύς

Αν μας ενδιαφέρει ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται το έργο τότε ορίζουμε την ισχύ

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{3.1.9}$$

Όταν μία δύναμη F μετατοπίζει σώμα κατά απειροστή απόσταση ds τότε $dW = F\,ds$, ώστε

$$P = F\,\frac{ds}{dt} = F\,v. \tag{3.1.10}$$

Αν γνωρίζουμε την ισχύ τότε το έργο είναι

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt, \tag{3.1.11}$$

όπου υποθέσαμε ότι η ισχύς είναι συνάρτηση του χρόνου.

Παράδειγμα 3.1.6. Ένα ασανσέρ έχει μάζα $1000\,\mathrm{kg}$ και μεταφέρει φορτίο $800\,\mathrm{kg}$. Η προς τα επάνω κίνηση του ανανσέρ επιβραδύνεται από δύναμη τριβής $f = 4000\,\mathrm{N}$. (α) Εάν θέλουμε να κινείται προς τα επάνω το ασανσέρ με σταθερή ταχύτητα $3\,\mathrm{m/sec}$ ποια πρέπει να είναι η ισχύς που παράγει ο κινητήρας; (β) Ποια πρέπει να είναι η ισχύς ώστε το ασανσέρ να επιταχύνεται προς τα επάνω με $a = 1.0\,\mathrm{m/sec}$;

Λύση. (α) Αφού η επιτάχυνση είναι μηδέν θα πρέπει η συνολική δύναμη να είναι μηδέν. Άρα, η δύναμη T που παράγει ο κινητήρας και έλκει το ασανσέρ πρέπει να είναι $T = Mg + f$, όπου $M = 1800\,\mathrm{kg}$ η συνολική μάζα που έλκεται. Είναι

$$T = 2.16 \times 10^4\,\mathrm{N}.$$

Η ζητούμενη ισχύς είναι

$$P = T\,v = 6.49 \times 10^4\,\mathrm{W}.$$

(β) Ισχύει

$$T - f - Mg = Ma \Rightarrow T = M(a+g) + f = 2.34 \times 10^4\,\mathrm{N}.$$

Η ισχύς είναι

$$P = T\,v = (2.34 \times 10^4\,v)\,\mathrm{W}.$$

Βλέπουμε ότι η ισχύς αυξάνεται με την ταχύτητα.

3.1.5 Θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας

Θα θεωρήσουμε μία δύναμη $F = F(x)$, η οποία είναι συνάρτηση της θέσης x. Ο 2ος νόμος Νεύτωνα έχει τη μορφή

$$m\frac{dv}{dt} = F(x). \tag{3.1.12}$$

Για να προχωρήσουμε προς τη λύση της εξίσωσης αυτής πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με v:

$$m\frac{dv}{dt}\,v = F(x)\,v \tag{3.1.13}$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε ως

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F(x)\,v. \tag{3.1.14}$$

Ονομάζουμε την ποσότητα

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.1.15}$$

κινητική ενέργεια της σημειακής μάζας m.

Από την Εξ. (3.1.14) η οποία δίνει τον ρυθμό μεταβολής μπορούμε να πάμε στην μεταβολή της κινητικής ενέργειας πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της Εξ. (3.1.14) με dt,

$$dK = F(x)\,dx. \tag{3.1.16}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σώμα μετακινείται από αρχική θέση x_i σε τελική θέση x_f και οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι v_i και v_f. Ολοκληρώνουμε την εξίσωση και έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{v=v_i}^{v_f} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \Rightarrow \\
&\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W.
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Παρατήρηση 3.1.3. *Η ποσότητα*

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \tag{3.1.18}$$

είναι το έργο που παράγεται από τη δύναμη κατά τη μετατόπιση της μάζας από θέση x_i σε θέση x_f.

Παρατήρηση 3.1.4. (Θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας.) *Η Εξ.* (3.1.17) *εκφράζει το ακόλουθο αποτέλεσμα. Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια σώματος ισούται με το έργο που παράγει η δύναμη F που ασκείται στο σώμα.*

3.2 Δυναμική ενέργεια

3.2.1 Έργο και δυναμική ενέργεια

Το έργο δύναμης για μετακίνηση από δεδομένη θέση x_0 σε τυχούσα θέση x είναι $W = \int_{x_0}^{x} F\,dx'$. Εφόσον η δύναμη είναι συνάρτηση μόνο της θέσης, $F = F(x)$, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος είναι μία συνάρτηση του x.

Ορισμός. Ορίζουμε την

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \tag{3.2.1}$$

και την ονομάζουμε *δυναμική ενέργεια* του σώματος στην θέση x.

Παράδειγμα 3.2.1. (Δύναμη ελατηρίου) Για την δύναμη του ελατηρίου $F(x) = -kx$ μπορούμε να θεωρήσουμε ως θέση αναφοράς $x_0 = 0$ (την θέση ισορροπίας) οπότε ορίζουμε δυναμική ενέργεια, για κάθε θέση x, την

$$U(x) = -\int_0^x (-kx')\,dx' = \frac{1}{2}kx^2,$$

όπου x είναι η απόσταση από την θέση ισορροπίας.

Παράδειγμα 3.2.2. (Βαρυτική δύναμη) Ας δούμε την βαρυτική δύναμη η οποία ξέρουμε ότι υπάρχει ως ιδιότητα του χώρου (π.χ. του χώρου γύρω από τη Γη). Κοντά στη Γη η βαρυτική δύναμη είναι

$$\vec{F} = -mg\,\hat{\jmath}.$$

Ας δούμε πρώτα το έργο που παράγει αυτή η δύναμη για κίνηση κατά τον άξονα y

$$W = \int_{y_i}^{y_f} F(y)\, dy = -mg(y_f - y_i).$$

Η δυναμική ενέργεια, αν την υπολογίσουμε από το σημείο $y = 0$ (επιφάνεια της Γης), είναι

$$U(y) = -\int_0^y (-mg)\, dy' = mgy$$

όπου y είναι το ύψος πάνω από τη Γη.

Το έργο W είναι ίσο με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας από το ένα σημείο στο άλλο

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_0^{x_f} F(x)dx - \int_0^{x_i} F(x)dx = -[U(y_f) - U(y_i)] = -\Delta U. \tag{3.2.2}$$

Παρατηρούμε ότι αυτό εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σωματίου και όχι από την ενδιάμεση κινητική του κατάσταση.

Παρατήρηση 3.2.1. *Το έργο δύναμης για την οποία μπορούμε να ορίσουμε δυναμική ενέργεια $U(x)$ δίνεται από τη διαφορά δυναμικής ενέργειας μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης*

$$W = -\Delta U. \tag{3.2.3}$$

Παρατήρηση 3.2.2. *Η δυναμική ενέργεια για την βαρυτική δύναμη, όπως ορίστηκε, είναι $U = 0$ επάνω στην επιφάνεια της Γης, δηλαδή για $y = 0$. Αυτή είναι μία αυθαίρετη επιλογή. Το έργο όμως της δύναμης δεν εξαρτάται από την επιλογή αυτή, διότι δίνεται από διαφορές τιμών της δυναμικής ενέργειας.*

Εάν τροποποιήσουμε τον ορισμό της δυναμική ενέργειας της βαρύτητας και θέσουμε

$$U(y) = -\int_{h_0}^y (-mg)\, dy = mg(y - h_0),$$

όπου h_0 είναι το ύψος του διαμερίσματος στο οποίο μένουμε (π.χ., $h_0 = 10\,\mathrm{m}$ αν μένουμε στον 3ο όροφο), τότε έχουμε $U(y = h_0) = 0$ στο ύψος του διαμερίσματός μας. Παρατηρήστε ότι η σχέση $W = -\Delta U$ ισχύει χωρίς αλλαγή, δηλαδή δίνει το ίδιο αποτέλεσμα για το έργο.

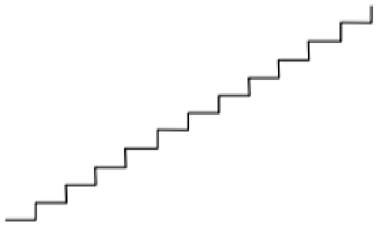
Παράδειγμα 3.2.3. Έστω σώμα μάζας m το οποίο ωθείται προς τα επάνω σε κεκλιμένη επιφάνεια (η οποία σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο) από σταθερή δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη στην κεκλιμένη επιφάνεια. Έστω ότι το σώμα μετατοπίζεται κατά απόσταση d επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Ποιο το έργο που παράγει η βαρυτική δύναμη για τη μετατόπιση αυτή;
Λύση. Η δύναμη της βαρύτητας είναι κατακόρυφη και η συνιστώσα της η παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο είναι $-mg\sin\theta$. Το έργο αυτής είναι

$$W_g = -mg\sin\theta\, d = -mgh,$$

όπου $h = -d\sin\theta$ το ύψος στο οποίο ανέβηκε το σώμα. Άρα το έργο της δύναμης βαρύτητας είναι ίσο με την δύναμη βαρύτητας επί την κατακόρυφη μετατόπιση. Αυτό μπορεί να γραφεί ως διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ του αρχικού ύψους y_i και του τελικού y_f

$$W_g = -[U(y_f) - U(y_i)] = -mg(y_f - y_i) = -mgh.$$

Παρατηρούμε ότι αυτό το αποτέλεσμα ισχύει είτε για κατακόρυφη πτώση είτε για μετατόπιση σε κεκλιμένο επίπεδο. Δηλαδή, ισχύει ανεξάρτητα της διαδρομής του σώματος.



Σχήμα 3.2: Κλιμακωτή άνοδος σωματίου στο πεδίο βαρύτητας της Γης.

Παράδειγμα 3.2.4. Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα ανεβαίνει μία μικρή απόσταση κατακόρυφα προς τα επάνω και ακολούθως μετακινείται μία απόσταση στην οριζόντια διεύθυνση. Επίσης ότι αυτό επαναλαμβάνεται για πολλά βήματα. Σε κάθε ανοδικό τμήμα μήκους Δh η δύναμη βαρύτητας καταναλώνει έργο ίσο με $\Delta W = mg\,\Delta h$. Στα οριζόντια τμήματα δεν καταναλώνεται έργο από την βαρύτητα. Η δυναμική ενέργεια του σωματίου θα έχει μεταβληθεί κατά το συνολικό ύψος της κλιμακωτής ανόδου όταν το σωμάτιο βρεθεί στην κορυφή.

Αν θεωρήσουμε ότι τα σκαλιά έχουν απειροστό ύψος ενώ ο αριθμός τους αυξάνεται έτσι ώστε το συνολικό ύψος να παραμένει σταθερό τότε η κλιμακωτή κατασκευή προσεγγίζει ένα κεκλιμένο επίπεδο. Αυτή η διαδικασία δείχνει και πιο παραστατικά ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας για την δύναμη βαρύτητας στην Γη εξαρτάται μόνο από την μεταβολή του ύψους.

Παρατήρηση 3.2.3. *Εάν ένα σώμα μετακινηθεί στο πεδίο βαρύτητας από ύψος h_0 προς άλλο σημείο σε ύψος h_1 και ακολούθως επιστρέψει από το h_1 σε σημείο σε ύψος h_0 (π.χ., στο αρχικό σημείο), τότε η ολική μεταβολή της δυναμικης ενέργειας είναι ίση με μηδέν. Η δύναμη δεν έχει παραγάγει συνολικό έργο.*

Παράδειγμα 3.2.5. (Δύναμη η οποία δεν προέρχεται από δυναμική ενέργεια.) Ας θεωρήσουμε ένα σώμα το οποίο σύρεται σε μη λείο επίπεδο. Η δύναμη τριβής f_s ασκείται αντίθετα στην ταχύτητα. Αν υποθέσουμε ότι το σώμα μετακινείται απόσταση d προς τα δεξιά η τριβή καταναλώνει έργο $-f_s d$. Αν το σώμα μετακινηθεί από την τελευταία του θέση στην αρχική τότε η τριβή (θα είναι πάλι αντίθετη στην κίνηση) θα καταναλώσει έργο πάλι $-f_s d$. Το συνολικό έργο που θα καταναλώσει η τριβή κατά την κίνηση του σωματίου από την αρχική θέση μέχρι να επιστρέψει στην ίδιο θέση είναι μη μηδενικό:

$$W_s = -2 f_s d.$$

Βλέπουμε ότι καταναλώνεται έργο παρ΄ ότι το σώμα βρίσκεται στην ίδια θέση στην αρχή και στο τέλος της διαδικασίας και λέμε ότι η τριβή δεν είναι διατηρητική δύναμη. Αυτό δείχνει ότι δεν υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x)$ η οποία να περιγράφει την τριβή.

Σχήμα 3.3: Σώμα σύρεται σε μη λείο επίπεδο κατά απόσταση d και ακολούθως σύρεται στην αρχική του θέση.

3.2.2 Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

Έχουμε δει την σχέση που δίνει τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω δύναμης η οποία παράγει έργο W

$$\Delta K = W.$$

Εάν για τη δύναμη μπορεί να ορισθεί δυναμική ενέργεια U με $W = -\Delta U$ τότε

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0.$$

Αυτή γράφεται αναλυτικότερα ως

$$(K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2. \tag{3.2.4}$$

Ορισμός. Ορίζουμε τη *μηχανική ενέργεια* ως το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του κινητού σε κάθε χρονική στιγμή

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x). \tag{3.2.5}$$

Παρατήρηση 3.2.4. *Η μηχανική ενέργεια διατηρείται κατά τη διάρκεια της κίνησης όταν το έργο της δύναμης περιγράφεται από δυναμική ενέργεια.*

Τη διατήρηση της ενέργειας είναι χρήσιμο να την καταλάβουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο ένας είναι να δούμε ότι το άθροισμα $K + U$ έχει την ίδια αριθμητική τιμή για κάθε χρονική στιγμή

$$E_0 = K + U. \tag{3.2.6}$$

Ο δεύτερος είναι να δούμε ότι για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_i και t_f (κατά τις οποίες το κινητό βρίσκεται σε θέση x_i με ταχύτητα v_i και σε θέση x_f με ταχύτητα v_f αντιστοίχως) έχουμε

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + U(x_i) = \frac{1}{2}mv_f^2 + U(x_f). \tag{3.2.7}$$

Παράδειγμα 3.2.6. Έστω σωμάτιο σε πεδίο βαρύτητας με $U = mg\,y$, όπου υποθέτουμε $y \geq 0$, για μάζα $m = 1$ και έστω $g = 10$. Επιλέγουμε (α) $E_m = 10$ (β) $E_m = 0$. Βρείτε την ταχύτητά του.
Λύση. Καθώς το κινητό βρίσκεται σε κίνηση, ισχύει για την ταχύτητα και θέση σε κάθε χρονική στιγμή

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgy.$$

(α) Εφαρμόζοντας τα παραπάνω

$$10 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}v^2 + 10y \Rightarrow v^2 = 20(1 - y).$$

Για $0 \leq y \leq 1$ μπορούμε να έχουμε τις ταχύτητες

$$v = \pm\sqrt{20\,(1 - y)}.$$

Το πρόσημο καθορίζει αν η ταχύτητα θα είναι προς τα κάτω ή προς τα επάνω.

(β) Έχουμε

$$\frac{1}{2}v^2 + 10y = 0 \Rightarrow y = 0,\; v = 0.$$

Το κινητό δεν μπορεί να αποκτήσει κατακόρυφη ταχύτητα, δηλαδή έχουμε υποχρεωτικά $v = 0$. □

Ορισμός (Διατηρητικές δυνάμεις). Δυνάμεις για τις οποίες μπορούμε να γράψουμε το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας λέγονται διατηρητικές δυνάμεις.

Παρατήρηση 3.2.5. *Για κινήσεις επάνω σε άξονα x όλες οι δυνάμεις της μορφής $F = F(x)$ είναι διατηρητικές.*

3.2.3 Δύναμη η οποία δίνεται από δυναμική ενέργεια

Για μία δύναμη η οποία εξαρτάται μόνο από την θέση $F = F(x)$, έχουμε ορίσει δυναμική ενέργεια $U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')dx'$. Από τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας προκύπτει η δύναμη ως

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}. \tag{3.2.8}$$

Είναι συχνά δυνατό να γνωρίζουμε την δυναμική ενέργεια για κάποιο πρόβλημα, οπότε η παραπάνω σχέση θα μας δώσει την αντίστοιχη δύναμη. Ως παραδείγματα δείτε την βαρυτική δυναμική ενέργεια $U(y) = mgy$ και δύναμη: $F = -d(mgy)/dy = -mg$ και την δυναμική ενέργεια ελαστικότητας $U(x) = (1/2)kx^2$ από την οποία προκύπτει η δύναμη $F = -d[(1/2)kx^2]/dx = -kx$.

Παρατήρηση 3.2.6. *Σε μία γραφική παράσταση για την δυναμική ενέργεια, όπως στο Σχ. 3.4, η δύναμη $F(x)$ προκύπτει από την κλίση αυτής της καμπύλης σε κάθε σημείο της.*

Ας εξετάσουμε ακόμα μία φορά την συνάρτηση της ενέργειας την οποία εξάγαμε στην Εξ. (3.2.5). Αφού αυτή είναι μία σταθερή στον χρόνο συνάρτηση αν την παραγωγίσουμε ως προς t παίρνουμε

$$mv\frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow mv\frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx}v = 0 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F. \tag{3.2.9}$$

Παρατήρηση 3.2.7. *Η παραγώγιση της συνάρτησης της ενέργειας μας δίνει μία εξίσωση για την δύναμη. Αυτή είναι ο νόμος του Νεύτωνα.*

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο διότι η ενέργεια προέκυψε από ολοκλήρωση του νόμου Νεύτωνα.

3.2.4 Γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας

Μπορούμε να γράψουμε την σχέση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (3.2.6) στη μορφή

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \Rightarrow v^2 = \frac{2}{m}\left[E_0 - U(x)\right], \qquad E_0 : \text{σταθερά}. \tag{3.2.10}$$

Αν η σταθερή ολική ενέργεια E_0 είναι δεδομένη, τότε η παραπάνω σχέση δίνει μία σχέση μεταξύ ταχύτητας v και θέσης x του κινητού. Δηλαδή, η ταχύτητα είναι γνωστή για κάθε θέση του κινητού. Αφού η κινητική ενέργεια εξαρτάται μόνο από το τετράγωνο της ταχύτητας, η ταχύτητα μπορεί να είναι είτε προς τα δεξιά είται προς τα αριστερά (το πρόσημό της δεν προσδιορίζεται από την εξίσωση για την ενέργεια):

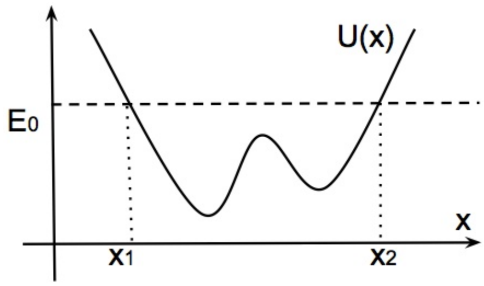
$$v(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U(x)\right]}. \tag{3.2.11}$$

Από τον ορισμό της κινητικής ενέργειας έχουμε $K \geq 0$, οπότε προκύπτει η συνθήκη

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \geq U(x). \tag{3.2.12}$$

Η αναγκαιότητα αυτής της συνθήκης διαφαίνεται και στην Εξ. (3.2.11), η οποία εκφράζει την συνθήκη να είναι πραγματικός αριθμός η ταχύτητα.

Οι παρατηρήσεις που κάναμε παραπάνω γίνονται πιο κατανοητές αν παρασταθούν γραφικά. Στο Σχ. 3.4 σχεδιάζουμε τη δυναμική ενέργεια $U = U(x)$ και επίσης την απλή γραφική παράσταση $E = E_0$ (μία οριζόντια ευθεία γραμμή). Στα σημεία x στα οποία $E_0 > U(x)$ είναι επιτρεπτή η κίνηση, δηλαδή, η ταχύτητα είναι $v^2 > 0$. Αντιθέτως, στα υπόλοιπα σημεία δεν επιτρέπεται η κίνηση (διότι εκεί η κινητική ενέργεια θα ήταν αρνητική, πράγμα που δεν θα ήταν αποδεκτό). Στο Σχ. 3.4 η κίνηση



Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση δυναμικής ενέργειας $U(x)$ (συνεχής γραμμή). Η τιμή της ολικής μηχανικής ενέργειας θεωρούμε ότι είναι E_0 (διακεκομμένη γραμμή). Η κίνηση επιτρέπεται στα σημεία x όπου $x_1 \leq x \leq x_2$.

επιτρέπεται στα σημεία x στο διάστημα $x_1 \leq x \leq x_2$. Μία ειδική χρήσιμη περίπτωση είναι τα σημεία x για τα οποία $K(x) = 0$. Στο Σχ. 3.4 τέτοια σημεία είναι τα $x = x_1$ και $x = x_2$. Εκεί το σωμάτιο βρίσκεται σε ακινησία $v(x = x_1) = 0,\ v(x = x_2) = 0$.

Συνοπτικά, έχουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις

- Στα x όπου $E_0 < U(x)$ θα είχαμε $K(x) < 0$ που είναι αδύνατο, άρα το σωμάτιο δεν μπορεί να βρεθεί σε τέτοια σημεία (είναι τα $x < x_1$ και $x > x_2$ στο παράδειγμα του Σχ. 3.4).
- Στα x όπου $E_0 > U(x)$ θα έχουμε $K(x) > 0$ και άρα το σωμάτιο είναι δυνατόν να βρεθεί σε αυτές τις περιοχές (είναι τα $x_1 < x < x_2$ στο παράδειγμα του Σχ. 3.4).
- Στα $x = x_{1,2}$ όπου $E_0 = U(x)$ έχουμε $K(x) = 0 \Rightarrow v^2 = 0$ άρα το σωμάτιο βρίσκεται στιγμιαία, σε αυτά τα σημεία, με μηδενική ταχύτητα.

Για να έχουμε την πλήρη εικόνα της κίνησης μπορούμε να υποθέσουμε, σε κάποια χρονική στιγμή, σωμάτιο με ταχύτητα $v > 0$ (δηλ., κινείται προς τα δεξιά). Η ταχύτητα παραμένει υποχρεωτικά μημηδενική (αφού $K = E_0 - U(x) > 0$) σε όλο το διάστημα $x_1 < x < x_2$ μέχρι το σωμάτιο να φθάσει σε σημείο $x = x_2$. Στο σημείο εκείνο είναι $v = 0$, δηλαδή έχουμε στιγμιαία ακινησία. Η επιτάχυνση γνωρίζουμε ότι είναι ανάλογη της δύναμης $-dU/dx(x = x_2) < 0$, άρα το σωμάτιο θα αποκτήσει $v < 0$ σε επόμενη χρονική στιγμή. Δηλαδή, το σωμάτιο δεν θα παραμείνει σε ακινησία, αλλά θα αρχίσει να κινείται αριστερά. Όταν, μετά από κάποιο χρόνο, φθάσει στο $x = x_1$ θα έχουμε και πάλι $v = 0$. Η επιτάχυνση θα είναι ανάλογη της $-dU/dx(x = x_1) > 0$, ώστε η κίνηση θα αναστραφεί και πάλι, αυτή τη φορά προς τα δεξιά.

Παρατήρηση 3.2.8. *Τα σημεία $x = x_{1,2}$, όπου $E_0 = U(x_{1,2})$, είναι σημεία αναστροφής της κίνησης.*

Στην περίπτωση που έχουμε δύο σημεία αναστροφής της κίνησης (όπως στο παράδειγμα του Σχ. 3.4), το σωμάτιο θα αναστρέφει την κίνησή του κάθε φορά που θα φθάνει στα σημεία αναστροφής. Έτσι θα κινείται παλινδρομικά μεταξύ των δύο αυτών σημείων. Ισχύει μάλιστα το ακόλουθο.

Παρατήρηση 3.2.9. *Εφόσον για κάθε θέση x του σωματίου, η ταχύτητα v είναι καθορισμένη, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η κίνηση που θα εκτελεί θα είναι ακριβώς η ίδια κάθε φορά που θα περνάει από το ίδιο σημείο κατά την παλινδρομική του κίνηση. Δηλαδή θα εκτελεί περιοδική κίνηση. Μία τέτοια κίνηση ονομάζεται ταλαντωτική κίνηση (ταλάντωση).*

Παρατήρηση 3.2.10. *Αν προς την κατεύθυνση κίνησης δεν υπάρχει σημείο αναστροφής τότε το σωμάτιο θα συνεχίσει να κινείται επ' άπειρον προς την ίδια κατεύθυνση.*

3.2.5 Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Ως μία εφαρμογή των ιδεών οι οποίες αναπτύχθηκαν στο υποκεφάλαιο 3.2.4 ας θεωρήσουμε ότι σε ένα σωμάτιο με μάζα m ασκείται δύναμη η οποία προέρχεται από ένα ελαστικό μέσο (δύναμη ελατηρίου)

$$F = -kx$$

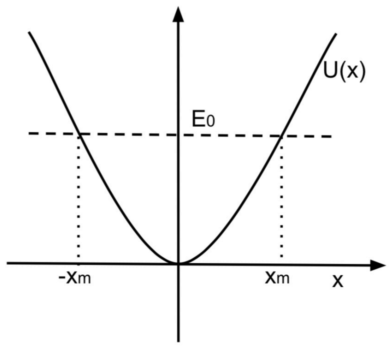
και η δυναμική ενέργεια του σωματίου είναι

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Η διατήρηση της ενέργειας εκφράζεται ως

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{3.2.13}$$

όπου το E_0 είναι μία σταθερά. Στο σχήμα 3.5 δίνουμε την γραφική παράσταση της $V(x)$. Παρατηρήστε ότι η τιμή της ολικής ενέργειας πρέπει να επιλεγεί $E_0 \geq 0$. Οποιαδήποτε επιλογή $E_0 < 0$ δεν θα μπορούσε να ικανοποιήσει την Εξ. (3.2.13) για κανένα x. Η ειδική επιλογή $E_0 = 0$ θα έδινε ότι το σωμάτιο μπορεί να βρίσκεται μόνο στην θέση $x = 0$ με ταχύτητα $v = 0$.



Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Για ολική ενέργεια $E = E_0$, το κινητό βρίσκεται στο διάστημα $-x_m \leq x \leq x_m$.

Μπορούμε να λύσουμε την Εξ. (3.2.13) ως προς την ταχύτητα και παίρνουμε

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(E_0 - \frac{1}{2}k\,x^2\right) = \frac{k}{m}\left(\frac{2E_0}{k} - x^2\right). \tag{3.2.14}$$

Αυτή δίνει την ταχύτητα v για κάθε θέση x του σωματίου, δηλαδή, η ταχύτητα του σωματιδίου είναι, σε αυτό το πρόβλημα, η ίδια κάθε φορά που το σώμα βρίσκεται σε μία θέση x. Ορίζουμε τις ποσότητες ω, x_m από τις

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \qquad x_m^2 = \frac{2E_0}{k} \tag{3.2.15}$$

και η Εξ. (3.2.16) γράφεται

$$v^2 = \omega^2(x_m^2 - x^2) \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{x_m^2 - x^2}. \tag{3.2.16}$$

Για να είναι η ταχύτητα πραγματικός αριθμός πρέπει

$$x^2 \leq x_m^2 \Rightarrow -x_m \leq x \leq x_m, \tag{3.2.17}$$

δηλαδή, το σώμα μπορεί να κινηθεί μέσα στο παραπάνω διάστημα το οποίο λέγεται ζώνη κίνησης. Η κίνηση του σώματος θα είναι περιοδική, σύμφωνα με αυτά που είδαμε στο υποκεφάλαιο 3.2.4. Η κίνηση αυτή ονομάζεται και *ταλάντωση* και το x_m λέγεται *πλάτος ταλάντωσης*.

Στο σχήμα 3.5 μελετάμε γραφικά την ανισότητα (3.2.17). Κάνουμε την γραφική παράσταση της $U(x)$ και θέτουμε στο ίδιο γράφημα την ευθεία $E = E_0 \geq 0$, ώστε εύκολα μπορούμε να δούμε τα όρια της κίνησης, δηλαδή, το διάστημα στο οποίο ικανοποιείται η συνθήκη $E_0 \geq U(x) \Rightarrow -x_m \leq x \leq x_m$. Η ταχύτητα υ μηδενίζεται στα όρια της ταλαντωτικής κίνησης $x = \pm x_m$. Στα σημεία αυτά μάλιστα αλλάζει φορά η ταχύτητα (στιγμιαία το σωμάτιο είναι ακίνητο).

Επιστρέφουμε στην Εξ. (3.2.16) και γράφουμε την ταχύτητα ως παράγωγο της θέσης (ας δούμε εδώ μόνο την περίπτωση του θετικού προσήμου)

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{x_m^2 - x^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x_m^2 - x^2}} = \int \omega dt. \tag{3.2.18}$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$x = x_m \sin z \Rightarrow dx = x_m \cos z, \quad x_m^2 - x^2 = A^2(1 - sin^2 z) = x_m^2 \cos^2 z.$$

Η Εξ. (3.2.18) γίνεται

$$\int dz = \int \omega dt \Rightarrow z = \omega t + \phi.$$

όπου ϕ είναι σταθερά. Αν πάρουμε και στα δύο μέλη το ημίτονο και πολλαπλασιάσουμε με x_m παίρνουμε την λύση

$$.x(t) = x_m \sin(\omega t + \phi). \tag{3.2.19}$$

Σημειώστε ότι αν είχαμε χρησιμοποιήσει το αρνητικό πρόσημο στην (3.2.16) θα είχαμε εδώ ένα αρνητικό πρόσημο στο ω. Η ταχύτητα του σωματίου είναι

$$\upsilon(t) = \omega x_m \cos(\omega t + \phi). \tag{3.2.20}$$

Την στιγμή $t = 0$ το σωμάτιο έχει θέση και ταχύτητα

$$x_0 = x_m \sin\phi, \quad \upsilon_0 = \omega x_m \cos\phi \tag{3.2.21}$$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν την φυσική σημασία της σταθεράς ϕ μέσω της οποίας καθορίζονται η αρχική θέση και η ταχύτητα του σώματος. Η θέση (3.2.19) του ταλαντούμενου σώματος γράφεται και ως

$$x(t) = x_m \cos(\omega t)\sin\phi + x_m \sin(\omega t)\cos\phi.$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.2.21) έχουμε την μορφή

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\upsilon_0}{\omega}\sin(\omega t) \tag{3.2.22}$$

στην οποία εμφανίζονται ως σταθερές μόνο η αρχική θέση και ταχύτητα του σώματος.

Κλείνουμε αυτό το υποκεφάλαιο κοιτάζοντας πιο γενικά τις περιπτώσεις που εξετάσαμε στο προηγούμενο πρόβλημα. Η ολική ενέργεια του σώματος E_0 είναι μία παράμετρος και μπορεί να έχει διαφορετικές τιμές (π.χ., ένα σώμα μπορεί να έχει μικρή ή μεγάλη αρχική ταχύτητα πράγμα που καθορίζει την ολική του ενέργεια). Ας δούμε λοιπόν τι συμβαίνει όταν αλλάζει η τιμή E_0. Στην περίπτωση του Σχ. 3.5 θα έχουμε δύο σημεία αναστροφής της κίνησης για κάθε $E_0 > 0$. Στην περίπτωση του Σχ. 3.4 μπορεί να έχουμε δύο ή τέσσερα σημεία αναστροφής της κίνησης. Ας δούμε την ειδική περίπτωση που το E_0 είναι ίσο με την τιμή ενός ελαχίστου της $U(x)$, έστω στην θέση $x = x_0$. Δηλαδή, ας πάρουμε $E_0 = U(x_0)$. Τότε το σωμάτιο θα βρίσκεται υποχρεωτικά στην θέση αυτού του ελαχίστου και μόνο εκεί, αφού σε οποιοδήποτε άλλο σημείο είναι $E \leq U(x)$. Δηλαδή, το σωμάτιο θα παραμένει στατικό στην θέση $x = x_0$.

Παράδειγμα 3.2.7. Ας πάρουμε την δυναμική ενέργεια $U(x) = \frac{1}{2}k(x-1)^2(x-2)^2$ και ας υποθέσουμε σωμάτιο με ολική ενέργεια $E_0 = 0$. Τότε έχουμε

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x-1)^2(x-2)^2 = 0.$$

Αυτό είναι δυνατόν να συμβεί μόνο για $v = 0$ και $x = 1$ ή $x = 2$. Άρα, ένα σωμάτιο με ολική ενέργεια $E_0 = 0$ θα βρίσκεται στατικό σε μία από τις θέσεις $x = 1$ ή $x = 2$.

Αν σχεδιάσουμε την οριζόντια ευθεία $E = 0$ στο Σχ. 3.5 αυτή εφάπτεται της γραφικής παράστασης της $U(x)$ στις θέσεις των ελαχίστων $x = 1$ και $x = 2$. □

3.3 Κίνηση σε δύο και τρεις διαστάσεις

3.3.1 Εξισώσεις Νεύτωνα σε τρεις διαστάσες

Προχωρούμε στην διατύπωση του νόμου Νεύτωνα στις τρεις διαστάσεις ο οποίος είναι άλλωστε ο φυσικότερος χώρος για να μελετήσουμε προβλήματα της Φυσικής. Γράφουμε σε διανυσματική μορφή

$$m\vec{a} = \vec{F}, \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \tag{3.3.1}$$

Αναλυτικότερα, έχουμε, π.χ.,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \tag{3.3.2}$$

Σε μία γενική περίπτωση οι τρεις συνιστώσες της δύναμης είναι δυνατόν να εξαρτώνται και από τις τρεις συντεταγμένες t καθώς επίσης και από τον χρόνο t. Δηλαδή θα έχουμε $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r})$ και αναλυτικότερα

$$F_x = F_x(t, x, y, z), \quad F_y = F_y(t, x, y, z), \quad F_z = F_z(t, x, y, z).$$

Η δύναμη μπορεί φυσικά να εξαρτάται και από τις συνιστώσες της ταχύτητας v_x, v_y, v_z.

3.3.2 Ανεξαρτησία των κινήσεων

Στην περίπτωση που η εξάρτηση των συνιστωσών της δύναμης είναι της μορφής $F_x = F_x(t, x, v_x),\ F_y = F_y(t, y, v_y),\ F_z = F_x(t, z, v_z)$, τότε έχουμε τρία ανεξάρτητα προβλήματα τα οποία θα μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια για μονοδιάστατες κινήσεις. Τότε λέμε ότι έχουμε *ανεξαρτησία των κινήσεων* στις τρεις διαστάσεις. Για παράδειγμα, μία δύναμη της μορφής $\vec{F} = ax^2\,\hat{\imath} + by^3\,\hat{\jmath} + c\,\hat{k}$, όπου a, b, c είναι σταθερές δίνει ανεξαρτησία κινήσεων. Αντιθέτως, για μία δύναμη της μορφής $\vec{F} = axy\,\hat{\imath} + bxy^2\,\hat{\jmath} + cxyz\,\hat{k}$, δεν έχουμε ανεξαρτησία κινήσεων. Όταν δεν έχουμε ανεξαρτησία των κινήσεων αυτό θα σημαίνει ότι για να μελετήσουμε την κίνηση, π.χ., στην κατεύθυνση x θα πρέπει να γνωρίζουμε την κίνηση στην κατεύθυνση y αφού η F_x εξαρτάται όχι μόνο από την θέση x αλλά και από την y. Κάτι παρόμοιο μπορεί να συμβαίνει και για την κίνηση στις κατευθύνσεις y και z.

3.3.3 Βολές

Ας περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις και ας δούμε την ακόλουθη περίπτωση. Σωμάτιο μάζας m με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_{0,x}\hat{\imath} + v_{0,y}\hat{\jmath}$ έχει επιτάχυνση g προς τα κάτω λόγω της βαρύτητας, δηλαδή $\vec{a} = -g\hat{\jmath}$. Η εξ. Νεύτωνα είναι

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\,\hat{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} & = 0 \\ m\frac{dv_y}{dt} & = -mg. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Βλέπουμε ότι έχουμε ανεξαρτησία των κινήσεων, αφού μπορούμε να μελετήσουμε χωριστά την οριζόντια και την κατακόρυφη κίνηση.

Για την κίνηση στον άξονα x έχουμε

$$v_x = v_{0,x}. \tag{3.3.4}$$

Για την θέση έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = v_{0,x} \Rightarrow x = v_{0,x}t + x_0, \tag{3.3.5}$$

όπου x_0 η αρχική συντεταγμένη του σώματος του σώματος στον άξονα x.

Για την κίνηση στον άξονα y έχουμε

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \Rightarrow v_y = -gt + v_{0,y}. \tag{3.3.6}$$

Για την θέση έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_{0,y} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t + y_0, \tag{3.3.7}$$

όπου y_0 η αρχική συντεταγμένη του σώματος στον άξονα y.

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση της *τροχιάς*, δηλαδή τη σχέση μεταξύ x και y. Απαλοίφουμε τον χρόνο μεταξύ των δύο εξισώσεων

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2(v_{0x})^2}x^2. \tag{3.3.8}$$

Παρατήρηση 3.3.1. *Τροχιά ονομάζουμε την καμπύλη στο επίπεδο xy την οποία διαγράφει το κινητό. Στο προηγούμενο παράδειγμα, αυτή είναι μία παραβολή.*

Παράδειγμα 3.3.1. Το βεληνεκές R βλήματος είναι η οριζόντια απόσταση που έχει διανύσει μέχρι να ξαναβρεθεί στο αρχικό του ύψος. Για να το βρούμε, θέτουμε στις εξισώσεις για την θέση του κινητού $y = y_0$, οπότε έχουμε $R = x - x_0$. Παίρνουμε

$$R = v_{0,x}t, \qquad 0 = v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Απαλοίφουμε τον χρόνο και έχουμε

$$R = \frac{2v_{0,x}v_{0,y}}{g}.$$

3.4 Διατηρητικές δυνάμεις

3.4.1 Θεώρημα έργου - ενέργειας για κίνηση σε τρεις διαστάσεις

Ας θεωρήσουμε ένα κινητό με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ για το οποίο ισχύει η διανυσματική εξίσωση κίνησης

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Ας υποθέσουμε ότι το κινητό διανύει μία απόσταση από αρχική θέση $\vec{r}_i$ σε τελική θέση $\vec{r}_f$. Θα ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης επάνω στην τροχιά του κινητού

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\frac{d\vec{v}}{dt}\, d\vec{r}. \tag{3.4.1}$$

Εδώ, έχουμε πάρει εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων με τις στοιχειώδεις μετατοπίσεις $d\vec{r}$ του κινητού.

Στο αριστερό μέλος εμφανίζεται η ποσότητα την οποία θα ονομάσουμε *έργο*,

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}. \tag{3.4.2}$$

Προσέξτε ότι το έργο ορίζεται μέσω εσωτερικού γινομένου, δηλαδή, πολλαπλασιάζεται η προβολή της δύναμης $\vec{F}$ επάνω στην τροχιά του σωματίου.

Στο δεξιό μέλος κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, χρησιμοποιώντας την $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$, και παίρνουμε

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}m\frac{d\vec{v}^2}{dt}\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)dt = \int_{K_i}^{K_f} dK$$

όπου K είναι η κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2, \tag{3.4.3}$$

Προσέξτε ότι για την K προκύπτει ο ίδιος ακριβώς ορισμός τον οποίο είχαμε ως τώρα, δηλαδή, αυτή ορίζεται να είναι ανάλογη του τετράγωνου του μέτρου της ταχύτητας. Στα ολοκληρώματα υποθέσαμε ότι η κίνηση συμβαίνει από χρόνο t_i έως t_f, κατά τον οποίο το κινητό διαγράφει τροχιά από σημείο $\vec{r}_i$ έως σημείο $\vec{r}_f$. Έστω ότι η αρχική ταχύτητα είναι $\vec{v}_i$ και η τελική $\vec{v}_f$, οπότε έχουμε το αποτέλεσμα

$$W = K_f - K_i$$

$$\text{ή}\quad \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2. \tag{3.4.4}$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει το θεώρημα έργου - ενέργειας για κίνηση σωματίου σε τρεις διαστάσεις.

Παρατήρηση 3.4.1. *Για δυνάμεις της μορφής $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας σώματος ισούται με το έργο της δύναμης κατά τη μετατόπιση του σώματος.*

Παρατήρηση 3.4.2. *Μόνο η συνιστώσα της δύναμης η παράλληλη στη μετατόπιση παράγει έργο, ενώ η κάθετη συνιστώση παράγει μηδενικό έργο.*

Παρατήρηση 3.4.3. *Στην περίπτωση κυκλικής κίνησης γνωρίζουμε ότι στο κινητό ασκείται δύναμη κάθετη στην ταχύτητά του (άρα κάθετη στο $d\vec{r}$). Μία τέτοια δύναμη δεν παράγει έργο. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του αλλάζει σε φορά αλλά όχι σε μέτρο, δηλαδή, δεν αλλάζει η κινητική του ενέργεια. Πραγματικά λοιπόν, μία τέτοια δύναμη που ασκείται κάθετα στην μετατόπιση του κινητού δεν αλλάζει την κινητική του ενέργεια και δεν παράγει έργο.*

3.4.2 Διατηρητικές δυνάμεις

Το Θ. έργου - ενέργειας (3.4.4) για κίνηση σε τρεις διαστάσεις είναι παρόμοιο με εκείνο σε μία διάσταση. Μπορούμε λοιπόν να αναρωτηθούμε αν είναι δυνατόν να ορίσουμε δυναμική ενέργεια για δυνάμεις $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Ας πάρουμε το έργο για διαδρομή από δεδομένο σημείο $\vec{r}_0$ σε τυχόν τελικό σημείο $\vec{r}$

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}'.$$

Αυτό είναι, βέβαια, συνάρτηση του $\vec{r}$, μπορεί όμως να εξαρτάται επίσης και από την διαδρομή η οποία ακολουθήθηκε από το $\vec{r}_0$ στο $\vec{r}$ και φυσικά αυτή δεν είναι μονοσήμαντη. Άρα, μία δεδομένη συνάρτηση $U = U(\vec{r})$ (η οποία θα οριζόταν ως δυναμική ενέργεια) δεν μπορεί να καλύψει, στην γενική περίπτωση, όλες τις δυνατές τιμές του έργου.

Παρατήρηση 3.4.4. *Για μία δύναμη στις τρεις διαστάσεις $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ δεν μπορούμε να ορίσουμε, στην γενική περίπτωση, μία συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U = U(\vec{r}) = U(x, y, z)$.*

(Υπενθυμίζουμε ότι, σε αντίθεση με την παραπάνω παρατήρηση, στην περίπτωση κίνησης σε μία διάσταση, το έργο για κάθε δύναμη της μορφής $F = F(x)$ μπορεί να δοθεί μέσω συνάρτησης δυναμικής ενέργειας $U(x)$.)

Σε ειδικές όμως περιπτώσεις δυνάμεων είναι δυνατόν να ορίσουμε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, σε αντιστοιχία με τον ορισμό που δώσαμε για κίνηση σε μία διάσταση. Θα αναζητήσουμε τέτοιες μορφές δυνάμεων για τις οποίες μπορεί να ορισθεί συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. Τα κατάλληλα θεωρήματα για να πετύχουμε τον σκοπό μας αποδεικνύονται στον διανυσματικό λογισμό. Εκεί μαθαίνουμε ότι μία διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z)$ για την οποία ισχύει $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ μπορεί να γραφεί ως η κλίση μίας βαθμωτής συνάρτησης $U(x, y, z)$

$$\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla} U(x, y, z). \tag{3.4.5}$$

Αυτή η βαθμωτή συνάρτηση U είναι για την ώρα άγνωστη, αλλά θα την βρούμε σε ορισμένες περιπτώσεις όπως θα δούμε παρακάτω.

Στον διανυσματικό λογισμό αποδεικνύεται επίσης και το εξής θεώρημα. Έστω μία βαθμωτή συνάρτηση $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μία καμπύλη η οποία ορίζεται σε διάστημα$\vec{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Ισχύει

$$\int_{\vec{c}} \vec{\nabla} U \cdot d\vec{s} = U(\vec{c}(b)) - U(\vec{c}(a)). \tag{3.4.6}$$

Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος είναι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της κλίσης της U (η οποία είναι μία διανυσματική συνάρτηση) επάνω στην καμπύλη $\vec{c}$. Στο δεξιό μέλος έχουμε τις τιμές της βαθμωτής συνάρτησης U στα δύο σημεία τα οποία είναι τα άκρα της καμπύλης, τα οποία ας ονομάσουμε A και B. Άρα, για κάθε καμπύλη $\vec{c}$ η οποία ενώνει τα ίδια σημεία A και B το αποτέλεσμα του επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι το ίδιο.

Ας δούμε τι σημαίνουν τα παραπάνω αποτελέσματα του διανυσματικού λογισμού για τις δυνάμεις και την ενέργεια. Αν για μία διανυσματική δύναμη $\vec{F}$ ισχύει $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, τότε μπορούμε να γράψουμε αυτήν την δύναμη ως

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \tag{3.4.7}$$

όπου η U είναι συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του συστήματος, σε αντιστοιχία με τον ορισμό που δώσαμε για κίνηση σε μία διάσταση. Η δυναμική ενέργεια δίνεται από την

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \tag{3.4.8}$$

όπου το δεξιό μέλος θεωρούμε ότι είναι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από σημείο $\vec{r}_0$ σε σημείο $\vec{r}$. Θεωρούμε το $\vec{r}_0$ ένα δεδομένο σημείο στον χώρο. Το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος εξαρτάται από το σημείο $\vec{r}$ και μόνο. Δεν εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθούμε από το αρχικό στο τελικό σημείο, σύμφωνα με την Εξ. (3.4.6) και την μορφή της δύναμης (3.4.7).

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ όταν ένα σώμα κινείται από θέση $\vec{r}_1$ σε θέση $\vec{r}_2$ μπορεί να γραφεί με την βοήθεια της U

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = -\Delta U. \tag{3.4.9}$$

Το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας στην Εξ. (3.4.4) παίρνει τώρα την μορφή

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + U(\vec{r}_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(\vec{r}_2). \tag{3.4.10}$$

Παρατήρηση 3.4.5. *Όταν στο σύστημα δρουν δυνάμεις οι οποίες μπορούν να δοθούν από συνάρτηση δυναμικής ενέργειας το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας παραμένει σταθερό κατά την κίνηση,*

$$E = K + U \ : \textit{σταθερό}.$$

Οι δυνάμεις οι οποίες μπορούν να περιγραφούν με την βοήθεια συνάρτησης δυναμικής ενέργειας λέγονται διατηρητικές δυνάμεις.

Το αποτέλεσμα που εκφράζει η Εξ. (3.4.9) μας επιτρέπει να πούμε τα ακόλουθα.

Παρατήρηση 3.4.6. *Το έργο που εκτελείται από μία διατηρητική δύναμη σε σωμάτιο που κινείται ανάμεσα σε δύο σημεία δεν εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθεί το σωματίδιο.*

Παρατήρηση 3.4.7. *Το έργο που εκτελείται από μία διατηρητική δύναμη σε σωμάτιο που κινείται κατά μήκος κάθε κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.*

3.4.3 Κεντρικές δυνάμεις

Μία σημαντική όσο και απλούστερη κατηγορία δυνάμεων στις τρεις διαστάσεις είναι αυτές της μορφής

$$\vec{F} = f(r)\,\hat{e}_{\mathrm{r}}, \tag{3.4.11}$$

όπου $\hat{e}_{\mathrm{r}} \equiv \vec{r}/r$ είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Εχουμε χρησιμοποιήσει σφαιρικές συντεταγμένες (ή πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο), οπότε η δύναμη εξαρτάται μόνο από την ακτινική συντεταγμένη r και το διάνυσμα $\vec{F}$ είναι ακτινικό.

Παρατήρηση 3.4.8. *Όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης είναι κεντρικές.*

Ας δούμε το έργο που παράγει μία ακτινική δύναμη κατά τη μετατόπιση υλικού σημείου από θέση $\vec{r}_i$ σε $\vec{r}_f$

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} f(r)\,\hat{e}_{\mathrm{r}} \cdot d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} f(r)dr, \tag{3.4.12}$$

όπου $dr = \hat{e}_{\mathrm{r}} \cdot d\vec{r}$ είναι η ακτινική μετατόπιση, δηλαδή, η προβολή της μετατόπισης $d\vec{r}$ στην ακτινική διεύθυνση. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής από την θέση $\vec{r}_i$ στην $\vec{r}_f$ (είναι ένα μονοδιάστατο ολοκλήρωμα που εξαρτάται μόνο από τα r_i, r_f).

Παρατήρηση 3.4.9. *Όλες οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές.*

Μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας με βάση την Εξ. (3.4.12). Αυτή είναι ακριβώς ανάλογη με την εξίσωση που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό δυναμικής ενέργειας για μονοδιάστατες κινήσεις και τώρα η (μοναδική) μεταβλητή είναι η ακτινική r. Ορίζουμε την δυναμική ενέργεια

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r')dr' \tag{3.4.13}$$

όπου r_0 είναι μία σταθερά. Η δύναμη προκύπτει από την δυναμική ενέργεια, όπως και στα γνωστά μονοδιάστατα προβλήματα, $f(r) = -dU/dr$.

Παράδειγμα 3.4.1. Σχεδιάστε, στο επίπεδο, το πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \, \frac{R}{r} \, \hat{e}_{\mathrm{r}}.$$

Χρησιμοποιήστε ένα πακέτο γραφικών (π.χ., matlab).

Η δυναμική ενέργεια είναι

$$U(r) = -F_0 R \ln(r).$$

Παράδειγμα 3.4.2. Σχεδιάστε, στο επίπεδο xy, το πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \, \frac{x}{x_0} \, \hat{\jmath},$$

όπου $F_0 = 1\,\mathrm{N}, x_0 = 1\,\mathrm{m}$. (α) Υπολογίστε το έργο της δύναμης στην κλειστή διαδρομή $(1,1) \to (-1,1) \to (-1,-1) \to (1,-1) \to (1,1)$. (β) Είναι διατηρητικό αυτό το πεδίο δυνάμεων;
Λύση. (α)

$$W = 4\,\mathrm{J}.$$

(β) Δεν είναι διατηρητικό πεδίο δυνάμεων, διότι το έργο που παράγεται εξαρτάται από την διαδρομή (αυτό διατυπώνεται ισοδύναμα με την πρόταση ότι σε μία κλειστή διαδρομή το έργο που παράγεται είναι $W \neq 0$).

Κεφάλαιο 4

Δυναμική πολλών σωμάτων

4.1 Ορμή

4.1.1 Ορμή συστήματος δύο σωμάτων

Ο 2ος νόμος Νεύτωνα για ένα σωμάτιο μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{p} = m\vec{v}. \tag{4.1.1}$$

Ονομάζουμε την ποσότητα $\vec{p}$ *ορμή* του σωματίου. Η Εξ. (4.1.1) εκφράζει το αποτέλεμσα ότι η ορμή σωματίου αλλάζει μόνο υπό την επίδραση δύναμης. Ειδικότερα, η δύναμη δίνει τον ρυθμό μεταβολής της ορμής.

Ας θεωρήσουμε δύο σωμάτια με ορμές $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ και $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$. Οι δυνάμεις που ασκούν το ένα στο άλλο είναι $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ σύμφωνα με τον 3ο νόμο Νεύτωνα. Απουσία άλλης δύναμης ισχύουν οι

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \qquad \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0. \tag{4.1.2}$$

Ορίζουμε την ολική ορμή δύο σωμάτων

$$\vec{p}_{\rm tot} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \tag{4.1.3}$$

και η Εξ. (4.1.2) εκφράζει την ακόλουθη πρόταση.

Παρατήρηση 4.1.1. *Η ολική ορμή δύο σωμάτων διατηρείται (μένει αμετάβλητη) όταν αυτά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (και μόνο μεταξύ τους).*

Παράδειγμα 4.1.1. Ας υποθέσουμε δύο ίδια ηλεκτρικά φορτία τα οποία είναι αρχικά ακίνητα σε μία απόσταση μεταξύ τους. Οι απωστικές δυνάμεις που ασκούν το ένα στο άλλο θα τα θέσουν σε κίνηση. Θα απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ίσες και αντίθετες ταχύτητες διατηρώντας έτσι την ολική ορμή ίση με μηδέν.

Αν υποθέσουμε τώρα την ύπαρξη μίας εξωτερικής δύναμης $\vec{F}_1$ η οποία επιταχύνει το σωμάτιο 1 και μίας $\vec{F}_2$ η οποία επιταχύνει το 2. Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κίνησης (μία για κάθε σωμάτιο) και έχουμε το αποτέλεσμα

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{4.1.4}$$

Παρατήρηση 4.1.2. *Ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ορμής δύο σωμάτων είναι ίσος με το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που τους ασκούνται.*

Παράδειγμα 4.1.2. Διαστημόπλοιο μάζας M με αρχική ταχύτητα $\vec{V}$ εκρήγνυται σε δύο μέρη ίσης μάζας. Μετά την έκρηξη το ένα κομμάτι κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_1 = (10^3\,\mathrm{m/sec})\,\hat{\imath}$ και το άλλο με $\vec{v}_2 = (2\times 10^3\,\mathrm{m/sec})\,\hat{\jmath}$. Ποια η ταχύτητα $\vec{V}$ του διαστημοπλοίου πριν την έκρηξη;
Λύση. Υποθέτουμε ότι στο διαστημόπλοιο δεν ασκείται εξωτερική δύναμη. Ασκήθηκαν μόνο εσωτερικές δυνάμεις οι οποίες προκάλεσαν την έκρηξη. Άρα, ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την έκρηξη. Αν γράψουμε m_1, m_2 τις μάζες των δύο κομματιών μετά την έκρηξη, έχουμε

$$M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M}.$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου πριν την έκρηξη είναι ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του μετά την έκρηξη. Ισχύει $M = m_1 + m_2,\ m_1 = m_2$ και άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (0.5\times 10^3\ \mathrm{m/sec})\,\hat{\imath} + (10^3\,\mathrm{m/sec})\,\hat{\jmath}.$$

4.1.2 Ορμή συστήματος n σωμάτων

Ας θεωρήσουμε n σωμάτια στα οποία ασκούνται δυνάμεις από το ένα στο άλλο, $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}, \vec{F}_{13}, \vec{F}_{31}, \ldots$ και, γενικότερα, ζεύγη δυνάμεων $\vec{F}_{ij}, \vec{F}_{ji}$ από το σωμάτιο i στο j και αντίστροφα. Επίσης, θεωρούμε ότι ασκούνται και δυνάμεις από εξωτερικά του συστήματος αίτια σε κάθε ένα από τα σωμάτια $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$. Γράφουμε την εξίσωση κίνησης για κάθε ένα από αυτά τα σωμάτια και αθροίζουμε τους ρυθμούς μεταβολής των ορμών, όπως κάναμε για την περίπτωση δύο σωματίων. Παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \tag{4.1.5}$$

Στο άθροισμα των δυνάμεων δεν συμμετέχουν οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των n σωμάτων, διότι αυτές εμφανίζονται κατά ζεύγη με μηδενικό διανυσματικό άθροισμα.

Ορίζουμε την ολική ορμή του συστήματος σωμάτων

$$\vec{p}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i \tag{4.1.6}$$

και το διανυσματικό άθροισμα όλων των *εξωτερικών* δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε ένα από τα σωμάτια

$$\vec{F}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \tag{4.1.7}$$

Ισχύει

$$\frac{d\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{dt} = \vec{F}_{\mathrm{tot}}. \tag{4.1.8}$$

Παρατήρηση 4.1.3. *(α) Η ολική ορμή συστήματος σωματίων μεταβάλλεται από την συνισταμένη δύναμη σε όλα τα σωμάτια. (β) Αν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, η ολική ορμή διατηρείται. (γ) Αν μία συνιστώσα της δύναμης είναι μηδέν τότε η αντίστοιχη συνιστώσα της ορμής διατηρείται.*

4.2 Δυναμική του κέντρου μάζας

4.2.1 Κέντρο μάζας

Για ένα σύστημα σωματίων η πλήρης περιγραφή της δυναμικής του απαιτεί την περιγραφή της κίνησης κάθε σωματίου, άρα μπορεί να είναι περίπλοκη. Για να κάνουμε μία γενική περιγραφή της κίνησης, παραλείποντας τις λεπτομέρειες της κίνησης κάθε ενός σωματίου χρειαζόμαστε την έννοια του *κέντρου μάζας*. Αυτό ορίζεται να είναι η μέση θέση των μαζών των σωματίων. Για δύο μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται στις θέσεις x_1, x_2 η θέση του κέντρου μάζας ορίζεται ως

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{4.2.1}$$

Για την περίπτωση σωμάτων ίσης μάζας $m_1 = m_2 = m$ παίρνουμε $x_{\text{cm}} = (x_1 + x_2)/2$, δηλαδή το κέντρο μάζας βρίσκεται στη μέση της απόστασης μεταξύ των δύο σωμάτων. Στην περίπτωση $m_1 \gg m_2$ τότε $x_{\text{cm}} \approx x_1$, δηλαδή το κέντρο μάζας βρίσκεται πλησιέστερα στη μεγαλύτερη μάζα.

Αν ορίσουμε την συνολική μάζα $M = m_1 + m_2$, τότε γράφουμε

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}. \tag{4.2.2}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό του κέντρου μάζας για n μάζες.

Παρατήρηση 4.2.1. (Κέντρο μάζας σε μία διάσταση) *Το κέντρο μάζας n μαζών m_i, $i = 1, \ldots, n$ ορίζεται ως*

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{4.2.3}$$

όπου $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ είναι η ολική μάζα του συστήματος.

Ορίζουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας ως εξής

$$v_{\text{cm}} = \frac{dx_{\text{cm}}}{dt} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_n v_n}{M} \tag{4.2.4}$$

και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας

$$a_{\text{cm}} = \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n}{M}. \tag{4.2.5}$$

Για n σωμάτια σε τρεις διαστάσεις, με θέσεις $\vec{r}_i = x_i \hat{\imath} + y_i \hat{\jmath} + z_i \hat{k}$, ορίζουμε την θέση του κέντρου μάζας $\vec{r}_{\text{cm}} = (x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}}, z_{\text{cm}})$, όπου

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{4.2.6}$$

Στην περίπτωση στερεών σωμάτων δεν έχουμε διαχωρισμένες μάζες m_i αλλά μπορούμε να υποθέσουμε ότι το στερεό χωρίζεται σε μικρά κομμάτια με μάζες dm. Έχουμε τον γενικευμένο ορισμό για την θέση κέντρου μάζας

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int x\, dm, \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int y\, dm, \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int z\, dm, \tag{4.2.7}$$

όπου M είναι η ολική μάζα του στερεού. Αν έχουμε σώμα με πυκνότητα ρ τότε είναι

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho\, dV \tag{4.2.8}$$

και μπορούμε να γράψουμε

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{\int x\,\rho dV}{\int \rho dV}, \quad y_{\mathrm{cm}} = \frac{\int y\,\rho dV}{\int \rho dV}, \quad z_{\mathrm{cm}} = \frac{\int z\,\rho dV}{\int \rho dV}. \tag{4.2.9}$$

Στην περίπτωση ομογενούς σώματος (σταθερή πυκνότητα) έχουμε

$$M = \rho V, \tag{4.2.10}$$

ώστε αντικαθιστώντας στον ορισμό του κέντρου μάζας παίρνουμε

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{V}\int x\,dV, \quad y_{\mathrm{cm}} = \ldots, \quad z_{\mathrm{cm}} = \ldots. \tag{4.2.11}$$

Παράδειγμα 4.2.1. Έχουμε μία ράβδο με τετραγωνική διατομή πλευράς a και με μήκος L. Η ράβδος καταλαμβάνει το χωρίο $-a/2 \le x, y \le a/2$, $0 \le z \le L$. Η πυκνότητα της ράβδου είναι ρ για $0 \le z \le L/2$ και 2ρ για για $L/2 \le z \le L$. Βρείτε την θέση του κέντρου μάζας της.
Λύση. Η μάζα της ράβδου είναι

$$M = a^2\frac{L}{2}\rho + a^2\frac{L}{2}(2\rho) = \frac{3}{2}\rho a^2 L.$$

Υπολογίζουμε

$$\iiint x dV = \ldots.$$

Άρα έχουμε

$$x_{\mathrm{cm}} =, \quad y_{\mathrm{cm}} =, \quad z_{\mathrm{cm}} = .$$

4.2.2 Εξωτερικές δυνάμεις

Μπορούμε να δούμε ότι η ολική ορμή για n σωμάτια γράφεται και ως

$$\vec{p}_{\mathrm{tot}} = m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_n\vec{v}_n = M\vec{v}_{\mathrm{cm}}, \tag{4.2.12}$$

όπου $\vec{v}_{\mathrm{cm}}$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Άρα, η εξίσωση κίνησης (4.1.8) γράφεται

$$M\frac{d\vec{v}_{\mathrm{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\mathrm{tot}} \Rightarrow M\vec{a}_{\mathrm{cm}} = \vec{F}_{\mathrm{tot}}, \tag{4.2.13}$$

όπου $\vec{a}_{\mathrm{cm}}$ είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας.

Παρατήρηση 4.2.2. *Το άθροισμα των δυνάμεων που εφαρμόζονται στα μέρη συστήματος σωμάτων δρα όπως μία δύναμη η οποία εφαρμόζεται σε σώμα με μάζα ίση με την συνολική μάζα του συστήματος M και το οποίο βρίσκεται στην θέση του κέντρου μάζας των σωμάτων.*

Τέλος, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Νεύτωνα για την θέση του κέντρου μάζας

$$M\frac{d^2\vec{r}_{\mathrm{cm}}}{dt^2} = \vec{F}_{\mathrm{tot}}. \tag{4.2.14}$$

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω $n = 3$ σώματα με μάζες m_1, m_2, m_3 στο πεδίο βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης. Γράψτε την εξίσωση για την κίνηση του κέντρου μάζας τους.
Λύση. Αν $M = m_1 + m_2 + m_3$ η συνολική μάζα τότε ισχύει

$$M\frac{d^2\vec{r}_{\mathrm{cm}}}{dt} = -m_1 g\,\hat{\jmath} - m_2 g\,\hat{\jmath} - m_3 g\,\hat{k} \Rightarrow M\frac{d^2\vec{r}_{\mathrm{cm}}}{dt} = -Mg\,\hat{\jmath} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}_{\mathrm{cm}}}{dt} = -g\,\hat{\jmath}.$$

Άρα, το κέντρο μάζας επιταχύνεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Σημειώστε ότι, αν τα σώματα αλληλεπιδρούν, κάθε ένα από αυτά μπορεί να διαγράφει μία περίπλοκη τροχιά.

4.2.3 Ορμή στο σύστημα κέντρου μάζας δύο σωμάτων και n σωμάτων

Έστω δύο σώματα με θέσεις $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ και η θέση του κέντρου μάζας $\vec{r}_{\rm cm}$. Ας περιγράψουμε τη δυναμική στο σύστημα του κέντρου μάζας. Οι θέσεις των σωματίων ως προς το κέντρο μάζας είναι

$$\vec{r}_1\prime = \vec{r}_1 - \vec{r}_{\rm cm}, \qquad \vec{r}_2\prime = \vec{r}_2 - \vec{r}_{\rm cm} \tag{4.2.15}$$

και οι αντίστοιχες ταχύτητες

$$\vec{v}_1\prime = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\rm cm}, \qquad \vec{v}_2\prime = \vec{v}_2 - \vec{v}_{\rm cm}. \tag{4.2.16}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι

$$\vec{v}_{\rm cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}, \tag{4.2.17}$$

ώστε

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1\prime &= \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1),\\
\vec{v}_2\prime &= \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).
\end{aligned}$$

Οι ορμές των σωμάτων στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι

$$\vec{p}_1\prime = -\mu\vec{v}, \qquad \vec{p}_2\prime = \mu\vec{v}, \tag{4.2.18}$$

όπου έχουμε ορίσει την ανηγμένη μάζα μ και τη σχετική ταχύτητα $\vec{v}$ του ενός σώματος ως προς το άλλο

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}, \qquad \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \tag{4.2.19}$$

Σημειώστε ότι η μ ορίζεται και από την

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \tag{4.2.20}$$

Παρατηρούμε, τέλος, ότι η ολική ορμή στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι

$$\vec{p}_1\prime + \vec{p}_2\prime = 0. \tag{4.2.21}$$

Αυτό προκύπτει από τις (4.2.18), αλλά και από τον ορισμό του κέντρου μάζας.

Μπορούμε να δούμε το ανάλογο αποτέλεσμα για την περίπτωση n σωμάτων, για τα οποία υποθέτουμε ταχύτητες v_i και ταχύτητες v_i' ως προς το κέντρο μάζας. Έχουμε

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\rm cm} + \vec{v}_i'. \tag{4.2.22}$$

Πολλαπλασιάζοντας με τις αντίστοιχες μάζες m_i και αθροίζοντας για όλα τα i έχουμε

$$\sum_{i=1}^n m_i v_i = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_{\rm cm} + \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = M\vec{v}_{\rm cm} + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i'. \tag{4.2.23}$$

Επειδή, όπως έχουμε δει, $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = M\vec{v}_{\rm cm}$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i' = 0. \tag{4.2.24}$$

Παρατήρηση 4.2.3. *Η συνολική ορμή ως προς το κέντρο μάζας είναι ίση με μηδέν (η ορμή του κέντρου μάζας ως προς το κέντρο μάζας είναι ίση με μηδέν).*

4.2.4 Συστήματα μεταβλητής μάζας

Ας υποθέσουμε ένα σώμα (π.χ., έναν άνθρωπο) το οποίο περιέχει ένα μικρότερο σώμα (π.χ., μία πέτρα την οποία κρατάει). Αν το μικρότερο σώμα εκτοξευθεί με μία ταχύτητα προς κάποια κατεύθυνση, τότε το μεγαλύτερο σώμα θα αποκτήσει ορμή προς την αντίθετη κάτεύθυνση: η ολική ορμή του συστήματος θα παραμείνει σταθερή.

Η προώθηση των πυραύλων γίνεται κατανοητή με την αρχή διατήρησης της ορμής, όπως την εφαρμόσαμε στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου. Τα καύσιμα εκτοξεύονται προς τα πίσω και έτσι επιτυγχάνεται η προώθηση του πυραύλου. Ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή t ο πύραυλος έχει μάζα (μαζί με τα καύσιμα) $M + \delta m$ και κινείται με ταχύτητα υ, οπότε η ορμή του είναι $p(t) = (M + \delta m)\upsilon$. Αν τα καυσαέρια με μάζα δm αποβληθούν (προς τα πίσω) με δεδομένη ταχύτητα υ_e ως προς τον πύραυλο, η ορμή τους (ως προς την Γη) θα είναι $\delta m(\upsilon - \upsilon_e)$. Επίσης, ο πύραυλος θα επιταχυνθεί και θα αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon + \delta\upsilon$ μετά από χρόνο δt. Η αρχή διατήρησης της ορμής $p(t) = p(t + \delta t)$ δίνει

$$(M + \delta m)\upsilon = M(\upsilon + \delta\upsilon) + \delta m(\upsilon - \upsilon_e) \Rightarrow M\delta\upsilon = \upsilon_e\delta m.$$

Η μάζα των καυσαερίων μειώνει την μάζα του πυραύλου, δηλαδή, μπορούμε να γράψουμε $\delta m = -\delta M$. Θεωρούμε απειροστές μεταβολές $dt, dM, d\upsilon$ και παίρνουμε

$$M d\upsilon = -\upsilon_e dM. \tag{4.2.25}$$

Εάν σε χρόνο t_i έχουμε αρχική μάζα πυραύλου M_i και σε χρόνο t_f έχουμε μάζα πυραύλου M_f (μετά την αποβολή καυσίμου), τότε είναι

$$\int_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} d\upsilon = -\upsilon_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \Rightarrow \upsilon_f = \upsilon_i + \upsilon_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right). \tag{4.2.26}$$

Μπορούμε να βρούμε την δύναμη την οποία δέχεται ο πύραυλος από τα καυσαέρια. Αυτή δίνεται από τον νόμο Νεύτωνα και βρίσκουμε, ξεκινώντας από την Εξ. (4.2.25),

$$M\frac{d\upsilon}{dt} = \left|\upsilon_e \frac{dM}{dt}\right|. \tag{4.2.27}$$

4.3 Κρούσεις

4.3.1 Ώθηση

Ο 2ος νόμος Νεύτωνα λέει ότι η ορμή μεταβάλλεται μόνο όταν δρα δύναμη. Η μεταβολή της ορμής είναι

$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt$$

όταν η δύναμη δρα για χρονικό διάστημα dt. Όταν δρα από χρόνο t_i σε t_f τότε έχουμε μεταβολή ορμής

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt.$$

Την ποσότητα αυτή ονομάζουμε *ώθηση*

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt. \tag{4.3.1}$$

Στην περίπτωση κρούσης μεταξύ σωμάτων μία δύναμη $\vec{F}$ δρα για πολύ μικρό διάστημα Δt. Μπορούμε τότε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι σταθερή για το μικρό αυτό διάστημα και η μεταβολή της ορμής του σώματος $\Delta\vec{p} = \vec{I}$ είναι

$$\vec{I} = \vec{F}\,\Delta t. \tag{4.3.2}$$

Επειδή η δύναμη κατά την κρούση είναι πολύ μεγάλη μπορούμε, κατά τον υπολογισμό της ώθησης, να αγνοήσουμε άλλες δυνάμεις που ασκούνται. Για παράδειγμα, όταν χτυπάμε μία μπάλα με ρακέτα η δύναμη της βαρύτητας μπορεί να αγνοηθεί για το μικρό χρονικό διάστημα Δt που διαρκεί το χτύπημα.

4.3.2 Ελαστική και ανελαστική κρούση

Θα δούμε την περίπτωση δύο σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 τα οποία κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και αλληλεπιδρούν όταν πλησιάσουν. Η δύναμη που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο του προσδίδει ώθηση, δηλαδή, μεταβάλλεται η ορμή τού κάθε σώματος. Λέμε τότε ότι συμβαίνει κρούση. Μετά την κρούση οι ταχύτητες έχουν μεταβληθεί σε $\vec{v}_1\prime, \vec{v}_2\prime$ και αυτές παραμένουν σταθερές εφόσον τα σωμάτια έχουν απομακρυνθεί το ένα από το άλλο.

Κατά τη διάρκεια της κρούσης, σύμφωνα με τον 3ο νόμο Νεύτωνα,

$$\vec{F}_1(t) = -\vec{F}_2(t).$$

Εφόσον δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα, δηλαδή το σύστημα είναι μονωμένο, έχουμε το νόμο διατήρησης της ολικής ορμής. Δηλαδή, για την ορμή πριν και μετά την κρούση έχουμε

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1\prime + \vec{p}_2\prime. \tag{4.3.3}$$

Στην περίπτωση που η κινητική ενέργεια διατηρείται, δηλαδή, για πριν και μετά την κρούση ισχύει

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2', \tag{4.3.4}$$

τότε η κρούση λέγεται *ελαστική*. Σε αντίθετη περίπτωση θα έχουμε

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' + W, \tag{4.3.5}$$

όπου W το έργο μη-διατηρητικών δυνάμεων. Σε τέτοια περίπτωση η κρούση λέγεται *ανελαστική* (ή μη-ελαστική).

Παράδειγμα 4.3.1. (Βαλλιστικό εκκρεμές) Βλήμα μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα v βάλλεται στην οριζόντια διεύθυνση κατά μεγάλου ξύλινου σώματος μάζας M το οποίο κρέμεται από αβαρές μη εκτατό νήμα και ηρεμεί στην κατακόρυφη θέση. Το βλήμα σφηνώνεται στο M και αυτό αιωρείται και φθάνει τελικά σε ύψος h ως προς την αρχική του θέση. Ποια η αρχική ταχύτητα του βλήματος;
Λύση. Αυτή είναι μία περίπτωση η οποία ονομάζεται *πλαστική κρούση*. Το συσσωμάτωμα βλήματος ξύλου κινείται με ταχύτητα έστω v_f αμέσως μετά την κρούση. Η διατήρηση της ορμής δίνει την

$$(m+M)v_f = mv \Rightarrow v_f = \frac{m}{m+M}\,v.$$

Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι

$$K = \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2.$$

Το συσσωμάτωμα θα φθάσει έως μέγιστο ύψος h όπου η κινητική ενέργεια θα είναι μηδέν και η δυναμική ενέργεια $U = (m+M)gh$ θα είναι ίση με την αρχική κινητική K,

$$(m+M)gh = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2 \Rightarrow v = \frac{m+M}{m}\,\sqrt{2gh}.$$

4.3.3 Κρούση σε μία διάσταση

Έστω δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 και αρχικές ταχύτητες v_{1i}, v_{2i} τα οποία κινούνται επάνω σε έναν άξονα και συγκρούονται ελαστικά. Ποιες θα είναι οι ταχύτητές τους μετά την κρούση;

Αν οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι v_{1f}, v_{2f} η διατήρηση ορμής και κινητικής ενέργειας γράφονται, αντίστοιχα

$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

και σε άλλη μορφή

$$\begin{aligned} m_1(v_{1i} - v_{1f}) &= m_2(v_{2f} - v_{2i}) \\ m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) &= m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2). \end{aligned}$$

Διαιρούμε τη 2η με την 1η εξίσωση και έχουμε

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}).$$

Από την παραπάνω και τη διατήρηση ορμής βρίσκουμε τις τελικές ταχύτητες

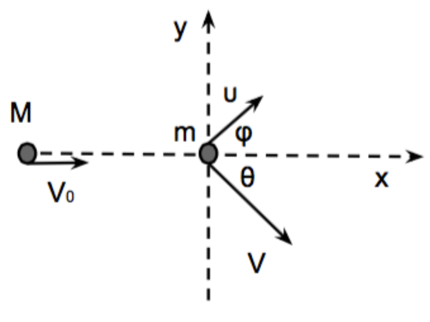
$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Παράδειγμα 4.3.2. Αν το 2ο σωμάτιο είναι αρχικά ακίνητο $v_{2i} = 0$, τότε

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

4.3.4 Κρούση σε δύο διαστάσεις

Παράδειγμα 4.3.3. Σωμάτιο μάζας M και ταχύτητας $\vec{V}_0$ συγκρούεται ελαστικά με ακίνητο σωμάτιο μάζας m επάνω στο επίπεδο. Μετά την κρούση το m κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ υπό γωνία ϕ ως προς την $\vec{V}_0$ και το M κινείται με ταχύτητα $\vec{V}$. (α) Να προσδιορισθεί το μέτρο της $\vec{v}$, εάν οι M, m, V και ϕ είναι γνωστές. (β) Να βρεθεί η ταχύτητα $\vec{V}$ του M μετά την κρούση.



Σχήμα 4.1: Κρούση μεταξύ δύο σωμάτων στο επίπεδο.

Λύση. (α) Διατήρηση ορμής (θεωρούμε $\phi, \theta > 0$)

$$M\vec{V}_0 = m\vec{v} + M\vec{V} \Rightarrow \begin{cases} MV_0 & = mv\cos\phi + MV\cos\theta \\ 0 & = mv\,\sin\phi - MV\,\sin\theta. \end{cases} \tag{4.3.9}$$

Βλέπουμε ότι η ορμές των δύο σωμάτων στην διεύθυνση y είναι αντίθετες, διότι η ολική ορμή p_y πρέπει να είναι μηδέν. Μία απλή σχέση, την οποία θα χρειαστούμε, βγαίνει ως εξής

$$\begin{aligned} &M\vec{V} = M\vec{V}_0 - m\vec{v} \Rightarrow (M\vec{V})^2 = (M\vec{V}_0 - m\vec{v})^2 \Rightarrow \\ &M^2V^2 = M^2V_0^2 + m^2v^2 - 2mM\,\vec{V}_0\cdot\vec{v}. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Διατήρηση ενέργειας

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow MV^2 = MV_0^2 - mv^2. \tag{4.3.11}$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω παίρνουμε

$$(M+m)v^2 = 2M\,\vec{V}_0\cdot\vec{v}.$$

Γράφουμε $\vec{V}_0\cdot\vec{v} = V_0 v\cos\phi$ και βρίσκουμε

$$v = \frac{2M}{m+M}\,V_0\,\cos\phi.$$

(β) Από την εξίσωση για την ενέργεια έχουμε

$$V^2 = V_0^2 - \frac{m}{M}v^2 = \left(1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\cos^2\phi\right)V_0^2.$$

Από την δεύτερη στην Εξ. (4.3.9) (η οποία εκφράζει ότι η συνιστώσα ορμής $p_y = 0$) έχουμε

$$\sin\theta = \frac{mv}{MV}\sin\phi.$$

Η γωνία θ δίνει την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{V}$.

Κεφάλαιο 5

Περιστροφική κίνηση

5.1 Στροφορμή και ροπή

5.1.1 Ροπή δύναμης και έργο

Ας θεωρήσουμε ένα υλικό σημείο το οποίο κάνει περιστροφική κίνηση. Η κίνηση αυτή προκαλείται από κάποια δύναμη $\vec{F}$. Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το έργο που παράγει η δύναμη, όταν το υλικό σημείο μετακινείται περιστρεφόμενο κατά, έστω, στοιχειώδη γωνία $d\theta$. Αν η κυκλική τροχιά είναι ακτίνας r, η στοιχειώδης μετατόπιση είναι

$$d\vec{r} = r\,d\theta\,\hat{e}_\theta. \tag{5.1.1}$$

Το αντίστοιχο έργο είναι

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_t\,r\,d\theta, \tag{5.1.2}$$

όπου $F_t = \vec{F}\cdot\hat{e}_\theta$ είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της δύναμης στην κυκλική τροχιά.

Ορισμός. (Ροπή δύναμης) Ονομάζουμε την ποσότητα

$$\tau = r\,F_t \tag{5.1.3}$$

ροπή της δύναμης. Για το έργο δύναμης κατά περιστροφική κίνηση ισχύει λοιπόν

$$dW = \tau\,d\theta. \tag{5.1.4}$$

Αυτό μπορεί να αντιπαραβληθεί με το έργο δύναμης F για ευθύγραμμη κίνηση $dW = F\,dx$.

Θα πάρουμε τώρα τη γενική μορφή της δύναμης στο επίπεδο και χρησιμοποιώντας τα διανύσματα στη μορφή

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}, \qquad \hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

έχουμε τον ακόλουθο ορισμό για την ροπή δύναμης

$$\tau = r\,\vec{F}\cdot\hat{e}_\theta = r(-F_x\sin\theta + F_y\cos\theta) = xF_y - yF_x. \tag{5.1.5}$$

5.1.2 Ροπή δύναμης ως εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Αν δύναμη $\vec{F}$ δρα σε υλικό σημείο στο επίπεδο στην θέση $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, τότε παρατηρούμε ότι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{r}\times\vec{F}$ είναι

$$\vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\,\hat{k}. \tag{5.1.6}$$

Η ροπή της δύναμης, όταν τα διανύσματα είναι στο επίπεδο xy, έχει μέτρο ίσο με αυτό του παραπάνω εξωτερικού γινομένου $\tau = |\vec{r} \times \vec{F}|$. Όταν η δύναμη και η κίνηση είναι σε ένα τυχόν επίπεδο (είτε στις τρεις διαστάσεις), ορίζουμε την ροπή ως το διάνυσμα

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{5.1.7}$$

Η διεύθυνση του διανύσματος της ροπής είναι κάθετη στα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{F}$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση δύναμης $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$ και κίνησης στο επίπεδο xy η ροπή είναι κάθετη στο επίπεδο xy και γράφουμε $\vec{\tau} = (xF_y - yF_x)\,\hat{k}$. Ομοίως, μπορούμε να δούμε ότι στην περίπτωση δύναμης $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_z\hat{k}$ και κίνησης στο επίπεδο xz έχουμε

$$\vec{\tau} = (x\hat{\imath} + z\hat{k}) \times (F_x\hat{\imath} + F_z\hat{k}) = (zF_x - xF_z)\,\hat{\jmath}, \tag{5.1.8}$$

δηλαδή, η διεύθυνση του διανύσματος της ροπής είναι κάθετη στο επίπεδο xz. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι ο ορισμός της ροπής που δώσαμε δίνει ανάλογο αποτέλεσμα για κίνηση σε οποιοδήποτε επίπεδο.

5.1.3 Στροφορμή

Ορισμός. (Στροφορμή σώματος) Έστω ένα σώμα μάζας m το οποίο βρίσκεται στην θέση $\vec{r}$ και κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$. Ορίζουμε ένα μέγεθος, το οποίο ονομάζουμε *στροφορμή* του σώματος, ως το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{5.1.9}$$

όπου $\vec{p} = m\vec{v}$ είναι η ορμή του. Το μέτρο της στροφορμής είναι

$$L = mvr\sin\phi \tag{5.1.10}$$

όπου ϕ είναι η γωνία μεταξύ $\vec{r}$ και $\vec{p}$.

Αν περιοριστούμε στο επίπεδο xy η στροφορμή είναι

$$\vec{L} = (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \times (p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\jmath}) = (x\,p_y - y\,p_x)\,\hat{k}. \tag{5.1.11}$$

Παρατηρούμε ότι η διεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο xy.

Παράδειγμα 5.1.1. Έστω σώμα μάζας m το οποίο κάνει κυκλική κίνηση ακτίνας R και έχει ταχύτητα μέτρου v. Το μέτρο της στροφορμής του είνει

$$L = mvR$$

και το διάνυσμα $\vec{L}$ έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς. □

Για τη μεταβολή της στροφορμής με το χρόνο έχουμε

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Αλλά $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ και $\vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = 0$. Επίσης, $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Ώστε παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{5.1.12}$$

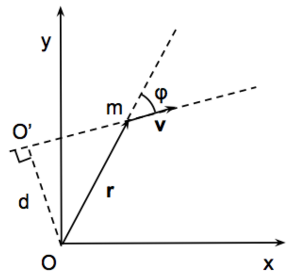
Παρατήρηση 5.1.1. *Η σχέση*

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής σώματος είναι ίσος με την ροπή η οποία ασκείται στο σώμα και είναι η αντίστοιχη του νόμου Νεύτωνα για περιστροφικές κινήσεις.

Παράδειγμα 5.1.2. Έστω σώμα μάζας m το οποίο κάνει κυκλική κίνηση ακτίνας R και έχει ταχύτητα μέτρου v. Θεωρήστε ότι στο σώμα ασκείται δύναμη F_t κατά την διεύθυνση την εφαπτομενική στην κυκλική τροχιά. Βρείτε την ροπή της δύναμης. Επίσης, βρείτε την επιτάχυνση του σώματος. □

Παράδειγμα 5.1.3. Σώμα μάζας m κινείται ευθύγραμμα στο επίπεδο xy με ταχύτητα $\vec{v}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Θα βρούμε την στροφορμή του σε κάθε θέση.



Σχήμα 5.1: Σώμα κινείται ευθύγραμμα.

Λύση. Ας δούμε την στροφορμή ως προς την αρχή O. Η διεύθυνση της $\vec{L}$ είναι κάθετη στο επίπεδο xy και έχει μέτρο

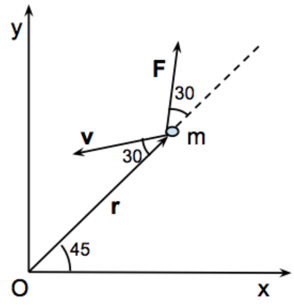
$$L = mvr\sin\phi.$$

Παρατηρούμε ότι $r\sin\phi = d$, η οποία είναι η κάθετη απόσταση της αρχής O από την ευθεία της κίνησης. Άρα, για το μέτρο της στροφορμής έχουμε

$$L = mvd$$

και για τη διεύθυνση: $\vec{L} = -(mvd)\hat{k}$. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο για κάθε θέση του m στην ευθεία της κίνησης. Αφού δεν ασκούνται δυνάμεις (η κίνηση δεν είναι επιταχυνόμενη), άρα και η ροπή είναι μηδέν, το αποτέλεσμα που βρήκαμε συμφωνεί με τον νόμο για την μεταβολή της στροφορμής (νόμος Νεύτωνα για περιστροφική κίνηση). □

Παράδειγμα 5.1.4. Σωμάτιο μάζας $m = 2\,\mathrm{kg}$ κινείται στο επίπεδο xy. Σε χρονική στιγμή t το διάνυσμα θέσεώς του $\vec{r}$ έχει μέτρο $3\,\mathrm{m}$ και η ταχύτητά του $\vec{v}$ έχει μέτρο $4\,\mathrm{m/sec}$. Την ίδια στιγμή εφαρμόζεται δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο $2\,\mathrm{N}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε (α) το μέτρο και την κατεύθυνση της στροφορμής του m ως προς την αρχή O, (β) το μέτρο και την κατεύθυνση της ροπής της δύναμης ως προς την αρχή O.



Λύση. Τα διανύσματα $\vec{r}, \vec{p}$ είναι στο επίπεδο xy άρα το διάνυσμα $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ είναι κάθετο στο xy και άρα παράλληλο στο άξονα z. Ομοίως, η ροπή $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ είναι παράλληλη στον z.

Η στροφορμή είναι (θέτουμε $\phi = 180^0 - 30^o$ την γωνία μεταξύ $\vec{r}$ και $\vec{v}$)

$$\vec{L} = (rp \sin\phi)\hat{k} = (mvr \sin\phi)\hat{k} = (2\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/sec})(3\,\mathrm{m})\sin(180^o - 30^o)\hat{k} = 12\,(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{sec})\,\hat{k}.$$

Είναι Joule $= \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{sec}^2$, άρα $L = 12\,(\mathrm{J}\cdot\mathrm{sec})$.

Η ροπή είναι

$$\vec{\tau} = [rF\sin(30^o)]\hat{k} = (3\,\mathrm{m})(2\,\mathrm{N})\,\sin(30^o)\hat{k} = 3\,(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})\,\hat{k}. \ \square$$

5.2 Στροφορμή και ενέργεια συστήματος σωμάτων

5.2.1 Εξίσωση κίνησης

Θεωρούμε n σημειακές μάζες m_i οι οποίες βρίσκονται σε θέσεις $\vec{r}_i$ σε κάποια χρονική στιγμή. Μεταξύ τους ασκούνται δυνάμεις αλληλεπίδρασης (εσωτερικές δυνάμεις). Κάθε σωμάτιο i ασκεί σε σωμάτιο j δύναμη $\vec{F}_{ij}$. Επίσης, θα θεωρήσουμε εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_i$ που ασκούνται σε κάθε ένα από τα σωμάτια. Άρα, η συνολική δύναμη η οποία ασκείται στην μάζα m_i είναι $F_i + \sum_j F_{ji}$. Η ροπή που ασκείται σε κάθε σωμάτιο i είναι

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \left[F_i + \sum_{j=1}^{n} F_{ji} \right] = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}. \tag{5.2.1}$$

Η ροπή που ασκείται σε όλο το σύστημα είναι

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}. \tag{5.2.2}$$

Στο διπλό άθροισμα γνωρίζουμε ότι $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, ώστε, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε ζεύγος σωμάτων, έχουμε τους όρους στο άθροισμα

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{F}_{ij}. \tag{5.2.3}$$

Για την βαρύτητα, ηλεκτρισμό κ.α. οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης έχουν φορά από το ένα σώμα στο άλλο, δηλαδή, έχουν τη φορά του διανύσματος $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ (είναι κεντρικές δυνάμεις). Άρα το εξωτερικό γινόμενο στο δεξιό μέλος της (5.2.3) είναι ίσο με μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \tag{5.2.4}$$

Παρατήρηση 5.2.1. *Η ολική ροπή σε σύστημα σωμάτων ισούται με το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων.*

Για το σύστημα που μελετάμε η στροφορμή είναι $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ και εύκολα βρίσκουμε για την χρονική της παράγωγο

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \tag{5.2.5}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $d\vec{r}_i/dt \times \vec{p}_i = \vec{v}_i \times \vec{p}_i = 0$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_{ij}, \vec{F}_{ji}$ αλληλοαναιρούνται στο άθροισμα.

Από τις Εξ. (5.2.4) και (5.2.5) έχουμε το αποτέλεσμα

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{5.2.6}$$

Παρατήρηση 5.2.2. *Η σχέση μεταξύ ροπής και ρυθμού μεταβολής της στροφορμής*

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

ισχύει για σύστημα n αλληλεπιδρώντων σωματίων, όπου η $\vec{\tau}$ είναι η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες ασκούνται στα σωμάτια.

5.2.2 Στροφορμή συστήματος δύο σωμάτων

Έστω σώματα m_1, m_2 με θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ και ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ως προς την αρχή O. Η στροφορμή του συστήματος είναι

$$\vec{L} = m_1\, \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\, \vec{r}_2 \times \vec{v}_2. \tag{5.2.7}$$

Ας θεωρήσουμε τις θέσεις $\vec{r}_1', \vec{r}_2'$ και ταχύτητες $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$ ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας, ώστε

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{\text{cm}} + \vec{r}_1\prime, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_{\text{cm}} + \vec{r}_2\prime,$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_1\prime, \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_2\prime.$$

Μπορούμε να γράψουμε την στροφορμή ως

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= m_1(\vec{r}_{\text{cm}} + \vec{r}_1\prime) \times (\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_1\prime) + m_2(\vec{r}_{\text{cm}} + \vec{r}_2\prime) \times (\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_2\prime) \\
&= (m_1 + m_2)\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{r}_{\text{cm}} \times (m_1\vec{v}_1\prime + m_2\vec{v}_2\prime) + (m_1\vec{r}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime) \times \vec{v}_{\text{cm}} + m_1\vec{r}_1\prime \times \vec{v}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime \times \vec{v}_2\prime.
\end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ισχύουν

$$\begin{aligned}
m_1\vec{r}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime &= 0 \\
m_1\vec{v}_1\prime + m_2\vec{v}_2\prime &= 0
\end{aligned}$$

οι οποίες σημαίνουν ότι η θέση και η ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς τον εαυτό του είναι μηδέν. Έχουμε τελικά για την στροφορμή του συστήματος

$$\vec{L} = \left[(m_1 + m_2)\, \vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}}\right] + \left[m_1\vec{r}_1\prime \times \vec{v}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime \times \vec{v}_2\prime\right]. \tag{5.2.8}$$

Ονομάζουμε *τροχιακή στροφορμή* την

$$\vec{L}_{\text{cm}} = M\, \vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}}, \qquad M = m_1 + m_2 \tag{5.2.9}$$

και *ιδιοστροφορμή* την

$$\vec{L}_e = m_1\vec{r}_1\prime \times \vec{v}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime \times \vec{v}_2\prime. \tag{5.2.10}$$

Ώστε

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{cm}} + \vec{L}_e. \tag{5.2.11}$$

5.2.3 Στροφορμή συστήματος πολλών σωμάτων

Για ένα σύστημα n σωμάτων m_i, η στροφορμή είναι

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \tag{5.2.12}$$

Μετά από υπολογισμό ανάλογο με την περίπτωση των δύο σωμάτων, αυτή γράφεται

$$\vec{L} = \vec{L}_{\rm cm} + \vec{L}_e, \tag{5.2.13}$$

όπου $\vec{L}_{\rm cm} = M\vec{r}_{\rm cm} \times \vec{v}_{\rm cm}$ και η ίδιοστροφορμή είναι

$$\vec{L}_e = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\prime \times \vec{v}_i\prime. \tag{5.2.14}$$

Παρατήρηση 5.2.3. *Η στροφορμή συστήματος σωμάτων είναι ίση με την στροφορμή σώματος με μάζα ίση με την ολική μάζα του συστήματος το οποίο θεωρείται ότι βρίσκεται στην θέση του κέντρου μάζας (υπολογισμένη ως προς την αρχή των αξόνων), συν την στροφορμή των σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας.*

Παράδειγμα 5.2.1. Έστω σύστημα σωματίων το οποίο έχει γνωστή ορμή $\vec{P}$ και επίσης ολική στροφορμή $\vec{L}$ ως προς σταθερό σημείο O. Δείξτε ότι, ως προς ένα άλλο σταθερό σημείο O', η στροφορμή $\vec{L}'$ του συστήματος σωματίων είναι

$$\vec{L}' = \vec{L} - \vec{r}_0 \times \vec{P}, \qquad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OO'}.$$

Λύση. Θέτουμε $\vec{r}_i, \vec{r}_i\prime$ τις θέσεις των σωματίων ως προς O, O' αντίστοιχα. Η στροφορμή ως προς τα σημεία O, O' ορίζεται αντίστοιχα ως

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i, \qquad \vec{L}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i.$$

Η ορμή είναι p_i και στις δύο περιπτώσεις και δεν εξαρτάται από την αρχή των αξόνων.

Ο ορισμός της στροφορμής δίνει

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i\prime) \times \vec{p}_i = \vec{r}_0 \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i\prime \times \vec{p}_i.$$

Άρα

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_0 \times \vec{P} \Rightarrow \vec{L}' = \vec{L} - \vec{r}_0 \times \vec{P}.$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση ολικής ορμής $\vec{P} = 0$ έχουμε $\vec{L} = \vec{L}'$. □

5.2.4 Κινητική ενέργεια συστήματος πολλών σωμάτων

Θα εκμεταλλευτούμε τον ορισμό του κέντρου μάζας για να γράψουμε σε μία χρήσιμη μορφή την κινητική ενέργεια συστήματος σωμάτων. Για την κινητική ενέργεια K έχουμε

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_{\rm cm} + \vec{v}_i\prime)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i')^2 + \vec{v}_{\rm cm}\sum m_i \vec{v}_i'$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum m_i \vec{v}_i' = 0$$

διότι αυτή η έκφραση δίνει την ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς το ίδιο το κ.μ. Άρα, έχουμε το αποτέλεσμα

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{cm}}^2 + K_e, \tag{5.2.15}$$

όπου ορίσαμε την κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας

$$K_e = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_i\prime)^2. \tag{5.2.16}$$

Παρατήρηση 5.2.4. *Η κινητική ενέργεια συστήματος σωμάτων μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο όρων οι οποίοι σχετίζονται με (α) τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας και (β) την κίνηση των σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας.*

Παράδειγμα 5.2.2. Δύο σωμάτια μαζών $m_1 = 4\,\text{kg}$ και $m_2 = 6\,\text{kg}$ βρίσκονται σε επίπεδο στις θέσεις $\vec{r}_1 = 3\hat{\jmath}\,\text{m}$ και $\vec{r}_2 = 4\hat{\imath}\,\text{m}$ με ταχύτητες $\vec{v}_1 = 2\hat{\imath}\,(\text{m/sec})$ και $\vec{v}_2 = 3\hat{\jmath}\,(\text{m/sec})$. (α) Βρείτε την στροφορμή του συστήματος των δύο σωματίων ως προς την αρχή O και ως προς το κέντρο μάζας τους C. (β) Βρείτε την κινητική ενέργεια του συστήματος και την κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας τους.

Λύση. (α)

$$\vec{L} = m_1\,\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = [4 \cdot (-6) + 6 \cdot 12]\,\hat{k}\,(\text{kg}\,\text{m}^2/\text{sec}) = 48\,\hat{k}\,(\text{J}\,\text{sec}).$$

Το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο

$$\vec{r}_{\text{cm}} = (2.4\,\hat{\imath} + 1.2\,\hat{\jmath})\,\text{m}$$

και η ταχύτητά του είναι

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = (0.8\,\hat{\imath} + 1.8\,\hat{\jmath})\,\text{m/sec}.$$

Έχουμε την στροφορμή του κ.μ.:

$$M\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}} = 10(2.4 \cdot 1.8 - 1.2 \cdot 0.8)\,\hat{k}\,(\text{kg}\,\text{m}^2/\text{sec}) = 33.6\,\hat{k}\,(\text{J}\,\text{sec}),$$

ώστε η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας είναι

$$\vec{L}_e = \vec{L} - M\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}} = 14.4\,\hat{k}\,(\text{J} \cdot \text{sec}).$$

(β) Η κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = 35\,\text{J}.$$

Η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας

$$\frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{cm}}^2 = 19.4\,\text{J}.$$

Άρα, η κινητική ενέργεια ως προς το κ.μ. είναι

$$K_e = K - \frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{cm}}^2 = 15.6\,\text{J}.$$

□

5.3 Περιστροφή στερεού σώματος

5.3.1 Γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση

Ας θεωρήσουμε στερεό σώμα οποιουδήποτε σχήματος και ας υποθέσουμε ότι αυτό περιστρέφεται γύρω από καθορισμένο άξονα, έστω ότι αυτός είναι ο Oz. Κάθε σημείο του στερεού διαγράφει κύκλο γύρω από τον άξονα. Για απλότητα ας πάρουμε τα σημεία τα οποία βρίσκονται στο επίπεδο xy. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες (r,θ), το διάστημα που διατρέχει ένα σημείο είναι $\Delta s = r\Delta\theta$. Η ταχύτητά του είναι

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega. \tag{5.3.1}$$

Ονομάζουμε *γωνιακή ταχύτητα* την

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \tag{5.3.2}$$

Η επιτάχυνση η οποία μας ενδιαφέρει, κατά την περιστροφή στερεού, είναι η εφαπτομενική στην τροχιά (παράλληλη στη στιγμιαία ταχύτητα), είναι δηλαδή $\vec{a} = a\,\hat{e}_\theta$, με

$$a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha, \tag{5.3.3}$$

όπου ονομάζουμε *γωνιακή επιτάχυνση* την

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \tag{5.3.4}$$

5.3.2 Κινητική ενέργεια περιστροφής

Ας θεωρήσουμε ένα συσσωμάτωμα n στοιχειωδών σωμάτων με μάζες m_i τα οποία περιστρέφονται ωσάν να ήταν συνδεδεμένα όλα μαζί, με γωνιακή ταχύτητα ω. Αν η απόσταση καθενός από τον άξονα περιστροφής είναι r_i τότε οι ταχύτητές τους είναι $v_i = r_i\omega$. Η κινητική τους ενέργεια είναι

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\omega^2. \tag{5.3.5}$$

Ονομάζουμε *ροπή αδράνειας*, ως προς δεδομένο άξονα, την ποσότητα

$$I := \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{5.3.6}$$

Έχουμε για την κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{5.3.7}$$

Για να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας στερεού θα το θεωρήσουμε ως ένα συσσωμάτωμα από στοιχειώδεις μάζες $m_i = \Delta m$ και έχουμε

$$I = \lim_{\Delta m\to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m = \int r^2\, dm.$$

Εισάγουμε την πυκνότητα $\rho = dm/dV \Rightarrow dm = \rho\, dV$ και έχουμε

$$I = \int \rho r^2\, dV. \tag{5.3.8}$$

Παρατήρηση 5.3.1. *Η ροπή αδράνειας στερεού σώματος ορίζεται από την Εξ.* (5.3.8) *ως προς συγκεκριμένο άξονα περιστροφής (π.χ., τον Oz) από τον οποίο μετρώνται οι αποστάσεις r των υλικών σημείων του σώματος. Μπορούμε να ορίζουμε ροπές αδράνειας ως προς οποιονδήποτε άξονα περιστροφής και αυτές μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους.*

Παράδειγμα 5.3.1. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας μίας ομογενούς στερεάς ράβδου μήκους L και μάζας M ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας της.
Λύση. Έστω ότι η ράβδος εκτείνεται στον άξονα x και ο κάθετος άξονας είναι ο y. Το κέντρο μάζας της είναι στο κέντρο της. Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου είναι $\lambda = M/L$ και η στοιχειώδης μάζα γράφεται $dm = \lambda dx$. Έχουμε την ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y,

$$I_y = \int r^2\,dm = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2\,dx = \ldots = \frac{1}{12} ML^2. \;\Box$$

Παράδειγμα 5.3.2. Υπολογίστε την ροπή αδράνειας ενός ομογενούς στερεού κυλίνδρου μάζας M, ύψους L και ακτίνας R ως προς τον άξονα συμμετρίας του.
Λύση. Θεωρούμε κυλινδρικούς φλοιούς σε απόσταση r γύρω από τον άξονα του κυλίνδρου με πάχος dr. Η μάζα κάθε φλοιού μπορεί να γραφεί ως $dm = \rho dV$, όπου η πυκνότητα του κυλίνδρου είναι $\rho = M/(\pi R^2 L)$ και ο όγκος του είναι $dV = (2\pi r\,dr)L$. Έχουμε την ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα του κυλίνδρου

$$I = \int r^2\,dm = 2\pi\rho L \int_0^R r^3\,dr = \frac{\pi\rho L R^4}{2}.$$

Τελικά

$$I = \frac{1}{2} MR^2. \;\Box$$

5.3.3 Στροφορμή στερεού σώματος

Ας θεωρήσουμε, όπως και παραπάνω, ένα συσσωμάτωμα n στοιχειωδών σωμάτων με μάζες m_i τα οποία περιστρέφονται ωσάν να ήταν συνδεδεμένα όλα μαζί, με γωνιακή ταχύτητα ω. Κάθε σώμα m_i βρίσκεται σε απόσταση r_i (η οποία παραμένει σταθερή) από τον άξονα περιστροφής και έχει ορμή p_i. Η στροφορμή του συστήματος είναι

$$L = \sum_{i=1}^{n} r_i p_i = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i v_i = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \omega r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\,\omega. \tag{5.3.9}$$

Βλέπουμε ότι η ολική στροφορμή του συστήματος γράφεται με την βοήθεια της ροπής αδράνειας I την οποία ήδη έχουμε ορίσει στην Εξ. (5.3.6), ως

$$L = I\omega. \tag{5.3.10}$$

Παρ΄ ότι εξάγαμε την σχέση θεωρώντας ένα συσσωμάτωμα n στοιχειωδών σωμάτων, η παραππάνω σχέση για τη στροφορμή ισχύει φυσικά και για στερεά σώματα αν χρησιμοποιήσουμε για τη ροπή αδράνειας τον ορισμό για στερεά (5.3.8).

5.3.4 Ροπή σε στερεό σώμα

Ας θεωρήσουμε σημειακή μάζα m η οποία περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά υπό την επίδραση δύναμης της οποίας η εφαπτομενική συνιστώσα είναι F_t. Ισχύει

$$F_t = m a_t = m r\,\alpha, \tag{5.3.11}$$

αφού η εφαπτομενική (επιτρόχιος) επιτάχυνση a_t συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση με την $a_t = r\alpha$, όπου r η ακτίνα της τροχιάς.

Η *ροπή* της δύναμης είναι

$$\tau = r\, F_t = (mr^2)\alpha. \tag{5.3.12}$$

Αν θεωρήσουμε n μάζες m_i οι οποίες περιστρέφονται ως ένα συσσωμάτωμα τότε η ροπή είναι

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2)\alpha \Rightarrow \tau = I\alpha, \tag{5.3.13}$$

όπου I η ροπή αδράνειας του συστήματος.

Μπορούμε να ακολουθήσουμε τον ίδιο συλλογισμό και για την περίπτωση στερεού σώματος όπου, αθροίζοντας στοιχειώδεις μάζες dm, βρίσκουμε

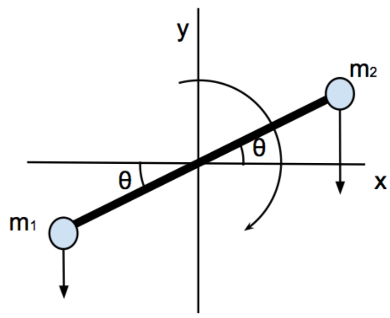
$$\tau = \int (r^2\, dm)\alpha = \alpha \int r^2\, dm \Rightarrow \tau = I\alpha. \tag{5.3.14}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$\frac{dL}{dt} = I\,\frac{d\omega}{dt} = I\,\alpha = \tau. \tag{5.3.15}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε αυτή τη σχέση ως τον νόμο Νεύτωνα για περιστρεφόμενα στερεά.

Παράδειγμα 5.3.3. Μία τραμπάλα στα άκρα της οποίας κάθονται δύο παιδιά μοντελοποιείται ως εξής. Θεωρούμε μία ομογενή ράβδο μάζας M και μήκους d περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Στα δύο άκρα της ράβδου έχουν στερεωθεί σημειακές μάζες m_1, m_2 αντίστοιχα. (α) Υπολογίστε την στροφορμή του συστήματος όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω. (β) Υπολογίστε την γωνιακή επιτάχυνση όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο (όπως στο σχήμα).



Λύση. (α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με το άθροισμα τηες ροπής αδράνειας της ράβδου και της ροπής αδράνειας των δύο μαζών,

$$I = \frac{1}{12}Md^2 + m_1\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right).$$

Για γωνιακή ταχύτητα ω η στροφορμή είναι

$$L = I\omega = \frac{d^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega.$$

(β) Οι ροπές από το βάρος των δύο μαζών είναι

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_1 &= m_1 g \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\hat{k} = m_1 g \frac{d}{2}\cos\theta\,\hat{k} \\ \vec{\tau}_2 &= -m_2 g \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\hat{k} = -m_2 g \frac{d}{2}\cos\theta\,\hat{k}. \end{aligned}$$

Άρα η ολική ροπή έχει μέτρο

$$\tau = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)gd\,\cos\theta.$$

Για την γωνιακή επιτάχυνση έχουμε

$$\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2(m_1 - m_2)g\,\cos\theta}{d\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)}.$$

Παρατηρήστε ότι την ροπή από το βάρος της ράβδου μπορέσαμε να την παραλείψουμε από τον υπολογισμό διότι οι ροπές στην ράβδο από τα δύο μισά της εκατέρωθεν του κέντρου της είναι ίσες και αντίθετες. □

5.3.5 Έργο και ενέργεια στην περιστροφική κίνηση

Έχουμε δει ότι το παραγόμενο στοιχειώδες έργο από δύναμη $\vec{F}$ που δρα σε περιστρεφόμενο σώμα κατά στοιχειώδη γωνία $d\theta$ δίνεται από

$$dW = \tau\, d\theta. \tag{5.3.16}$$

Γράφουμε τη ροπή ως

$$\tau = I\,\frac{d\omega}{dt} = I\,\frac{d\omega}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = I\,\frac{d\omega}{d\theta}\omega \tag{5.3.17}$$

για την περίπτωση που η γωνιακή ταχύτητα είναι μόνο συνάρτηση της γωνίας (δηλ., της θέσης του κινητού επάνω στην κυκλική τροχιά). Τελικά, για το έργο το οποίο παράγεται κατά την περιστροφή σώματος από γωνία θ_0 έως γωνία θ έχουμε

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} I\omega\frac{d\omega}{d\theta}\,d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} I\omega\,d\omega = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 \tag{5.3.18}$$

όπου ω_0 είναι η αρχική γωνιακή ταχύτητα του σώματος και ω η τελική. Γνωρίζουμε ότι το έργο δύναμης μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια και έχουμε το παρακάτω.

Παρατήρηση 5.3.2. *(Θεώρημα έργου ενέργειας για περιστροφική κίνηση) Η διατύπωση του θεωρήματος έργου-ενέργειας για περιστροφική κίνηση στερεού το οποίο έχει αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_i και τελική ω_f, είναι*

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W$$

όπου K είναι η κινητική του ενέργεια και W το έργο δύναμης.

5.3.6 Θεώρημα των παραλλήλων αξόνων.

Ο υπολογισμός ροπών αδράνειας μπορεί να είναι περίπλοκος. Πολλές φορές αυτός μπορεί να διευκολυνθεί από το *θεώρημα των παραλλήλων αξόνων* το οποίο διατυπώνεται ως εξής.

Παρατήρηση 5.3.3. *(Θεώρημα παραλλήλων αξόνων) Ας θεωρήσουμε γνωστή τη ροπή αδράνειας $I_{\rm cm}$ σώματος μάζας M ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Τότε, η ροπή αδράνειας I ως προς άξονα παράλληλο στον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, σε απόσταση D, είναι*

$$I = I_{\rm cm} + MD^2. \tag{5.3.19}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε άξονα περιστροφής παράλληλο στον z και αντίστοιχη ροπή αδράνειας

$$I = \int r^2\,dm = \int (x^2 + y^2)\,dm.$$

Αν x', y' οι συντεταγμένες τυχόντος σημείου ως προς το κέντρο μάζας τότε $x = x' + x_{\rm cm}, \; y = y' + y_{\rm cm}$, ώστε

$$\begin{aligned} I &= \int \left[(x' + x_{\rm cm})^2 + (y' + y_{\rm cm})^2 \right] dm \\ &= \int [(x')^2 + (y')^2] dm + 2x_{\rm cm} \int x' \, dm + 2y_{\rm cm} \int y' \, dm + (x_{\rm cm}^2 + y_{\rm cm}^2) \int dm. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι ο $I_{\rm cm}$. Επίσης, έχουμε $\int x' \, dm = 0 = \int y' \, dm$ και $x_{\rm cm}^2 + y_{\rm cm}^2 = D^2$. Επομένως

$$I = I_{\rm cm} + MD^2.$$

Παράδειγμα 5.3.4. Ποια η ροπή αδράνειας I ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L ως προς άξονα (κάθετο στη ράβδο) που διέρχεται από το άκρο της;
Λύση. Είδαμε στο παράδειγμα 5.3.1 ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της (κέντρο μάζας) είναι $I_{\rm cm} = (1/12)ML^2$. Το Θ. παραλλήλων αξόνων δίνει τη ζητούμενη ροπή αδράνειας

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2. \;\Box$$

5.4 Κύλιση

5.4.1 Συνδυασμός μεταφοράς και περιστροφής

Θεωρούμε έναν τροχό ακτίνας R και θα δούμε μερικές απλές κινήσεις που μπορεί να εκτελέσει. Μία πρώτη δυνατότητα είναι ο τροχός να μετακινείται (σαν ενιαίο σώμα, χωρίς να περιστρέφεται) με ταχύτητα, έστω $\vec{v}_{\rm cm}$, σε οριζόντια διεύθυνση. Τότε κάθε σημείο του τροχού έχει φυσικά την ίδια ταχύτητα (δείτε σχήμα).

Μπορούμε επίσης να έχουμε περιστροφή του τροχού (χωρίς αυτός να μετακινείται) με γωνιακή ταχύτητα, έστω ω. Αν ο τροχός περιστραφεί κατά γωνία θ τότε κάθε σημείο της περιφέρειάς του διαγράφει ένα τόξο μήκους $s = R\theta$. Παραγωγίζουμε αυτή τη σχέση και έχουμε ότι η ταχύτητα του σημείου λόγω περιστροφής είναι

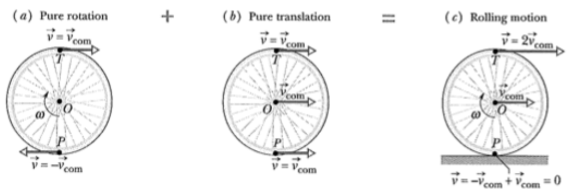
$$v_\pi = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

και αυτή έχει διεύθυνση εφαπτομενική στην περιφέρεια του τροχού.

Ας θεωρήσουμε τώρα κίνηση στην οποία ο τροχός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω και ταυτοχρόνως μετακινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{\rm cm}$. Τότε, το κέντρο μάζας μετακινείται με $\vec{v}_{\rm cm}$, αλλά το κάθε σημείο του τροχού έχει διαφορετική ταχύτητα η οποία προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων μετατόπισης και περιστροφής.

Ας δούμε την ειδική περίπτωση που η ταχύτητα λόγω περιστροφής ισούται με την ταχύτητα της μετατόπισης, δηλαδή $\vec{v}_{\rm cm} = R\omega$. Προσθέτοντας διανυσματικά τις ταχύτητες λόγω περιστροφής και μετατόπισης βλέπουμε, ειδικότερα, ότι το κορυφαίο σημείο έχει ταχύτητα $v = 2\vec{v}_{\rm cm}$ και το σημείο που εφάπτεται με το έδαφος έχει $v = 0$ (όπως φαίνεται και στο σχήμα). Λέμε ότι έχουμε κύλιση του τροχού χωρίς ολίσθηση.

Η τροχιά κάθε σημείου του τροχού δίνει *κυκλοειδή καμπύλη* (δοκιμάστε να κάνετε ένα σχέδιο της τροχιάς).



Σχήμα 5.2: Πηγή: Halliday, Resnick, Walker, page 276.

5.4.2 Οι δυνάμεις της κύλισης

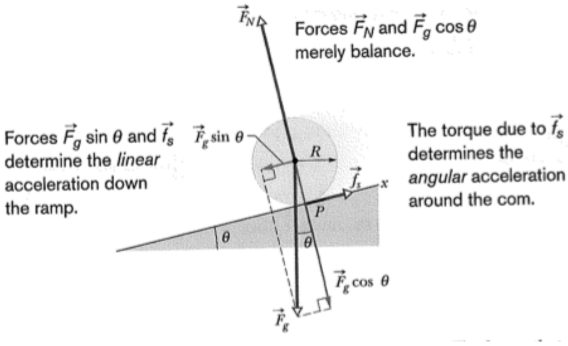
Παρατήρηση 5.4.1. *Αν ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση τότε μπορούμε να έχουμε μόνο στατική τριβή, αφού το σημείο επαφής με το έδαφος έχει* $\vec{v} = 0$.

Παρατήρηση 5.4.2. *Δεν υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση επειδή σε κάθε στιγμή το σημείο επαφής είναι ακίνητο σε σχέση με την επιφάνεια.*

Παράδειγμα 5.4.1. Θεωρούμε τροχό μάζας M και ακτίνας R ο οποίος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο. Βρείτε την επιτάχυνση του τροχού.
Λύση. Ασκείται η δύναμη του βάρους στο κέντρο μάζας και η στατική τριβή στο σημείο επαφής με το έδαφος (δείτε σχήμα 5.3).

Ο νόμος Νεύτωνα για κίνηση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου

$$f_s - Mg\sin\theta = Ma_{\rm cm}. \tag{5.4.1}$$



Σχήμα 5.3: Πηγή: Halliday, Resnick, Walker, page 279.

Ροπή, ως προς το κέντρο μάζας, ασκεί μόνο η f_s και μόνο αυτή μπορεί να θέσει σε περιστροφή το σώμα. Το βάρος ασκείται στο κέντρο μάζας και δεν ασκεί ροπή. Έχουμε από τον νόμο για την ροπή

$$Rf_s = I_{\rm cm}\alpha. \tag{5.4.2}$$

Η γραμμική και γωνιακή επιτάχυνση συνδέονται

$$a_{\rm cm} = -R\alpha \tag{5.4.3}$$

όπου το πρόσημο εμφανίζεται λόγω των συμβάσεων που ακολουθούμε. Η δύναμη τριβής είναι

$$f_s = -I_{\rm cm}\frac{a_{\rm cm}}{R^2} \tag{5.4.4}$$

και τελικά βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$a_{\rm cm} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{\rm cm}/(MR^2)}. \tag{5.4.5}$$

5.5 Στατική

5.5.1 Ισορροπία

Ένα οποιοδήποτε σώμα το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα έχει μία συγκεκριμένη σταθερή ορμή. Ένας τροχός που κινείται σε ευθύγραμμη διαδρομή έχει μία σταθερή ορμή αλλά και μία σταθερή στροφορμή. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι τα σώματα βρίσκονται σε μία *στάσιμη* κατάσταση.

Στην ειδικότερη περίπτωση που και η ορμή και η στροφρομή ενός σώματος δεν είναι απλώς σταθερές αλλά είναι ίσες με μηδέν λέμε ότι το σώμα βρίσκεται σε *στατική ισορροπία*.

Μία μπάλλα στον πάτο ενός πηγαδιού βρίσκεται σε ισορροπία αλλά επίσης μία μπάλλα ακριβώς στην κορυφή ενός λόφου μπορεί να βρίσκεται σε ισορροπία. Στη δεύτερη περίπτωση αρκεί μία μικρή διαταραχή της θέσης της μπάλλας για να μετακινηθεί πολύ μακριά από την κορυφή του λόφου. Στην πρώτη περίπτωση όμως, ακόμα και αν η αρχική θέση αλλάξει, σε λίγο η μπάλλα θα επιστρέψει στον πάτο του πηγαδιού. Λέμε την πρώτη θέση *ευσταθούς* ισορροπίας και τη δεύτερη θέση *ασταθούς* ισορροπίας.

5.5.2 Συνθήκες ισορροπίας

Αν ένα σώμα βρίσκεται σε μεταφορική ισορροπία τότε πρέπει η ορμή του $\vec{P}$ να είναι σταθερή και ίση με μηδέν, δηλαδή, να μην ασκείται επάνω του συνολική δύναμη:

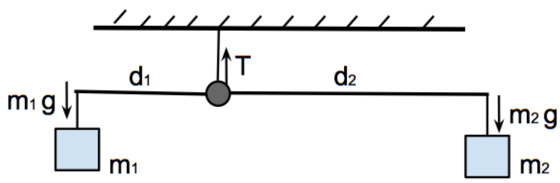
$$\vec{F}_{\text{net}} = 0. \tag{5.5.1}$$

Αν ένα σώμα βρίσκεται σε περιστροφική ισορροπία τότε πρέπει η στροφορμή του $\vec{L}$ να είναι σταθερή και ίση με μηδέν, δηλαδή, να μην ασκείται επάνω του συνολική ροπή:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = 0. \tag{5.5.2}$$

Οι παραπάνω δύο συνθήκες ισχύουν και όταν τα $\vec{P}, \vec{L}$ είναι σταθερά, αλλά όχι μηδέν.

Παράδειγμα 5.5.1. Έστω ζυγός μαζών με στελέχη διαφορετικού μήκους d_1, d_2. Στα άκρα του εξαρτώνται μάζες m_1, m_2. Βρείτε τις συνθήκες για ισορροπία του συστήματος.



Λύση. Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι τα βάρη και η τάση T του νήματος, όπως στο σχήμα. Για να παραμείνει σταθερό το κέντρο μάζας έχουμε την 1η συνθήκη ισορροπίας

$$T - m_1 g - m_2 g = 0 \Rightarrow T = (m_1 + m_2)g.$$

Αυτή είναι μία συνθήκη για το μηδενισμό της y-συνιστώσας της δύναμης. Παρατηρήστε ότι οι δυνάμεις δεν έχουν x-συνιστώσες, όταν η ράβδος του ζυγού είναι οριζόντια, οπότε η αντίστοιχη συνθήκη δεν θα μας έδινε κάποια πληροφορία.

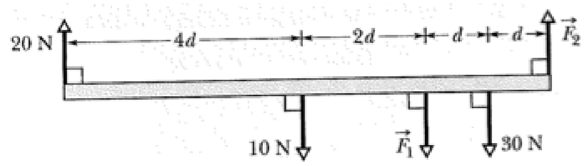
Η ροπή στο σύστημα ως προς το σημείο περιστροφής του σχήματος είναι

$$\tau = m_1 g d_1 - m_2 g d_2.$$

Έχουμε λοιπόν την 2η συνθήκη ισορροπίας

$$\tau = 0 \Rightarrow m_1 d_1 = m_2 d_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1}. \square$$

Παράδειγμα 5.5.2. Στο σχήμα φαίνεται ομογενής ράβδος σε στατική ισορροπία. (α) Βρείτε τη σχέση μεταξύ των δυνάμεων F_1, F_2 ώστε να μην κινείται το κέντρο μάζας. (β) Βρείτε το μέτρο της F_2 από τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών (συνθήκη ισορροπίας). (γ) Πόσο είναι το μέτρο της F_1;



Σχήμα 5.4: Πηγή: [1], page 309.

Λύση. (α) Χρειαζόμαστε τη συνθήκη μηδενισμού της ολικής δύναμης

$$F_2 + 20\,\mathrm{N} = F_1 + 10\,\mathrm{N} + 30\,\mathrm{N} \Rightarrow F_2 = F_1 + 20\,\mathrm{N}.$$

(β) Για τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών, επιλάγουμε ως σημείο εφαρμογής την θέση στην οποία εφαρμόζεται η $\vec{F}_1$ (ώστε η ροπή αυτής είναι μηδέν). Έχουμε για το μέτρο της ολικής ροπής

$$\tau = -(20\,\mathrm{N}) \cdot 6d + (10\,\mathrm{N}) \cdot 2d - (30\,\mathrm{N}) \cdot d + F_2 \cdot 2d = 0 \Rightarrow F_2 = 65\,\mathrm{N}.$$

(γ) Μπορούμε τώρα να βρούμε την F_1 συνδυάζοντας τις συνθήκες ισορροπίας

$$F_1 = F_2 - 20\,\mathrm{N} \Rightarrow F_1 = 45\,\mathrm{N}. \ \square$$

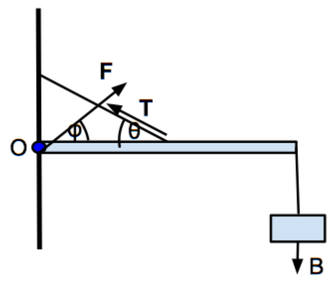
Ας υποθέσουμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίζαμε τη ροπή ως προς διαφορετικό σημείο και ότι το σημείο εφαρμογής της F_1. Έστω $\vec{r}_i$ οι θέσεις εφαρμογής των δυνάμεων ως προς το αρχικό σημείο υπολογισμού των ροπών και $\vec{r}_i'$ οι θέσεις ως προς το νέο σημείο και ας είναι $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{r}_0$. Ο νέος υπολογισμός της ροπής δίνει

$$\vec{\tau}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{r}_0) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_0 \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{\tau}. \tag{5.5.3}$$

Η τελευταία προκύπτει δεδομένου ότι στην ισορροπία η συνισταμένη δύναμη είναι $\sum \vec{F}_i = 0$.

Παρατήρηση 5.5.1. *Κατά τον υπολογισμό των συνθηκών ισορροπίας, για τον υπολογισμό της ροπής μπορούμε να επιλέγουμε ως σημείο υπολογισμού της ροπής αυτό που απλοποιεί κάθε φορά τον υπολογισμό.*

Παράδειγμα 5.5.3. Ένα αντικείμενο εξαρτάται από τη μία άκρη αβαρούς ράβδου μήκους L η οποία είναι στερεωμένη από το άλλο άκρο σε τοίχο με καρφί και από ένα καλώδιο το οποίο είναι δεμένο στη μέση της ράβδου υπό γωνία $\theta = 30^o$. Αν το βάρος του σώματος είναι $B = 1\,\mathrm{N}$ και αυτό βρίσκεται σε ισορροπία, βρείτε (α) την τάση στο καλώδιο και (β) τη δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το καρφί.



Λύση. Η συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς το άκρο O είναι

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow \frac{L}{2} T \sin\theta - LB = 0 \Rightarrow B = \frac{T}{2} \sin\theta \Rightarrow T = \frac{2B}{\sin\theta} = 4\,\mathrm{N}. \quad (1)$$

ΟΙ συνθήκες μηδενισμού των δυνάμεων στους άξονες x και y αντίστοιχα είναι

$$\begin{aligned} &F\cos\phi - T\cos\theta = 0 \Rightarrow F\cos\phi = T\cos\theta \\ &F\sin\phi + T\sin\theta - B = 0 \Rightarrow F\sin\phi = B - T\sin\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Διαιρώντας τες κατά μέλη παίρνουμε για την κατεύθυνση ϕ της δύναμης $\vec{F}$

$$\tan\phi = \frac{B}{T\cos\theta} - \tan\theta.$$

Αντικαθιστούμε το B από την (1) βρίσκουμε

$$\tan\phi = \frac{1}{2}\tan\theta - \tan\theta = -\frac{1}{2}\tan\theta \Rightarrow \tan\phi = -0.2887 \Rightarrow \phi = -16.1^o$$

Τέλος, από την (1) αντικαθιστώντας την (2) έχουμε

$$F\sin\phi = -B \Rightarrow F = -\frac{B}{\sin\phi} = 3.6\,\mathrm{N}. \ \square$$

Κεφάλαιο 6

Θέματα μηχανικής

6.1 Ελαστικότητα

6.1.1 Εισαγωγή

$$\text{τάση} = \text{μέτρο ελαστικότητας} \times \text{παραμόρφωση}$$

6.1.2 Εφελκυσμός και συμπίεση: ελαστικότητα μήκους

Έστω ένα κυλινδρικό σώμα με επιφάνεια βάσης A και ύψος L, στο οποίο ασκούμε δύναμη F στην δύο βάση του. Η F είναι κάθετη στην επιφάνεια της βάσης. Τότε

$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L} \tag{6.1.1}$$

όπου ΔL είναι η παραμόρφωση που υφίσταται λόγω της F. Το E ονομάζεται *μέτρο του Young*.

6.1.3 Διάτμηση: ελαστικότητα σχήματος

Έστω ότι ασκούμε δύναμη παράλληλη στο επίπεδο μίας επιφάνειας (π.χ., της βάσης). Τότε το σώμα παραμορφώνεται κατά Δx και ισχύει

$$\frac{F}{A} = G\,\frac{\Delta x}{L}. \tag{6.1.2}$$

Το G ονομάζεται *μέτρο διάτμησης*.

6.1.4 Υδροστατική πίεση: ελαστικότητα όγκου

Έστω σώμα το οποίο βρίσκεται υπό υδροστατική πίεση. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα σφαιρικό σώμα όγκου V το οποίο βρίσκεται μέσα σε υγρό και η πίεση που του ασκείται από το υγρό είναι p. Ο όγκος του σώματος θα αλλάξει κατά ΔV λόγω της πίεσης και γράφουμε

$$p = B\,\frac{\Delta V}{V}, \tag{6.1.3}$$

όπου το B ονομάζεται *υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας*.

Παράδειγμα 6.1.1. (Halliday ενδεικτικό πρόβλημα 12-5) Το ένα άκρο χαλύβδινης ράβδου ακτίνας $R = 9.5\,\mathrm{mm}$ και μήκους $L = 81\,\mathrm{cm}$ κρατιέται σε μία μέγγενη. Μία δύναμη μέτρου $F = 62\,\mathrm{kN}$ εφαρμόζεται κάθετα στην επιφάνεια του άλλου άκρου. Πόση είναι η τάση στη ράβδο και ποια είναι η επιμήκυνση ΔL και η παραμόρφωση της ράβδου;

Λύση. Τάση
$$\frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = 2.2 \times 10^8\,\mathrm{N/m^2}.$$
Το όριο ελαστικότητας του χάλυβα είναι $2.5 \times 10^8\,\mathrm{N/m^2}$.

Η τιμή του μέτρου του Young για τον χάλυβα είναι $E = 2.0 \times 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$. Οπότε
$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = 0.89\,\mathrm{mm}.$$
Άρα, η παραμόρφωση είναι
$$\frac{\Delta L}{L} = 0.11\,\%.$$

Κεφάλαιο 7

Ταλαντώσεις και κύματα

7.1 Ταλαντώσεις

7.1.1 Απλή αρμονική κίνηση

Κίνηση που επαναλαμβάνεται ονομάζεται *περιοδική κίνηση* ή *αρμονική κίνηση* (επίσης *ταλάντωση*). Αυτή χαρακτηρίζεται από την *περίοδό* της T, δηλαδή, το χρόνο που παίρνει για να επαναληφθεί η κίνηση. Η *συχνότητα* είναι ο αριθμός των πλήρων περιόδων στη μονάδα του χρόνου

$$f = \frac{1}{T}. \tag{7.1.1}$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που η μετατόπιση ενός σωματίου από μία κεντρική θέση (π.χ., την θέση ισορροπίας ελατηρίου) δίνεται από την

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi). \tag{7.1.2}$$

Αυτή ονομάζεται *απλή αρμονική κίνηση*. Το x_m λέγεται *πλάτος ταλάντωσης*. Αν T η περίοδος τότε πρέπει $x(t) = x(t+T) \Rightarrow \omega(t+T) = \omega t + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi$. Άρα η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \tag{7.1.3}$$

Επιλέγουμε $x_m > 0$ και παρατηρούμε ότι $|x(t)| \leq x_m$ για κάθε t. Λέμε το x_m πλάτος της ταλάντωσης. Τέλος, η ϕ είναι μία σταθερά μέσω της οποίας δίνεται η αρχική θέση $x(t=0) = x_m \cos\phi$.

Παρατήρηση 7.1.1. *Μεταβολή του ϕ στην εξίσωση για την θέση $x(t)$ μετατοπίζει την συνημιτονοειδή καμπύλη. Αν πάρουμε $\phi = -\pi/2$ τότε $x(t) = x_m \cos(\omega t - \pi/2) = x_m \sin(\omega t)$.*

Η ταχύτητα, για απλή αρμονική κίνηση, είναι

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi). \tag{7.1.4}$$

Παρατηρούμε ότι $|v(t)| \leq v_m := |\omega x_m|$.

Η επιτάχυνση, για απλή αρμονική κίνηση, είναι

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi). \tag{7.1.5}$$

Παρατηρούμε ότι $|a(t)| \leq a_m := |\omega^2 x_m|$.

Είναι σημαντικό ότι

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \tag{7.1.6}$$

Ο νόμος Νεύτωνα που θα έδινε αυτή την επιτάχυνση είναι

$$F = ma \Rightarrow F = -(m\omega^2)x. \tag{7.1.7}$$

Αυτός είναι ακριβώς ο νόμος Hooke (του ελατηρίου) $F = -kx$, αν πάρουμε $k = m\omega^2$. Με βάση όσα είπαμε παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η δύναμη ελατηρίου δίνει απλή αρμονική κίνηση με

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{7.1.8}$$

Παράδειγμα 7.1.1. Σώμα μάζας $m = 680\,\mathrm{g}$ είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $k = 65\,\mathrm{N/m}$. Το σώμα σύρεται σε απόσταση $\ell = 11\,\mathrm{cm}$ και απελευθερώνεται από την ηρεμία. Περιγράψτε την κίνηση.
Λύση. Το σύστημα ικανοποιεί τον νόμο Νεύτωνα $ma = -kx$, άρα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Αν πάρουμε

$$x(t) = \ell\cos(\omega t), \tag{Π1}$$

τότε έχουμε $v = -\omega\ell\sin(\omega t)$. Για $t = 0$ παίρνουμε $x(t = 0) = \ell,\ v(t = 0) = 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι δεδομένες αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Ώστε έχουμε βρεί με την Εξ. (Π1) την κίνηση του σώματος για κάθε t, δηλαδή, την λύση της εξ. Νεύτωνα.

Το πλάτος ταλάντωσης είναι $\ell = 11\,\mathrm{cm}$. Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65\,\mathrm{N/m}}{0.68\,\mathrm{kg}}} = 9.78\,\mathrm{rad/sec}.$$

Η συχνότητα είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9.78\,\mathrm{rad/sec}}{2\pi\,\mathrm{rad}} = 1.56\,\mathrm{sec}^{-1} = 1.56\,\mathrm{Hz}. \ \square$$

Παρατήρηση 7.1.2. *Ο νόμος του Νεύτωνα στη μορφή*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{7.1.9}$$

δίνει απλή αρμονική ταλάντωση για τη μετατόπιση $x(t)$.

Παράδειγμα 7.1.2. **(Γωνιακός απλός αρμονικός ταλαντωτής**, [1] παρ. 15-5) Θεωρούμε έναν δίσκο ο οποίος συνδέεται στο κέντρο του με μία ευλύγιστη ράβδο και μπορεί έτσι να στρέφεται (αποκλίνοντας κατά μικρές γωνίες θ) γύρω από τον άξονά του. Ας υποθέσουμε ότι η ροπή που ασκείται από τη ράβδο στον δίσκο είναι

$$\tau = -\kappa\theta,$$

όπου θ είναι η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου από την θέση ισορροπίας. Το κ είναι μία σταθερά που λέγεται *σταθερά στρέψης*. Ας δούμε την κίνηση που θα κάνει ο δίσκος.
Λύση. Ο νόμος για τη μεταβολή της στροφορμής του δίσκου (στερεό σώμα) είναι

$$\tau = I\alpha,$$

όπου I η ροπή αδράνειας και α η γωνιακή επιτάχυνσή του:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Παρατηρήστε ότι αυτή είναι απολύτως ανάλογη με τη σχέση $a = d^2x/dt^2$. Ώστε έχουμε

$$I\alpha = -\kappa\theta \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa\theta = 0,$$

από όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η θ θα κάνει απλή αρμονική κίνηση:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi).$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}.$$

7.1.2 Ενέργεια στην απλή αρμονική κίνηση

Αφού η δύναμη στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι $F = -m\omega^2 x$, η δυναμική ενέργεια είναι

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{7.1.10}$$

Αντικαθιστούμε την μετατόπιση $x(t)$ και έχουμε την δυναμική ενέργεια σαν συνάρτηση του χρόνου:

$$U(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \tag{7.1.11}$$

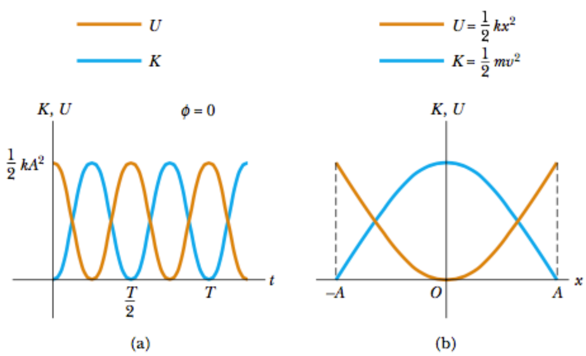
Η κινητική ενέργεια είναι

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi). \tag{7.1.12}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι μηχανική ενέργεια είναι σταθερή στον χρόνο (όπως αναμένεται για μία διατηρητική δύναμη):

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2. \tag{7.1.13}$$

Παρατήρηση 7.1.3. *Η ολική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους ταλάντωσης.*



Σχήμα 7.1: (a) Κινητική και δυναμική ενέργεια ως συναρτήσεις του χρόνου, για απλή αρμονική κίνηση. (b) Κινητική και δυναμική ενέργεια ως συναρτήσεις της απομάκρυνσης x. [Από [2] Σχ. 15.10]

Έστω ότι η ενέργεια έχει μία συγκεκριμένη τιμή $E_0 \geq 0$, ώστε είναι:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{7.1.14}$$

Μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα v για κάθε θέση x του σωματίου

$$v^2 = \frac{2E_0}{m} - \omega^2 x^2 \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2E_0}{m} - \omega^2 x^2}. \tag{7.1.15}$$

Για να ισχύει $v^2 \geq 0$, ή ισοδύναμα, για να είναι $K \geq 0$, έχουμε τη συνθήκη

$$E_0 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{2E_0}{m\omega^2}. \tag{7.1.16}$$

Μπορούμε να μελετήσουμε και γραφικά την παραπάνω ανισότητα. Αν κάνουμε τη γραφική παράσταση της $U(x)$ και θέσουμε στο ίδιο γράφημα την ευθεία $E = E_0 > 0$, μπορούμε να δούμε τα όρια της κίνησης, δηλαδή, το διάστημα στο οποίο ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη. Αυτό είναι $-x_0 \leq x \leq x_0$, με

$$x_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}}. \tag{7.1.17}$$

Παρατήρηση 7.1.4. *Η ταχύτητα v μηδενίζεται στα όρια της ταλαντωτικής κίνησης $x = \pm x_0$. Στα σημεία αυτά μάλιστα αλλάζει η φορά της.*

7.1.3 Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Ας θεωρήσουμε ένα ελατήριο, σε οριζόντια θέση, του οποίου το ένα άκρο είναι σταθερά συνδεδεμένο σε ένα έμβολο. Αυτό μπορεί να κινείται και να εκτελεί ταλάντωση με μία συχνότητα έστω ω_F, οπότε η θέση του πακτωμένου άκρου δίνεται από

$$d = d_0 \cos(\omega_F t). \tag{7.1.18}$$

Θα λέμε την ω_F *εξαναγκάζουσα συχνότητα* και αυτή δεν είναι γενικά ίση με τη φυσική συχνότητα ταλαντώσεων μάζας m στην άκρη του ελατηρίου $\omega = \sqrt{k/m}$.

Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο επί της μάζας είναι

$$F = -k(x-d) = -k\left[x - d_0 \cos(\omega_F t)\right] = -kx + kd_0 \cos(\omega_F t), \tag{7.1.19}$$

οπότε ο νόμος Νεύτωνα δίνει

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}d_0 \cos(\omega_F t) \\ \Rightarrow &\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \omega^2 d_0 \cos(\omega_F t). \end{aligned}$$

Για να βρούμε λύση αυτής της εξίσωσης θα δοκιμάσουμε τη μορφή

$$x(t) = x_m \cos(\omega_F t). \tag{7.1.20}$$

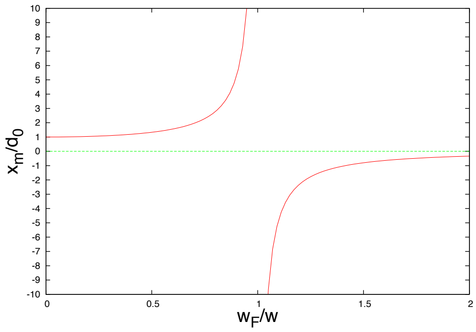
Η 2η παράγωγος είναι $d^2x/dt^2 = -\omega_F^2 x_m \cos(\omega_F t)$ και αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει

$$\begin{aligned} &-\omega_F^2 x_m \cos(\omega_F t) + \omega^2 x_m \cos(\omega_F t) = \omega^2 d_0 \cos(\omega_F t) \\ \Rightarrow &x_m = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_F^2}\, d_0 = \frac{1}{1 - \frac{\omega_F^2}{\omega^2}}\, d_0. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Παρατήρηση 7.1.5. *Το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ίση με την εξαναγκάζουσα συχνότητα ω_F και πλάτος ταλάντωσης καθορισμένο και ίσο με το x_m, το οποίο βρήκαμε.*

Παρατήρηση 7.1.6. *Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από το λόγο της εξαναγκάζουσας προς την φυσική συχνότητα του ελατηρίου. Αν η ω_F γίνει περίπου ίση με την ω τότε το πλάτος της ταλάντωσης μεγαλώνει και γίνεται άπειρο αν $\omega_F = \omega$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε συντονισμό.*



Σχήμα 7.2: Πλάτος εξαναγκασμένης ταλάντωσης x_m/d_0 ως συνάρτηση της εξαναγκάζουσας συχνότητας ω_F/ω. Για $\omega_F/\omega = 1$ έχουμε απειρισμό του x_m.

7.2 Κύματα

7.2.1 Εγκάρσια και διαμήκη κύματα

Μία διαταραχή που προκαλούμε σε μία αρχικά ακίνητη χορδή μπορεί να μετακινηθεί υπό την μορφή ενός παλμού. Αυτόν μπορούμε να τον θεωρήσουμε ως μία πληροφορία η οποία διαδίδεται. Μία συνεχής δημιουργία διαταραχών, όταν αυτές διαδίδονται κατά μήκος της χορδής, μπορεί να δημιουργήσει ένα ημιτονοειδές κύμα.

Στην περίπτωση χορδής η οποία διαταράσσεται σε διεύθυνση κάθετη στη χορδή, το κύμα λέγεται *εγκάρσιο*, αφού η κίνηση της χορδής γίνεται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Σε ένα δεύτερο πείραμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι πιέζουμε περιοδικά τον αέρα μέσα σε έναν σωλήνα. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει κύμα στο οποίο η μετατόπιση του αέρα είναι στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος (κατά μήκος του σωλήνα). Τέτοια κύματα λέγονται *διαμήκη*.

7.2.2 Μήκος κύματος και συχνότητα

Ας θεωρήσουμε μία χορδή που εκτείνεται στη διεύθυνση x και ότι κάθε σημείο της χορδής μπορεί να αποκλίνει (να μετατοπίζεται από τη θέση ισορροπίας) προς την y διεύθυνση. Για την περιγραφή ενός κύματος χρειαζόμαστε τη μετατόπιση y κάθε σημείου της χορδής σε κάθε στιγμή στο χρόνο. Δηλαδή κοιτάζουμε την εξάρτηση της θέσης y στο x και t, ώστε $y = h(x,t)$. Αν κάθε σημείο κάνει μία αρμονική ταλάντωση τότε έχουμε

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t), \qquad y_m, k, \omega : \text{σταθερές}. \tag{7.2.1}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο της χορδής $x = x_0$ to kx_0 μπορεί να θεωρηθεί ως μία απλή φάση και έχουμε αρμονική ταλάντωση στο χρόνο με γωνιακή συχνότητα ω. Ξέρουμε ότι αν T είναι η περίοδος ταλάντωσης τότε

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{7.2.2}$$

Το y_m δίνει το πλάτος της ταλάντωσης.

Θα ονομάσουμε την ποσότητα $kx - \omega t$ *φάση* του κύματος. Η φάση αλλάζει γραμμικά με το χρόνο, όπως και στις ταλαντώσεις. Η φάση εξαρτάται γραμμικά και από τη χωρική μεταβλητή x. Για δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_0$ η κυματική μορφή $y(x,t)$ επαναλαμβάνεται στο x ανά μία απόσταση την οποία θα συμβολίσουμε με λ, και η οποία ονομάζεται *μήκος κύματος*. Ισχύει

$$\sin(kx - \omega t_0) = \sin[k(x+\lambda) - \omega t_0] \Rightarrow k\lambda = 2\pi,$$

άρα

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{7.2.3}$$

Ονομάζουμε το k *κυματάριθμο*, δίνει τον αριθμό ακτινίων (rad) που περιέχονται στη μονάδα μήκους της χορδής (του κύματος).

Τέλος σημειώστε ότι, όπως και στις απλές ταλαντώσεις, μπορούμε να προσθέσουμε μία σταθερή φάση ϕ στη μορφή του κύματος οπότε παίρνουμε τη γενικότερη έκφραση:

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi). \tag{7.2.4}$$

7.2.3 Ταχύτητα οδεύοντος κύματος

Ξέρουμε από εμπειρία ότι τα κύματα φαίνεται να μετατοπίζονται με κάποια συνήθως σταθερή ταχύτητα. Αυτή η μετατόπιση φαίνεται στην κυματική μορφή από την μετακίνηση της φάσης της. Αν υποθέσουμε ότι η φάση είναι ϕ_0 για κάποιο δεδομένο σημείο σε δεδομένο χρόνο, τότε

$$kx - \omega t = \phi_0.$$

Με την πάροδο του χρόνου t η ίδια φάση ϕ_0 πετυχαίνεται σε μετατοπισμένη θέση x. Άρα η μορφή του κύματος φαίνεται να κινείται προς την θετική κατεύθυνση x.

Για την ταχύτητα, αρκεί να παραγωγίσουμε τη φάση ως προς χρόνο:

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}. \tag{7.2.5}$$

Επίσης

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \tag{7.2.6}$$

Η $v = \lambda/T$ λέει ότι η ταχύτητα είναι ίση με ένα μήκος κύματος ανά περίοδο.

Ένα κύμα με αρνητική ταχύτητα $v = -\omega/k$ θα ήταν το

$$y(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t). \tag{7.2.7}$$

Παράδειγμα 7.2.1. Κύμα έχει τη μορφή

$$y(x,t) = (2.1\,\mathrm{m})\ \sin[(7\,\mathrm{rad/m})\,x - (3\,\mathrm{rad/sec})\,t].$$

Η ταχύτητά του είναι

$$v = \frac{3\,\mathrm{rad/sec}}{7\,\mathrm{rad/m}} = \frac{3}{7}\,\mathrm{m/sec}. \ \square$$

Παρατήρηση 7.2.1. *Σε ένα μέσο (π.χ. χορδή) με καθορισμένη ταχύτητα οδεύοντος κύματος v, εάν σε ένα κύμα καθορίσουμε τον κυματαριθμό k τότε καθορίζεται η γωνιακή συχνότητα $\omega = vk$.*

7.2.4 Εγκάρσια ταχύτητα

Παρατήρηση 7.2.2. *Τα στοιχεία του μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα κινούνται κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η ταχύτητα κίνησής τους λέγεται εγκάρσια ταχύτητα.*

Παράδειγμα 7.2.2. Πόση είναι η *εγκάρσια ταχύτητα* u για το κύμα $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$;
Λύση. Η εγκάρσια ταχύτητα είναι ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει η μετατόπιση y κάθε στοιχείου. Είναι (για κάθε σταθερό και δεδομένο σημείο $x = x_0$)

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx_0 - \omega t). \ \square$$

7.2.5 Ταχύτητα κύματος σε χορδή

Για να πετύχουμε διάδοση κύματος σε χορδή είναι λογικό να σκεφτούμε ότι θα πρέπει να ασκούνται δυνάμεις στη στοιχεία της χορδής (αλλιώς δεν θα ήταν δυνατόν να ταλαντώνονται και να δημιουργηθεί το κύμα). Άρα, στη μάζα κάθε στοιχείου της χορδής ασκείται κάποια τάση τ η οποία προκαλεί τον κυματισμό. Αν θεωρούμε τη χορδή ως πολύ λεπτή η ποσότητα που μετράει τη μάζα της είναι η γραμμική πυκνότητα $\mu = m/L$ όπου m η συνολική της μάζα και L το μήκος της.

Παρατηρήστε ότι οι φυσικές διαστάσεις της γραμμικής πυκνότητας είναι kg/m και οι διαστάσεις της τάσης είναι $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/sec}^2$. Ο συνδυασμός τους ο οποίος δίνει μονάδες ταχύτητας είναι $\sqrt{\tau/\mu}$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του κύματος θα δίνεται από

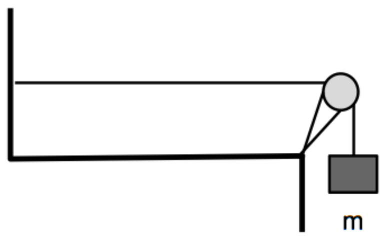
$$v = C\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \tag{7.2.8}$$

όπου C είναι μία σταθερά η οποία δεν μπορεί να βρεθεί από την παραπάνω διαστατική ανάλυση.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να βρεθεί και αν εφαρμόσουμε αναλυτικά το νόμο Νεύτωνα στη χορδή (δείτε [1] σελ 529-530), οπότε βρίσκουμε ακριβώς

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \tag{7.2.9}$$

Παράδειγμα 7.2.3. Ομογενές νήμα έχει μάζα $m_L = 0.3\,\mathrm{kg}$ και μήκος $L = 6\,\mathrm{m}$. Το ένα άκρο του νήματος είναι στερεωμένο σε τοίχο, ενώ στο άλλο είναι αναρτημένο σώμα μάζας $m = 2\,\mathrm{kg}$ έτσι ώστε διατηρείται σταθερή τάση στο νήμα. Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία θα διαδοθεί ένας παλμός στο νήμα.



Λύση. Η τάση του νήματος είναι ίση με το βάρος της μάζας m

$$\tau = mg = (2\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/sec}^2) = 19.6\,\mathrm{N}.$$

Η γραμμική πυκνότητα του νήματος είναι

$$\mu = \frac{m_L}{L} = \frac{0.3\,\mathrm{kg}}{6\,\mathrm{m}} = 0.05\,\mathrm{kg/m}.$$

Απομένως το μέτρο ταχύτητας του παλμού είναι

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = 19.8\,\mathrm{m/sec}. \ \Box$$

7.2.6 Ανάκλαση κυμάτων

(Δείτε αναλυτικότερα στο [6] κεφ 16.6)

Ας θεωρήσουμε παλμό κύματος (δηλαδή ένα τμήμα κύματος) το οποίο ταξιδεύει σε νήμα το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε τοίχο. Όταν ο παλμός φθάσει στον τοίχο θα ανακλαστεί. Αυτό που θα συμβεί είναι ότι κατά την πρόσκρουση το νήμα θα ασκήσει δύναμη στον τοίχο, π.χ., προς τα επάνω εάν ο παλμός κύματος συνίσταται σε ένα τμήμα της χορδής το οποίο έχει απόκλιση προς τα επάνω. Ο τοίχος θα ασκήσει μία αντίδραση στο νήμα προς τα κάτω. Αυτό θα αντιστρέψει τον παλμό ο οποίος θα ταξιδεύει πλέον αντεστραμένος προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αυτό ονομάζουμε ανάκλαση του κύματος.

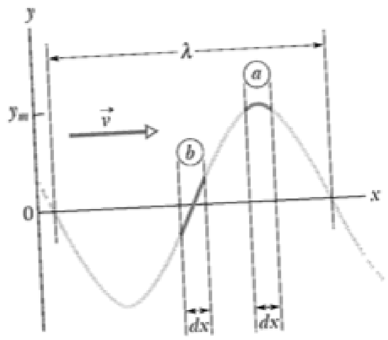
Θα μπορούσαμε να καταστευάσουμε χορδή η οποία εξαρτάται στη μία άκρη της από έναν στήλο μέσω ενός δακτυλίου, έτσι ώστε το άκρο αυτό είναι ελεύθερο να κινείται στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Αν παλμός κύματος φθάσει στον στύλο θα ανακλαστεί, δηλαδή θα αναστραφεί η ταχύτητά του, αλλά θα ταξιδεύει στην αντίθετη κατεύθυνση χωρίς να αναστραφεί.

Σε μία περίπτωση που η άκρη του νήματος δεν είναι συνδεδεμένη σε κάποιο σταθερό μέσο, αλλά σε κάποιο μαλακότερο μέσο (π.χ., σε μία δεύτερη χορδή η οποία είναι πιο χοντρή ή πιο βαριά, κλπ, από την πρώτη) τότε περιμένουμε ότι ένα μέρος του παλμού θα ανακλαστεί και ένα άλλο μέρος θα συνεχίσει να ταξιδεύει στο δεύτερο μέσο. Έχουμε δηλαδή μερική ανάκλαση και μερική διάδοση του κύματος.

7.2.7 Διάδοση ενέργειας κύματος

Η εγκάρσια κίνηση της χορδής σημαίνει ότι τα στοιχεία της χορδής έχουν κινητική ενέργεια. ’Οταν το στοιχείο είναι στην ακρότατη θέση (θέση a στο σχήμα) η εγκάρσια ταχύτητά του και κατά συνέπεια η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν. Όταν είναι στην θέση b τότε είναι μέγιστη.

Επίσης, τα στοιχεία της χορδής έχουν δυναμική ενέργεια αφού απομακρύνονται από την θέση ισορροπίας τους και αφού υποτίθεται ότι δρα επάνω τους μία δύναμη επαναφοράς. Στην θέση a (στο σχήμα) το στοιχείο είναι στη φυσική του κατάσταση, άρα η δυναμική ενέργεια ελαστικότητας είναι μηδέν, ενώ στο σημείο b έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια αφού έχει υποστεί μέγιστη παραμόρφωση.



Σχήμα 7.3: Πηγή: Halliday, Resnick. Walker, p. 421.

Ένα στοιχείο dm έχει κινητική ενέργεια

$$dK = \frac{1}{2}(dm)\,u^2.$$

Είναι

$$u = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

και, χρησιμοποιώντας τη γραμμική πυκνότητα: $dm = \mu\, dx$. Ώστε

$$dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)\, dx.$$

Παρατήρηση 7.2.3. *Βλέπουμε ότι η κινητική ενέργεια στοιχείου dx μεταβάλλεται με το χρόνο. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ενέργεια που χάνεται από το ένα στοιχείο μεταφέρεται στο διπλανό του (αντίσοιχα, η αύξηση της ενέργειας στο dx σημαίνει ότι αυτή μεταφέρθηκε από το διπλανό στοιχείο).*

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx-\omega t)\,\frac{dx}{dt}$$

δίνει τον ρυθμό με τον οποίο η κινητική ενέργεια μεταφέρεται με το κύμα. Αφού $dx/dt = \upsilon$, έχουμε

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 y_m^2 \upsilon \cos^2(kx-\omega t). \tag{7.2.10}$$

Πιό χρήσιμη ποσότητα είναι ο *μέσος ρυθμός* μεταφοράς ενέργειας σε ακέραιο μήκος κύματος λ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dK}{dt}\right)_\mu &= \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 y_m^2 \upsilon\;\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \cos^2(kx-\omega t)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\mu\,\omega^2 y_m^2 \upsilon. \end{aligned}\tag{7.2.11}$$

Προκύπτει με έναν ανάλογο υπολογισμό ότι και η μέση δυναμική ενέργεια ελαστικότητας έχει την ίδια τιμή. Δηλαδή οι μέσες κινητική και δυναμική ενέργεια είναι ίσες.

Καταλήγουμε ότι η *μέση ισχύς* είναι

$$P_\mu = 2\left(\frac{dK}{dt}\right)_\mu = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 y_m^2 \upsilon. \tag{7.2.12}$$

Παρατήρηση 7.2.4. *Η εξάρτηση της ισχύος από το τετράγωνο του πλάτους και από το τετράγωνο της συχνότητας είναι ένα αποτέλεσμα που ισχύει για κύματα οποιουδήποτε τύπου.*

Παράδειγμα 7.2.4. Μία χορδή γραμμικής πυκνότητας $\mu = 525\,\mathrm{g/m}$ βρίσκεται υπό τάση $T = 45\,\mathrm{N}$. Δημιουργούμε στην χορδή ημιτονοειδή κύματα συχνότητας $f = 12\,\mathrm{Hz}$ και πλάτους $y_m = 8.5\,\mathrm{mm}$. Ποιός ο μέσος ρυθμός διάδοσης ενέργειας;
Λύση. Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = 754\,\mathrm{rad/sec}.$$

Ταχύτητα κυμάτων στην χορδή

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 9.26\,\mathrm{m/sec}.$$

Ρυθμός διάδοσης ενέργειας (ισχύς κύματος)

$$P_\mu = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 y_m^2 \upsilon \approx 100\,\mathrm{W}.$$

7.2.8 Η εξίσωση κύματος

Σε στοιχείο dx της χορδής ασκείται συνισταμένη δύναμη στην κάθετη κατεύθυνση

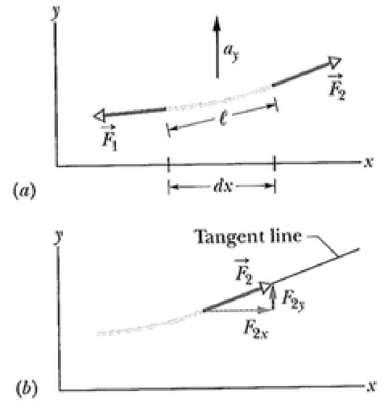
$$F_{2y} - F_{1y} = dm\,a_y \tag{7.2.13}$$

όπου η μάζα του στοιχείου είναι

$$dm = \mu\,dx$$

και η εγκάρσια επιτάχυνση του στοιχείου είναι

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{7.2.14}$$



Σχήμα 7.4: Σε μία χορδή η οποία έχει παραμορφωθεί ασκείται τάση η οποία μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. (Από [1], Fig. 16.10)

Ας δούμε τις δύο δυνάμεις που ασκούνται στο στοιχείο της χορδής. Κάθε δύναμη είναι εφαπτομένη στην χορδή και έχουμε

$$\frac{F_{2y}}{F_{1y}} = S_2 \tag{7.2.15}$$

όπου ονομάσαμε S_2 την κλίση της καμπύλης στο δεξιό άκρο του στοιχείου και είναι $S_2 = dy/dx$. Το μέτρο της τάσης είναι

$$T = F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} \approx F_{2x} \tag{7.2.16}$$

διότι έχουμε υποθέσει μικρή παραμόρφωση της χορδής, δηλαδή, $F_{2y} \ll F_{2x}$. Η (7.2.15) δείνει

$$F_{2y} = TF_{2x}$$

και επίσης έχουμε

$$F_{1y} = TF_{1x}.$$

Αντικαθιστούμε τα αποτελέσματα στην αρχική εξίσωση (7.2.13) και παίρνουμε

$$T(S_2 - S_1) = (\mu\, dx)\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{S_2 - S_1}{dx} = \frac{\mu}{T}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{7.2.17}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{S_2 - S_1}{dx} = \frac{dS}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

ώστε τελικά παίρνουμε την εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad \upsilon^2 = \frac{T}{\mu}. \tag{7.2.18}$$

7.3 Υπέρθεση κυμάτων και στάσιμα κύματα

7.3.1 Αρχή της υπέρθεσης

Αν δύο κύματα περάσουν ταυτόχρονα από μία περιοχή τότε το ένα θα προστεθεί, κατά κάποιο τρόπο, στο άλλο. Η παρατήρηση και το πείραμα δείχνουν ότι θα συμβεί με την έννοια του αλγεβρικού αθροίσματος των μετατοπίσεων $y_1(x,t), y_2(x,t)$ των δύο κυμάτων:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t). \tag{7.3.1}$$

Αυτή η έκφραση αποτελεί την *αρχή της υπέρθεσης*.

Παρατήρηση 7.3.1. *Αλληλοεπικαλυπτόμενα κύματα δεν επηρεάζουν το ένα τη διάδοση του άλλου.*

Η αρχή της υπέρθεσης σχετίζεται με την ιδιότητα των δυνάμεων, οι οποίες ευθύνονται για τη δημιουργία των κυμάτων, να αθροίζονται αλγεβρικά όταν τα κύματα επικαλύπτονται. Αυτό το θέμα μπορεί να γίνει πιο σαφές με τη χρήση διαφορικών εξισώσεων.

7.3.2 Συμβολή κυμάτων

Ας υποθέσουμε ότι στέλνουμε δύο κύματα $y_1 = y_{1,m}\sin(kx-\omega t)$ και $y_2 = y_{2.m}\sin(kx-\omega t)$ (του ίδιου μήκους κύματος) σε μία χορδή. Από την αρχή της υπέρθεσης έχουμε το συνολικό κύμα

$$y(x,t) = y_{1,m}\sin(kx-\omega t) + y_{2,m}\sin(kx-\omega t) = (y_{1,m}+y_{2,m})\sin(kx-\omega t).$$

Πιό γενικά, θα μπορούσαμε να έχουμε ένα κύμα

$$y_1(x,t) = y_m\sin(kx-\omega t) \tag{7.3.2}$$

και ένα άλλο μετατοπισμένο ως προς το πρώτο

$$y_2(x,t) = y_m\sin(kx-\omega t+\phi). \tag{7.3.3}$$

Λέμε ότι τα δύο κύματα είναι *εκτός φάσης* ή ότι έχουν *διαφορά φάσης* ϕ.

Για να εφαρόσουμε την αρχή της υπέρθεσης

$$y(x,t) = y_m\sin(kx-\omega t) + y_m\sin(kx-\omega t+\phi),$$

θα χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right].$$

Βρίσκουμε

$$y(x,t) = \left[2y_m\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\sin\left(kx-\omega t+\frac{\phi}{2}\right). \tag{7.3.4}$$

Το συνιστάμενο κύμα διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση με τα αρχικά κύματα και το πλάτος του είναι $2y_m\cos(\phi/2)$. Το πλάτος μικραίνει όσο αυξάνεται το ϕ, ώστε τα κύματα φαίνεται να καταστρέφουν το ένα το άλλο.

Στην ειδική περίπτωση που $\phi = \pi$ έχουμε

$$y(x,t) = y_m\sin(kx-\omega t) + y_m\sin(kx-\omega t+\pi) = y_m\sin(kx-\omega t) - y_m\sin(kx-\omega t) = 0,$$

δηλαδή παίρνουμε πλήρως καταστρεπτική συμβολή των κυμάτων.

Παράδειγμα 7.3.1. Ας θεωρήσουμε ένα κύμα $y = y_0 \sin(kx - \omega t)$ το οποίο σε κάποιο σημείο διακλαδίζεται σε δύο ίδια κύματα $y_{1,2} = (y_0/2) \sin(kx - \omega t)$. Το κάθε νέο κύμα ακολουθεί διαφορετικές διαδρομές με μήκη r_1 και r_2 αντίστοιχα και ακολούθως τα δύο κύματα συμβάλουν (δηλαδή ξαναενώνονται). Ας δούμε τι προκύπτει στην θέση που συμβάλλουν τα κύματα.
Λύση. Ας υποθέσουμε, για απλότητα, ότι η φάση $kx - \omega t$ του αρχικού κύματος ήταν μηδέν στη θέση της διακλάδωσης. Τότε, σε κάθε χρονική στιγμή t, στην θέση της συμβολής, η φάση του ενός κύματος θα είναι $\phi_1 = kr_1 - \omega t$ και του δευτέρου $\phi_2 = kr_2 - \omega t$.

Άν $\phi_2 - \phi_1 = 0$ το κύμα που προκύπτει από τη συμβολή $y_1 + y_2$ δεν θα έχει διαφορά από το αρχικό κύμα y. Το ίδιο ισχύει αν $\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Αν $\phi_2 - \phi_1 = \pi$, τότε έχουμε πλήρως καταστρεπτική συμβολή, δηλαδή $y_1 + y_2 = 0$ στο σημείο που συμβάλουν. Παρατηρήστε ότι αυτή είναι η περίπτωση που η διαφορά $r_2 - r_1$ είναι ίση με μισό μήκος κύματος. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο όταν $\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi + \pi$. □

7.3.3 Στάσιμα κύματα

Ας δούμε τη συμβολή δύο κυμάτων

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= y_m \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) &= y_m \sin(kx + \omega t) \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις Από την αρχή της υπέρθεσης

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) = [2y_m \sin(kx)] \cos(\omega t). \tag{7.3.6}$$

Το αποτέλεσμα δεν περιγράφει οδεύον κύμα. Έχουμε ταλαντώσεις κάθε σημείου της χορδής με γωνιακή συχνότητα ω, ενώ το πλάτος ταλάντωσης είναι $2y_m \sin(kx)$ και είναι διαφορετικό σε κάθε θέση. Ειδικότερα, το πλάτος μηδενίζεται σε θέσεις

$$kx = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}. \tag{7.3.7}$$

Ας θεωρήσουμε ότι στο άκρο μίας χορδής παράγεται κύμα το οποίο ταξιδεύει προς τα δεξιά. Όταν αυτό ανακλαστεί στο άλλο άκρο της χορδής (ας το θεωρήσουμε σταθερό) θα έχουμε συμβολή δύο κυμάτων στη χορδή: του αρχικού και του ανακλωμένου. Οι ανακλάσεις κυμάτων μπορεί να συνεχιστούν και στα δύο άκρα της χορδής, οπότε θα έχουμε συμβολή πολλών κυμάτων με συνολικό αποτέλεσμα μικρές ταλαντώσεις της χορδής.

Υπάρχουν περιπτώσεις που τα ανακλώμενα κύματα συμβάλουν θετικά και δημιουργούν μεγάλες ταλαντώσεις της χορδής. Ας υποθέσουμε ότι η χορδή είναι τεντωμένη μεταξύ δύο σταθερών σημείων. Μπορούμε να επιλέξουμε μήκος κύματος τέτοιο ώστε το δεξιά και το αριστερά οδεύον κύμα να σχηματίζουν στάσιμο κύμα με δεσμούς στα άκρα της χορδής. Αν L το μήκος της χορδής, επιλέγουμε μήκος κύματος

$$\lambda = 2L, \qquad k = \frac{\pi}{L}, \tag{7.3.8}$$

οπότε

$$y(x,t) = 2y_m \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t). \tag{7.3.9}$$

Παρατηρήστε ότι $y(0,t) = 0 = y(L,t)$. Άρα, η συμβολή γίνεται έτσι ώστε τα άκρα της χορδής να παραμένουν σταθερά (όπως επιβάλλεται από τις συνθήκες του προβλήματος) και επίσης προκύπτει ότι έχουμε μέγιστο πλάτος στο μέσο της χορδής $x = L/2$. Γενικεύουμε την παραπάνω συνθήκη μπορούμε να πάρουμε

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.3.10}$$

για τα οποία ισχύει ότι το δημιουργούμενο στάσιμο κύμα έχει μηδενικό πλάτος στα άκρα της χορδής. Η παραπάνω λέγεται *συνθήκη συντονισμού*.

Οι συχνότητες συντονισμού είναι

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{7.3.11}$$

Άρα για κάθε χορδή έχουμε συχνότητες συντονισμού οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια μίας βασικής συχνότητας. Αυτές αναφέρονται ως 1η, 2η, 3η, κλπ αρμονική. Η 1η αρμονική $f_1 = v/(2L)$ αναφέρεται και ως *θεμελιώδης*.

Παράδειγμα 7.3.2. Οι χορδές κιθάρας παράγουν η κάθε μία την θεμελιώδη και όλες τις ανώτερες αρμονικές της. □

7.3.4 Διακροτήματα

([6] κεφ. 18.7)

Θεωρούμε δύο κύματα ίδιου πλάτους με λίγο διαφορετικές συχνότητες. Η μετατόπιση που παράγουν σε κάποιο σημείο είναι

$$y_1 = y_m \cos(\omega_1 t), \qquad y_2 = y_m \cos(\omega_2 t). \tag{7.3.12}$$

Αν αυτά συμβάλουν, η αρχή της επαλληλίας δίνει

$$y = y_1 + y_2 = y_m\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] = 2y_m \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]\, \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]. \tag{7.3.13}$$

Ας γράψουμε τις νέες συχνότητες

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \qquad \omega' = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \tag{7.3.14}$$

ώστε έχουμε

$$y = \left[2y_m \cos(\omega' t)\right]\, \cos(\omega t). \tag{7.3.15}$$

Είναι ενδιαφέρουσα η περίπτωση που οι δύο αρχικές συχνότητες διαφέρουν λίγο: $\omega_1 \approx \omega_2$. Τότε $\omega' \ll \omega$ και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το y έχει συχνότητα ω και το πλάτος του είναι $A = 2y_m \cos(\omega' t)$, δηλαδή παρουσιάζει μία αργή διαμόρφωση στο χρόνο. (Δώστε ένα σχήμα διά διακρότημα αυτής της μορφής.)

7.4 Ηχητικά κύματα

7.4.1 Ταχύτητα ηχητικών κυμάτων

Ένας όγκος αέρα ο οποίος έχει συμπιεστεί έχει μεγαλύτερη πυκνότητα και ακολούθως θα αποσυμπιεστεί μεταφέροντας την αυξημένη πυκνότητα και πίεση στους διπλανούς όγκους αέρα. Έτσι δημιουργείται ένα ηχητικό κύμα. Αυτό τελικά συνίσταται σε πυκνόματα και αραιώματα του αέρα.

Αν έχουμε μία μεταβολή της πίεσης ΔP αναμένουμε σχετική μεταβολή του όγκου V κατά $\Delta V/V$. Η δυνατότητα συμπίεσης ενός μέσου, όπως ο αέρας, δίνεται από το *μέτρο ελαστικότητας όγκου*, το οποίο είναι το πηλίκο

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}. \tag{7.4.1}$$

Περιμένουμε ότι για $\Delta P > 0$ θα είναι $\Delta V > 0$, οπότε ορίσαμε το B έτσι ώστε να είναι θετικό. Το B έχει μονάδες $\mathrm{N/m^2}$, όπως και η πίεση.

Η ταχύτητα διάδοσης κύματος εξαρτάται από την πυκνότητα μάζας του και από τις ελαστικές του ιδιότητες. Με διαστατική ανάλυση μπορούμε να βγάλουμε έναν τύπο για την ταχύτητα ηχητικού κύματος

$$v = \frac{\text{ελαστικές ιδιότητες}}{\text{πυκνότητα μάζας}}, \tag{7.4.2}$$

η οποία για τον αέρα γράφεται

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \tag{7.4.3}$$

Παράδειγμα 7.4.1. Υπολογίστε την ταχύτητα του ήχου στο νερό, το οποίο έχει μέτρο ελαστικότητας όγκου $B = 2.1 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}$ και πυκνότητα $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.
Λύση.

$$v_{\text{νερού}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}}{10^3\,\mathrm{kg/m^3}}} = 1500\,\mathrm{m/sec.}\ \square$$

7.4.2 Ηχητικό κύμα και πίεση

Περιγράφουμε το κύμα με τη μετατόπιση κάθε στοιχείου όγκου από την θέση ισορροπίας του

$$s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t). \tag{7.4.4}$$

Η μετατόπιση γίνεται κατά μήκος του άξονα x, δηλαδή στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Από τη μετατόπιση των μαζών αέρα είναι λογικό να προκύπτει και μεταβολή της πίεσης στον αέρα. Η μεταβολή της πίεσης (από την τιμή της στο αδιατάρακτο σύστημα) αναμένουμε να είναι

$$\Delta P = \Delta P_m \sin(kx - \omega t). \tag{7.4.5}$$

Ας εξαγάγουμε αυτή τη σχέση. Γνωρίζουμε ότι

$$\Delta P = -B(\Delta V)/V.$$

Ας θεωρήσουμε στρώμα αέρα πάχους Δx και επιφάνειας διατομής A, άρα όγκου $V = A\Delta x$. Στο κύμα, τα σωμάτια του αέρα κινούνται και άρα ο όγκος το αρχικού στρώματος αέρα θα αλλάξει. Η μεταβολή του πάχους του στρώματος αέρα στην θέση x είναι $\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x)$, δηλαδή, το πάχος του στρώματος αυξάνει αν τα ακρινά μόρια στο στρώμα απομακρύνονται μεταξύ τους, ενώ θα μειώνεται αν τα ακρινά μόρια πολησιάζουν. Η μεταβολή του όγκου είναι $\Delta V = A\Delta s$, οπότε είναι

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{A\Delta s}{A\Delta x} = -B\frac{\Delta s}{\Delta x} \Rightarrow \Delta P = -B\frac{ds}{dx}. \tag{7.4.6}$$

Έχουμε

$$\Delta P = -B\,\frac{d}{dx}[s_m\cos(kx-\omega t)] = Bs_m k\sin(kx-\omega t). \tag{7.4.7}$$

Χρησιμοποιώντας την $B=\rho v^2$ και τη σχέση $\omega = vk$, έχουμε

$$\Delta P = \rho v\omega s_m\,\sin(kx-\omega t) = \Delta P_m\,\sin(kx-\omega t) \tag{7.4.8}$$

όπου το πλάτος της πίεσης είναι

$$\Delta P_m = \rho v\omega s_m. \tag{7.4.9}$$

7.4.3 Εύρεση της ταχύτητας ηχητικού κύματος

([1] σελ 562. Εδώ δίνεται συνοπτική παρουσίαση.)

Έστω σωλήνας διατομής A γεμάτος με αέρα, ονομάζουμε x την θέση και P την πυκνότητα του αέρα σε κάθε θέση. Υποθέτουμε έναν ηχητικό παλμό ο οποίος κινείται με ταχύτητα $-v$ (δηλαδή, κινείται από δεξιά προς τα αριστερά). Θα μελετήσουμε το πρόβλημα στο σύστημα αναφοράς του παλμού (δηλαδή, σε αυτό στο οποίο ο παλμός είναι ακίνητος). Ένα στοιχείο αέρα, εκτός του παλμού, όγκου $\Delta V = A\Delta x$ κινείται με ταχύτητα v και ας υποθέσουμε ότι συναντά τον παλμό, ο οποίος είναι μία περιοχή μεγαλύτερης πίεσης $P+\Delta P$. Η δύναμη στην πίσω επιφάνεια του στοιχείου αέρα είναι PA και στη μπροστά είναι αντίθετη και ίση με $(P+\Delta P)A$. Η συνολική δύναμη στο στοιχείο είναι

$$F = PA-(P+\Delta P)A = -\Delta P\,A.$$

Η μάζα του στοιχείου είναι

$$\Delta m = \rho\Delta V = \rho A\Delta x = \rho Av\Delta t.$$

Από νόμο Νεύτωνα

$$-\Delta P\,A = (\rho Av\,\Delta t)\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \rho v^2 = -\frac{\Delta P}{\Delta v/v}.$$

Παρατηρούμε ότι ο όγκος του αέρα είναι αρχικά $V = Av\Delta t$ και αυτός συμπιέζεται κατά $\Delta V = A\Delta v\,\Delta t$. Συνεπώς

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\Delta v\,\Delta t}{Av\,\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}.$$

Παίρνουμε τελικά

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta P}{\Delta v/v} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = B. \tag{7.4.10}$$

7.4.4 Ενέργεια και ένταση ηχητικών κυμάτων

Έχουμε δει (για τα εγκάρσια κύματα) ότι η μέση ολική ενέργεια του κύματος ισούται με τη μέγιστη κινητική ενέργεια. Για ένα στρώμα πάχους Δx, αυτή είναι

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\,(\omega s_m)^2 = \frac{1}{2}(\rho A\Delta x)(\omega s_m)^2. \tag{7.4.11}$$

Ο ρυθμός διάδοσης της ενέργειας (η ισχύς) είναι

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho A\frac{\Delta x}{\Delta t}(\omega s_m)^2 = \frac{1}{2}\rho Av(\omega s_m)^2, \tag{7.4.12}$$

όπου v η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής.

Ορισμός (Ένταση κύματος). Ορίζουμε ως ένταση I του κύματος την ισχύ που μεταφέρεται ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Επομένως

$$I = \frac{\Delta E/\Delta t}{A} = \frac{1}{2}\rho v\,(\omega s_m)^2. \tag{7.4.13}$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$I = \frac{(\Delta P_m)^2}{2\rho v}. \tag{7.4.14}$$

Παράδειγμα 7.4.2. Οι πιο ασθενείς ήχοι που μπορεί να ακούσει το ανθρώπινο αυτί στη συχνότητα $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ έχουν ένταση $I_{\min} = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ και οι πιο δυνατοί που ανέχεται είναι $I_{\max} = 1\,\mathrm{W/m^2}$. Υπολογίστε τα πλάτη πίεσης και μετατόπισης που αντιστοιχούν στα δύο αυτά όρια.
Λύση. Γνωρίζουμε για τον αέρα ότι $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ και $v = 343\,\mathrm{m/sec}$. Έτσι βρίσκουμε για $I = I_{\min}$:

$$\Delta P_m = (2\rho v I_{\min})^{1/2} = \ldots = 2.87 \times 10^{-5}\,\mathrm{N/m^2}.$$

Αυτό είναι ένα εξαιρετικά μικρό κλάσμα της ατμοσφαιρικής πίεσης $P_{\text{atm}} = 10^5\,\mathrm{N/m^2}$. Για την αντίστοιχη μετατόπιση έχουμε

$$s_m = \frac{\Delta P_m}{\rho\omega v} = \ldots = 1.11 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}, \tag{7.4.15}$$

το οποίο είναι ένας αριθμός μικρότερος από τη διάμετρο ενός μορίου.

Για $I = I_{\max}$ βρίσκουμε αντιστοίχως $\Delta P_m = 30\,\mathrm{N/m^2}$ και $s_m = 1.1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}$. □

Ορισμός (Επίπεδο έντασης ήχου). Ορίζουμε το επίπεδο έντασης ήχου με την κλίμακα

$$\beta \equiv 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right), \tag{7.4.16}$$

όπου I είναι η ένταση του ήχου και $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ έχει εκλεγεί ως μία βασική ένταση. Στο αποτέλεσμα δίνουμε το όνομα decibel: dB.

Για παράδειγμα, αν $I = I_{\min} = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε επίπεδο ένταση ήχου $\beta = 0\,\mathrm{dB}$ και για $I = I_{\max} = 1\,\mathrm{W/m^2}$ έχουμε επίπεδο ένταση ήχου $\beta = 120\,\mathrm{dB}$. Η κλίμακα decibel, η οποία είναι λογαριθμική, αποδίδει καλύτερα το αίσθημα που προκαλεί ένας ήχος στο αυτί.

Παράδειγμα 7.4.3. Εάν μία ωτοασπίδα μειώνει το επίπεδο ήχου κατά 20 dB ποιός είναι ο λόγος της τελικής έντασης των κυμάτων I_f προς την αρχική τους ένταση I_i;
Λύση. Για τα αρχικά και τα τελικά κύματα έχουμε αντίστοιχα

$$\beta_i = (10\,\mathrm{dB}) \log\frac{I_i}{I_0}, \qquad \beta_f = (10\,\mathrm{dB}) \log\frac{I_f}{I_0}.$$

Η διαφορά στα επίπεδα ήχου είναι

$$\beta_f - \beta_i = (10\,\mathrm{dB})\left(\log\frac{I_f}{I_0} - \log\frac{I_i}{I_0}\right) = (10\,\mathrm{dB})\,\log\left(\frac{I_f}{I_0}\frac{I_0}{I_i}\right) = (10\,\mathrm{dB})\,\log\frac{I_f}{I_i}.$$

Ώστε

$$\log\frac{I_f}{I_i} = \frac{\beta_f - \beta_i}{10\,\mathrm{dB}} = \frac{-20\,\mathrm{dB}}{10\,\mathrm{dB}} = -2.$$

Τελικά

$$\frac{I_f}{I_i} = 10^{-2} = 0.01. \ \square$$

7.4.5 Στάσιμα κύματα σε αέριες στήλες

(Αναλυτικότερα στα: [1] κεφ. 17.7, [6] κεφ. 18.5)

Αν έχουμε μία στήλη (σωλήνα) αέρα μήκους L με κλειστά άκρα, τότε τα στάσιμα κύματα που μπορούν να δημιουργηθούν εντός αυτού πρέπει να έχουν *δεσμό μετατόπισης* στα κλειστά άκρα, όπως ακριβώς είδαμε και στην περίπτωση στάσιμων κυμάτων σε χορδή με σταθερά άκρα.

Αν όμως τα άκρα της στήλης είναι ανοιχτά τότε αναμένουμε ότι το κύμα θα έχει *δεσμούς της πίεσης* στα ανοικτά άκρα. Αυτό, διότι στην επαφή με την ατμόσφαιρα στα άκρα της στήλης το αέριο εκτονώνεται ώστε η πίεση εξομοιώνεται με της ατμόσφαιρας, δηλαδή η μεταβολή της πίεσης $\Delta P_m = 0$. Γνωρίζουμε ότι το κύμα πίεσης έχει διαφορά φάσης 90^o με το κύμα μετατόπισης. Άρα, το κύμα μετατόπισης έχει αντιδεσμούς (δηλαδή, μέγιστη τιμή) στα ανοικτά άκρα της στήλης. Το μήκος κύματος ενός τέτοιου κύματος βρίσκεται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που είδαμε για την περίπτωση στάσιμων κυμάτων σε χορδή με σταθερά άκρα. Τα επιτρεπτά μήκη κύματος είναι

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.4.17}$$

και οι αντίστοιχες συχνότητες είναι

$$f = \frac{v}{2L}\, n, \tag{7.4.18}$$

όπου v η ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

Οι παραπάνω λέγονται και *ιδιοσυχνότητες* της στήλης και αποτελούν αρμονική σειρά, δηλαδή είναι πολλαπλάσια μίας θεμελιώδους συχνότητας. Όταν προκαλείται κύμα στην στήλη μπορούν να διεγερθούν όλες οι ιδιοσυχνότητες ταυτόχρονα, γενικά όμως όχι με το ίδιο πλάτος.

Παράδειγμα 7.4.4. Έχουμε σωλήνα μήκους $L = 1.23\,\mathrm{m}$. Υπολογίστε τις συχνότητες των τριών πρώτων αρμονικών, εάν τα δύο άκρα του σωλήνα είναι ανοικτά.
Λύση. Η πρώτη αρμονική συχνότητα (η θεμελιώδης) είναι

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{344\,\mathrm{m/sec}}{2 \times 1.23\,\mathrm{m}} = 140\,\mathrm{Hz}.$$

Οι δύο επόμενες αρμονικές είναι

$$f_2 = 2f_1 = 280\,\mathrm{Hz}, \qquad f_3 = 420\,\mathrm{Hz}.$$

7.4.6 Σφαιρικά κύματα

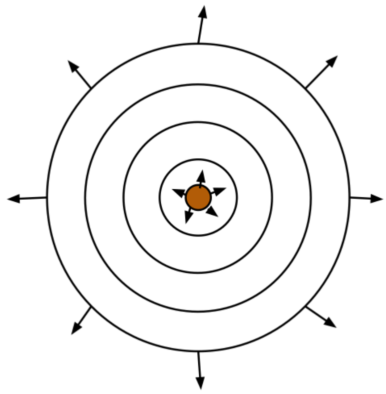
Ας υποθέσουμε ένα μικρό σφαιρικό σώμα το οποίο δρα ως πηγή ηχητικών κυμάτων. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί αν η επιφάνειά του παλλόταν περιοδικά.

Η ισχύς P που παράγει το παλλόμενο σώμα μεταφέρεται μέσω του κύματος. Τα σφαιρικά μέτωπα του κύματος έχουν επιφάνεια $A = 4\pi r^2$ η οποία μεγαλώνει όσο το μέτωπο απομακρύνεται από την πηγή σε απόσταση r. Η ένταση του κύματος είναι (ισχύς ανά επιφάνεια)

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}, \tag{7.4.19}$$

δηλαδή ελλατώνεται αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή. Θα θεωρήσουμε δεδομένη τη συνθήκη ότι η ενέργεια διατηρείται, δηλαδή η P είναι ίδια σε κάθε απόσταση από την πηγή. Για αποστάσεις r_1 και r_2 έχουμε $I_1 = P/(4\pi r_1^2),\ I_2 = P/(4\pi r_2^2)$, οπότε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$



Σχήμα 7.5: Παλλόμενο μικρό σώμα δημιουργεί σφαιρικό κύμα. Τα μέτωπα του κύματος παριστάνονται με κύκλους (είναι σφαίρες στον χώρο). Αυτά αντιστοιχούν στις επιφάνειες που έχουν την ίδια φάση.

Γνωρίζουμε ότι η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους ταλάντωσης $I \sim s_m^2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, με την απομάκρυνση από την πηγή, το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται και μάλιστα πρέπει να είναι $s_m = s_0/r$, όπου s_0 κάποιο αρχικό πλάτος αναφοράς. Ώστε το σφαιρικό κύμα περιγράφεται από σχέση

$$s(r,t) = \frac{s_0}{r}\,\sin(kr - \omega t). \tag{7.4.20}$$

Παράδειγμα 7.4.5. Μία σημειακή πηγή με ισχύ εξόδου $P = 80\,\mathrm{W}$ εκπέμπει ηχητικά κύματα. (α) Υπολογίστε την ένταση σε απόσταση $d = 3\,\mathrm{m}$ από την πηγή. (β) Υπολογίστε την απόσταση όταν το επίπεδο έντασης ήχου έχει μειωθεί στα $\beta = 40\,\mathrm{dB}$.
Λύση. (α) Υποθέτουμε ότι η πηγή εκπέμπει σφαιρικά κύματα. Έχουμε ένταση ήχου

$$I = \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{80\,\mathrm{W}}{4\pi(3\,\mathrm{m})^2} = 0.707\,\mathrm{W/m^2}.$$

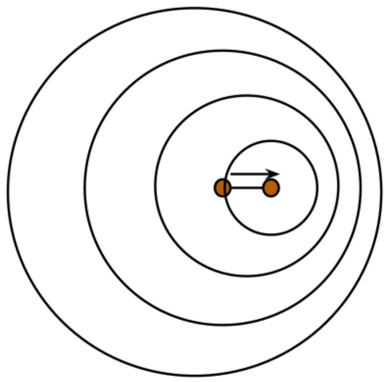
(β) Από τη σχέση ορισμού της κλίμακας decibel βρίσκουμε την ένταση I που αντιστοιχεί σε $40\,\mathrm{dB}$ ($I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$):

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow 40 = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow I = 10^4\,I_0 = 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Η ένταση I επιτυγχάνεται σε απόσταση

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80\,\mathrm{W}}{4\pi \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2}}} = 2.52 \times 10^4\,\mathrm{m}. \square$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η σφαιρική πηγή κινείται με κάποια ταχύτητα v_s. Τότε τα μέτωπα που εκπέμπονται σε διαδοχικούς χρόνους έχουν τα κέντρα τους σε διαδοχικά σημεία τα οποία μετακινούνται προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι ο παρατηρητής που βρίσκεται δεξιά της πηγής παρατηρεί κύμα με μήκος κύματος μικρότερο αυτού του εκπεμπομένου κύματος. Αντίθετα, παρατηρητής που βρίσκεται αριστερά της πηγής παρατηρεί κύμα με μήκος κύματος μεγαλύτερο αυτού του εκπεμπομένου κύματος. Αυτό ονομάζεται *φαινόμενο Doppler*.



Σχήμα 7.6: Το παλλόμενο μικρό σώμα κινείται με ταχύτητα v_s προς τα δεξιά και δημιουργεί διαδοχικά σφαιρικά κύματα τα κέντρα των οποίων μετατοπίζονται διαδοχικά προς τα δεξιά.

Παράρτημα Α′

Γεωμετρία και Άλγεβρα

Α′.1 Διανύσματα

Α′.1.1 Θέση σημειακού σώματος

Για να περιγράψουμε την θέση ενός σημειακού σώματος το οποίο μπορεί να κινείται επάνω σε ένα επίπεδο (π.χ., ένα μυρμήγκι επάνω σε επίπεδο έδαφος) χρειαζόμαστε ένα κατάλληλο σύστημα αναφοράς. Ορίζουμε ένα τυχόν σημείο O ως αρχή του συστήματος αναφοράς. Θεωρούμε δύο ευθείες που περνούν από το O και είναι κάθετες μεταξύ τους (σχήμα). Τις ονομάζουμε άξονες Ox και Oy. Κάθε σημείο του επιπέδου P μπορεί να ορισθεί μέσω ενός διανύσματος $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

Ας προβάλουμε το διάνυσμα σε κάθε έναν από τους άξονες. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε γραμμές παράλληλες προς τους άξονες από το P, και σημειώνουμε τα σημεία A και B των τομών με τους Ox, Oy. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, τα οποία λέμε συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{OP}$. Βλέπουμε ότι

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \tag{Α′.1.1}$$

με την έννοια ότι μπορούμε να μεταφερθούμε από το O στο P με τους εξής δύο τρόπους: (α) είτε απευθείας, είτε (β) αν ξενικήσουμε από το O προς το A και μετά μετακινηθούμε κατά την διεύθυνση του $\vec{OB}$. Με αυτή την έννοια τα διανύσματα που ορίσαμε είναι *διανύσματα μετατόπισης*.

Παρατήρηση Α′.1.1. *Θα ονομάσουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{OP}$.*

Α′.1.2 Πράξεις με διανύσματα

Η γεωμετρική πρόσθεση διανυσμάτων ορίστηκε παραπάνω. Χρησιμοποιώντας συνοπτικότερα σύμβολα γράφουμε (σχήμα)

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}. \tag{Α′.1.2}$$

Μεταθετική ιδιότητα

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \tag{Α′.1.3}$$

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \tag{Α′.1.4}$$

Αντίθετο διανύσματος

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0. \tag{Α′.1.5}$$

Πολλαπλασιαμός $\lambda \in \mathbb{R}$ με διάνυσμα

$$\vec{s} = \lambda\vec{a} \tag{Α′.1.6}$$

είναι διάνυσμα με πολλαπλάσιο μήκος αλλά ίδια διεύθυνση με το $\vec{a}$ (σχήμα).

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό. *Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ με έναν αριθμό λ παίρνουμε ένα νέο διάνυσμα και το συμβολίζουμε $\lambda\vec{a}$. Το μέτρο του είναι ίσο με το μέτρο του $\vec{a}$ επί το λ (την απόλυτη τιμή του) και η κατεύθυνση του είναι αυτή του $\vec{a}$ για $\lambda > 0$ ή αντίθετη του $\vec{a}$ για $\lambda < 0$.*

Θα φανεί χρήσιμο να ορίσουμε στοιχειώδη ευθύγραμμα τμήματα από το O και κατά μήκος των Ox, Oy, τα οποία ονομάζουμε $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ αντίστοιχα. Φροντίζουμε ώστε το μήκος τους να είναι ίσο με μία μονάδα μήκους (π.χ., m). Τότε κάθε σημείο σε απόσταση x από το O επάνω στον Ox δίνεται από το τέλος το διανύσματος $x\hat{\imath}$ και κάθε σημείο σε απόσταση y από το O επάνω στον Oy δίνεται από το τέλος του διανύσματος $y\hat{\jmath}$.

Επιστρέφουμε τώρα στην ανάλυση του διανύσματος $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία A και B απέχουν x και y από την αρχή O στους άξονες Ox, Oy αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\overrightarrow{OA} = x\hat{\imath}, \qquad \overrightarrow{OB} = y\hat{\jmath}.$$

Αφού συμβαίνει το $\overrightarrow{OA}$ να είναι στην ίδια διεύθυνση με το $\hat{\imath}$ και το $\overrightarrow{OB}$ με το $\hat{\jmath}$. Έχουμε λοιπόν

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}. \tag{Α΄.1.7}$$

Παρατήρηση Α΄.1.2. *Ας δούμε το μήκος του διανύσματος $\vec{r}$ το οποίο θα συμβολίσουμε με r. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε*

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{Α΄.1.8}$$

Παράδειγμα Α΄.1.1. Το μέτρο του διανύσματος $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ είναι $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. □

Κάθε διάνυσμα δείχνει προς μία διεύθυνση και αυτή μπορεί να καθορισθεί αν έχουμε έναν δεδομένο (σταθερό) άξονα στον χώρο. Τότε μπορούμε να μετρήσουμε τη γωνία του διανύσματος ως προς τον σταθερό άξονα. (φτιάξτε σχήμα)

Παρατήρηση Α΄.1.3. *Ένα διάνυσμα μπορεί να καθορισθεί αν γνωρίζουμε το μέτρο και την διεύθυνσή του.*

Ας πάρουμε δύο οποιαδήποτε διανύσματα

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} \\ \vec{b} &= b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}. \end{aligned} \tag{Α΄.1.9}$$

Το άθροισμά τους $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των συνιστωσών των $\vec{a}, \vec{b}$ (φτιάξτε σχήμα). Βλέπουμε γεωμετρικά ότι οι συνιστώσες του αθροίσματος έχουν μήκος $a_x + b_x$ στον άξονα Ox και $a_y + b_y$ στον άξονα Oy. Γράφουμε $\vec{r} = r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath}$ όπου

$$\begin{aligned} r_x &= a_x + b_x \\ r_y &= a_y + b_y. \end{aligned} \tag{Α΄.1.10}$$

Παράδειγμα Α΄.1.2. Κάνετε ένα παράδειγμα πρόσθεσης τριών διανυσμάτων, γεωμετρικά και αλγεβρικά. □

Παράδειγμα Α΄.1.3. Βρείτε γεωμετρικά τη διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{b} - \vec{a}$. Γράψτε το μέτρο της.
Λύση. Η διαφορά δύο διανυσμάτων είναι διάνυσμα που αρχίζει από το τέλος του $\vec{a}$ και τελειώνει στο τέλος του $\vec{b}$ (φτιάξτε σχήμα):

$$\vec{b} - \vec{a} = (b_x - a_x)\hat{\imath} + (b_y - a_y)\hat{\jmath}.$$

Το μέτρο της είναι $\sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$. □

$A'.1.3$ Βαθμωτό γινόμενο

Θα ορίσουμε πολλαπλασιασμό μεταξύ δύο διανυσμάτων.

Ορισμός (Εσωτερικό γινόμενο). Το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ορίζεται ως

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\, \cos\phi, \tag{A'.1.11}$$

όπου a, b είναι τα μέτρα των $\vec{a}, \vec{b}$ και ϕ είναι η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

Το βαθμωτό γινόμενο λέγεται και *εσωτερικό γινόμενο* διανυσμάτων.

Παρατήρηση $A'.1.4$. *Αν δύο διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι* $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$. *Αν δύο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ένας αλγεβρικός τρόπος υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}) = a_x b_x + a_y b_y. \tag{A'.1.12}$$

Παράδειγμα $A'.1.4$. Δύο διανύσματα $\vec{C}$ και $\vec{D}$ έχουν μέτρα 3 και 4 αντίστοιχα. Ποια είναι η γωνία μεταξύ τους αν (α) $\vec{C} \cdot \vec{D} = 0$, (β) $\vec{C} \cdot \vec{D} = 12$, (γ) $\vec{C} \cdot \vec{D} = -12$;
Λύση. (α) 90^0, (β) 0^o, (γ) 180^o. □

Τα παραπάνω μπορούν να γενικευθούν για διανύσματα στον χώρο, δηλαδή στις τρεις διαστάσεις (φτιάξτε σχήμα). Θα θεωρήσουμε τρεις κάθετους άξονες Ox, Oy, Oz και αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος τους. Διανύσματα στον χώρο μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες τους στους τρεις άξονες: $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ και $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίνεται από

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{A'.1.13}$$

$A'.1.4$ Εξωτερικό γινόμενο

Ορίζουμε το *εξωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ ως το διάνυσμα

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{A'.1.14}$$

με μέτρο

$$|\vec{c}| = |ab\, \sin\theta| \tag{A'.1.15}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των $\vec{a}, \vec{b}$ (και a, b τα μέτρα τους) και διεύθυνση κάθετη στα $\vec{a}, \vec{b}$ η οποία δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Το εξωτερικό γινόμενο έχει τις ιδιότητες

- Αντιμετάθεση των παραγόντων αλλάζει τη διεύθυνση του αποτελέσματος

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \tag{A'.1.16}$$

- Γινόμενο διανύσματος με τον εαυτό του (ή με παράλληλο διάνυσμα) δίνει αποτέλεσμα μηδέν

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0, \qquad \vec{a} \times (c\vec{a}) = 0. \tag{A'.1.17}$$

- Επιμεριστική ιδιότητα

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \tag{A'.1.18}$$

Παράδειγμα Α′.1.5. Αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab. \ \Box$$

Παράδειγμα Α′.1.6. Για τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων ισχύουν

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \qquad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \qquad \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}. \ \Box$$

Παράδειγμα Α′.1.7. Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ στο επίπεδο xy:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} \\ \vec{b} &= b_x \hat{\imath} + b_y \hat{\jmath}. \end{aligned}$$

Το εξωτερικό τους γινόμενο είναι

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath}) \times (b_x \hat{\imath} + b_y \hat{\jmath}) = a_x b_y \, (\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) + a_y b_x \, (\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) \\ &= (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}. \ \Box \end{aligned}$$

Ισχύει γενικότερα

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}. \tag{Α′.1.19}$$

Βιβλιογραφία

[1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, «Φυσική», Τόμος Α’ (Εκδόσεις Gutenberg).

[2] R.A. Serway, «Φυσική», (Μηχανική, Κύματα, Θερμοδυναμική).

[3] H. Young , R. Freedman «Πανεπιστημιακή φυσική με σύγχρονη φυσική», Εκδόσεις Παπαζήση

[4] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, “Fundamentals of Physics” (Wiley, 9th edition).

[5] R.A. Serway, «Φυσική», «Τόμος I, Μηχανική».

[6] R.A. Serway, «Φυσική», «Τόμος III, Θερμοδυναμική, Κυματική, Οπτική».

[7] Ν. Κυλάφης, «Σημειώσεις Μηχανικής», Ηράκλειο, 2013

[8] Δ. Καραμπουρνιώτης, «Σημειώσεις Φυσικής», Ηράκλειο.