

Φυσική ΙΙ - Σημειώσεις

Σταύρος Κομηνέας

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

0.1	Πρόλογος	ii
1	Ηλεκτρισμός	1
1.1	Ηλεκτρικά πεδία	1
1.2	Ο νόμος του Gauss	8
1.3	Ηλεκτρικό δυναμικό	12
1.4	Χωρητικότητα	19
2	Ρεύμα	27
2.1	Ρεύμα και αντίσταση	27
2.2	Κυκλώματα	33
3	Μαγνητισμός	43
3.1	Μαγνητικά πεδία	43
3.2	Μαγνητικά πεδία από ρεύματα	51
3.3	Σύγχρονες εφαρμογές: Μαγνητικά υλικά	57
3.4	Μαγνητική επαγωγή	61
3.5	Ηλεκτρομαγνητικά κύματα	65
4	Φως και οπτική	69
4.1	Αρχές γεωμετρικής οπτικής	69
4.2	Κυματική συμβολή	72
5	Παράρτημα	77
5.1	Εργασίες	77
5.2	Χρήσιμες σχέσεις	80
5.3	Σταθερές	80

0.1 Πρόλογος

Οι παρούσες σημειώσεις χρησιμοποιήθηκαν στις παραδόσεις του μαθήματος Φυσική II στο Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Κρήτης το εαρινό εξάμηνο 2016.

- Περιέχουν μεγάλο μέρος των παραδόσεων. Είναι ένας οδηγός για το φοιτητή που θέλει να μάθει Ηλεκτρομαγνητισμό από τα εξαιρετικά βιβλία της διεθνούς βιβλιογραφίας.
- Είναι πιθανόν να περιέχονται μικρά τμήματα τα οποία δεν διδάχθηκαν.
- Σε ορισμένες ασκήσεις παρατίθεται μία αναλυτική λύση και σε άλλες συνοπτική.
- Υπάρχουν (εκτός απροόπτου) ορισμένα λάθη και θα ήμουν ευγνώμων σε όποιον μου υπεδείκνυε κάποιο από αυτά.

Σταύρος Κομηνέας
Ηράκλειο, 3 Απριλίου 2016

Κεφάλαιο 1

Ηλεκτρισμός

1.1 Ηλεκτρικά πεδία

1.1.1 Ηλεκτρικό φορτίο

Παρατήρηση 1.1.1. Υπάρχουν δύο ειδών φορτία: θετικά και αρνητικά. Τα ομόσημα φορτία απωθούνται ενώ τα ετερόσημα φορτία έλκονται.

1.1.2 Νόμος του Coulomb

Ας υποθέσουμε δύο φορτία q_1, q_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους. Βρίσκουμε πειραματικά τη δύναμη που ασκεί το ένα φορτίο στο άλλο, η οποία δίνεται από τον λεγόμενο νόμο του Coulomb:

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \quad (1.1.1)$$

Βλέπουμε ότι η δύναμη είναι

- ανάλογη της τιμής των φορτίων
- αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης μεταξύ τους (σημείωση: το ίδιο συμβαίνει και με τη βαρυτική δύναμη).
- Για να πάρουμε την τιμή της δύναμης (όπως μετράται στο πείραμα) πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με σταθερό παράγοντα k_e . Αν θέλουμε τη δύναμη σε Newton τότε $k_e = 8.987 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{Cb}^2$.

Συνήθως γράφουμε $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ όπου $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ Cb}^2/\text{N m}^2$.

Το διάνυσμα της δύναμης που ασκεί το φορτίο 1 στο φορτίο 2 είναι

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_{12} \quad (1.1.2)$$

όπου \vec{r}_{12} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία που περνάει από το 1 στο 2.

Παρατήρηση 1.1.2. Η διεύθυνση της δύναμης είναι επάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία (κεντρική δύναμη).

Οι δύο δυνάμεις που ασκεί το ένα φορτίο στο άλλο είναι αντίθετες σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.1.3)$$

Παράδειγμα 1.1.1. Το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο στο άτομο του υδρογόνου απέχουν μεταξύ τους περίπου $d = 5.3 \times 10^{-11}$ m. Βρείτε τις τιμές της ηλεκτρικής και της βαρυτικής δύναμης μεταξύ των δύο σωματιδίων.

Λύση. Ο νόμος Coulomb δίνει ηλεκτρική δύναμη

$$F_e = k_e \frac{|e| |-e|}{d^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N.}$$

Φορτίο ηλεκτρονίου $e = -1.60 \times 10^{-19}$ Cb και $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8.987 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{Cb}^2$.

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης δίνει βαρυτική δύναμη

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{d^2} = 3.6 \times 10^{-47} \text{ N.}$$

Είναι $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $m_p = 1836 m_e$ και $G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

□

Παράδειγμα 1.1.2. Θεωρήστε τρία σημειακά φορτία που βρίσκονται στις κορυφές ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου. Τα φορτία είναι $q_1 = q_3 = 5.00 \mu\text{Cb}$ και $q_2 = -2.00 \mu\text{Cb}$ (βρίσκεται στην κορυφή στην ορθή γωνία) και οι ίσες πλευρές του τριγώνου έχουν μήκος $a = 0.100$ m. Βρείτε την συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο q_3 .

Λύση.

$$\vec{F}_3 = (-1.04 \vec{i} + 7.94 \vec{j}) \text{ N.}$$

□

1.1.3 Το ηλεκτρικό πεδίο

Είναι ίσο με τη δύναμη που ασκείται στη μονάδα του φορτίου. Άρα, αν έχουμε ένα φορτίο q_0 , τότε το πεδίο βρίσκεται από την

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}. \quad (1.1.4)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα διάνυσμα $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ το οποίο ορίζεται σε κάθε σημείο του χώρου \vec{r} . Την έννοια του πεδίου εισήγαγε ο Michael Faraday τον 19ο αιώνα.

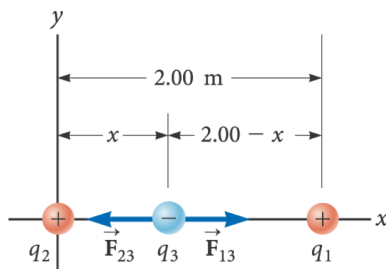
Το πεδίο που δημιουργεί ένα φορτίο q είναι

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (1.1.5)$$

Τα πεδία που δημιουργούνται από πολλά φορτία q_i προστίθενται διανυσματικά για να δώσουν το πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (1.1.6)$$

Παράδειγμα 1.1.3. Βρείτε σε ποιο σημείο είναι μηδέν η συνισταμένη δύναμη στο φορτίο q_3 . Τα q_1, q_2 βρίσκονται σε σταθερή θέση.



□

Παράδειγμα 1.1.4. (Ηλεκτρικό δίπολο) Δύο φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον άξονα x στις θέσεις $(-a, 0)$ $(a, 0)$. Βρείτε τις συνιστώσες του ολικού ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο $(0, y)$ επάνω στον άξονα y .

Λύση. Ας δούμε πρώτα την περίπτωση ίσων φορτίων $q_1 = q_2 = q$. Είναι

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Για μεγάλες αποστάσεις από τα φορτία, $y \gg a$, έχουμε $E_y \approx 2q/y^2$, όπως περιμένουμε από τον νόμο Coulomb για φορτίο $2q$.

Επίσης θα δούμε την ειδική περίπτωση που τα φορτία είναι ίσα αλλά με αντίθετο πρόσημο $q_1 = -q_2 = q$. Βρίσκουμε

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}, \quad E_y = 0.$$

Για μεγάλες αποστάσεις από τα φορτία, $|y| \gg a$, είναι

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{|y|^3}.$$

□

Παρατήρηση 1.1.3. Το σύστημα των δύο αντίθετων φορτίων το ονομάζουμε ηλεκτρικό δίπολο. Ονομάζουμε το γινόμενο $p = 2aq$ ηλεκτρική διπολική ροπή του διπόλου. Είναι το γινόμενο του φορτίου q επί την απόσταση μεταξύ τους $(2a)$. Μάλιστα η διπολική ροπή ορίζεται ως διάνυσμα \vec{p} με διεύθυνση την ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία και κατεύθυνση από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο. Το πεδίο του διπόλου, σε σημείο του άξονα του κάθετου στο $\vec{p} = p\vec{i}$, είναι

$$\vec{E}(x = 0, y) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{|y|^3} \vec{i}.$$

1.1.4 Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου

Θεωρούμε ότι μία κατανομή φορτίου είναι ένα συσσωμάτωμα μικρών φορτίων Δq . Κάθε ένα από αυτά δημιουργεί πεδίο

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r_q^2} \hat{r}_q.$$

Εδώ το r_q δηλώνει την απόσταση του στοιχειώδους φορτίου Δq από την θέση στην οποία υπολογίζεται το πεδίο \vec{E} και \hat{r}_q είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του \vec{r}_q . Αθροίζουμε το πεδίο από κάθε φορτίο Δq και έχουμε πεδίο της κατανομής

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i,$$

όπου τώρα το r_i αντικατέστησε τον συμβολισμό r_q . Για κάθε Δq_i έχουμε διαφορετικά r_i και \hat{r}_i . Θεωρούμε απειροστό $\Delta q \rightarrow dq$ και έχουμε

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (1.1.7)$$

Για τον υπολογισμό του dq χρειαζόμαστε συνήθως την πυκνότητα φορτίου. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Η χωρική πυκνότητα φορτίου είναι (V : όγκος)

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV$$

και για την περίπτωση ομοιόμορφης κατανομής φορτίου: $\rho = Q/V$.

- Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι (A : επιφάνεια)

$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$

και για την περίπτωση ομοιόμορφης κατανομής φορτίου: $\sigma = Q/A$.

- Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι

$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$

και για την περίπτωση ομοιόμορφης κατανομής φορτίου: $\lambda = Q/\ell$, όπου ℓ το μήκος της κατανομής.

Παράδειγμα 1.1.5. Για χωρική κατανομή φορτίου πυκνότητας $\rho(\vec{r})$ σε όγκο V η έκφραση (1.1.7) μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV'. \quad (1.1.8)$$

□

Παράδειγμα 1.1.6. Δακτύλιος ακτίνας R φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ο δακτύλιος σε ένα σημείο Σ το οποίο βρίσκεται στον άξονα z που είναι κάθετος στο επίπεδο του δακτυλίου και περνάει από το κέντρο του.

Λύση. Είναι $E_x = 0, E_y = 0$ και $E_z = E$ με

$$E = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} \lambda ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Για μεγάλες αποστάσεις $z \gg R$ είναι

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}.$$

□

Παράδειγμα 1.1.7. Μία ράβδος μήκους ℓ είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με θετικό φορτίο. Η γραμμική πυκνότητα είναι λ και το ολικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο Σ του άξονα της ράβδου, σε απόσταση a από το ένα άκρο της.

Λύση.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{\ell+a} \lambda \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a(\ell+a)}.$$

□

1.1.5 Κίνηση φορτισμένου σωματίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Ο νόμος του Νεύτωνα μας δίνει

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}. \quad (1.1.9)$$

Παράδειγμα 1.1.8. ([2] σελ 41) (Εκτύπωση ψεκασμού μελάνης) Τα σταγονίδια μελάνης είναι φορτισμένα και κατευθύνονται μέσω ηλεκτρικού πεδίου στη θέση εκτύπωσης. \square

1.1.6 Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου

Σχεδιάζουμε γραμμές οι οποίες εφάπτονται στο ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} σε κάθε σημείο του χώρου. Στη γραμμή προσάπτουμε ένα βέλος με διεύθυνση ίδια με εκείνη του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτές ονομάζονται γραμμές ηλεκτρικού πεδίου

Παρατήρηση 1.1.4. Η διεύθυνση του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου εφάπτεται στη γραμμή του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο της.

Παρατήρηση 1.1.5. Το πλήθος των γραμμών που διέρχονται από μοναδιαία επιφάνεια κάθετη σε αυτές είναι ανάλογο της τιμής του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτή την περιοχή.

Αυτό συμφωνεί με τον νόμο του Coulomb. (Εξηγήστε.)

1.1.7 Ασκήσεις

Φροντιστηρίου

Άσκηση 1.1.1. Έστω δίσκος ακτίνας R ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο του κάθετου άξονα z που διέρχεται από το κέντρο του.

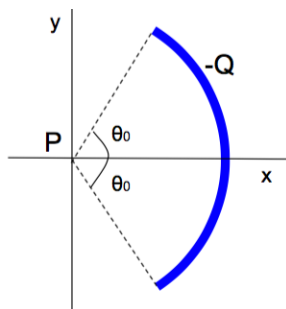
Άσκηση 1.1.2. Δύο φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον άξονα x στις θέσεις $(-a, 0)$ $(a, 0)$. Βρείτε τις συνιστώσες του ολικού ηλεκτρικού πεδίου σε τυχόν σημείο (x, y) του επιπέδου.

Σειράς ασκήσεων

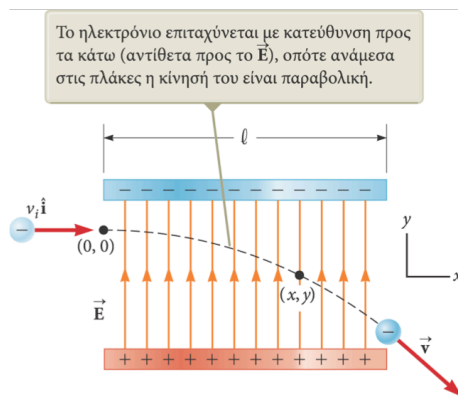
Άσκηση 1.1.3. Δύο αντίθετα φορτία $q_1 = -q, q_2 = q$ βρίσκονται στον άξονα x στις θέσεις $(-d/2, 0)$ $(d/2, 0)$ αντίστοιχα. (α) Βρείτε τις συνιστώσες του ολικού ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο $(x, 0)$ επάνω στον άξονα x , για $x > d/2$. (β) Βρείτε την προσέγγιση του πεδίου για μεγάλες αποστάσεις $x \gg d$ από το δίπολο.

Άσκηση 1.1.4. Μία ράβδος μήκους ℓ είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με θετικό φορτίο. Η γραμμική πυκνότητα είναι λ και το ολικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο (x, y) του επιπέδου.

Άσκηση 1.1.5. Μία ράβδος έχει ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο $-Q$. Η ράβδος έχει καμφθεί ώστε να σχηματίζει κυκλικό τόξο $2\theta_0 = 2\pi/3$ με ακτίνας καμπυλότητας R . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο καμπυλότητας P της ράβδου.



Άσκηση 1.1.6. Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $E = 200 \text{ N/C}$ (έστω προς τη διεύθυνση y) με ταχύτητα $v_i = 2.00 \times 10^6 \text{ m/sec}$ κάθετη στις γραμμές του πεδίου. (έστω προς τη διεύθυνση x) Το πεδίο δημιουργείται από επίπεδες πλάκες (παράλληλες η μία στην άλλη) οι οποίες έχουν μήκος $\ell = 0.100 \text{ m}$ κατά τη διεύθυνση x . (α) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου ενόσω βρίσκεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. (β) Βρείτε πόσο χρόνο κινείται το ηλεκτρόνιο μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. (γ) Ποιά η θέση του ηλεκτρονίου όταν εξέρχεται από το πεδίο;



Συμπληρωματικές

Άσκηση 1.1.7. Να βρεθεί η επιτάχυνση δύο ηλεκτρονίων όταν βρίσκονται σε απόσταση $d = 0.001 \text{ m}$ μεταξύ τους (μάζα ηλεκτρονίου $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, φορτίο $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$).

Άσκηση 1.1.8. Δύο μικρές πανομοιότυπες φορτισμένες σφαίρες, κάθε μία με μάζα $m = 3.00 \times 10^{-2} \text{ kg}$ είναι αναρτημένες σε νήματα μήκους $L = 0.150 \text{ m}$. Οι σφαίρες ισορροπούν όταν η γωνία απόκλισης του κάθε νήματος από την κατακόρυφο είναι $\theta = 5.00^\circ$. Βρείτε το φορτίο κάθε σφαίρας.

Άσκηση 1.1.9. Μία ευθεία γραμμή φορτίων κείται κατά μήκος του άξονα x και εκτείνεται από το σημείο $x = d$ μέχρι το θετικό άπειρο. Η γραμμή έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ . Ποιό είναι το μέτρο και ποιά η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων;

Άσκηση 1.1.10. Μία ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος μήκους L με ολικό φορτίο Q κείται κατά μήκος του άξονα x . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο P το οποίο βρίσκεται σε απόσταση d πάνω από το μέσον της ράβδου.

Άσκηση 1.1.11. Έστω ένας δακτύλιος ακτίνας R ομοιόμορφα φορτισμένος με συνολικό φορτίο Q . Βρείτε τη θέση επάνω στον άξονα του δακτυλίου όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι μέγιστο (κατά μέτρο). Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε αυτή τη θέση.

Άσκηση 1.1.12. Ένα μικρό κομμάτι φελιζόλ μάζας $m = 10 \text{ gr}$ έχει φορτίο $Q = -0.7 \mu\text{C}$ και αιωρείται πάνω από το κέντρο ενός οριζόντιου επιπέδου πλαστικού φύλλου πολύ μεγάλων διαστάσεων το οποίο έχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου. Ποιό είναι το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας στο πλαστικό φύλλο;

1.2 Ο νόμος του Gauss

1.2.1 Ηλεκτρική ροή

Ας θεωρήσουμε επίπεδη επιφάνεια A την οποία διαπερνούν κάθετα γραμμές ηλεκτρικού πεδίου. Αφού η πυκνότητα των γραμμών είναι ανάλογη της έντασης E , το πλήθος τους N είναι ανάλογο της έντασης ηλεκτρικού πεδίου επί την επιφάνεια: δηλαδή $N = EA$. Ονομάζουμε **ηλεκτρική ροή** την

$$\Phi_E = EA \quad (1.2.1)$$

και έχει μονάδες $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Αν το πεδίο \vec{E} δεν είναι κάθετο στην επιφάνεια τότε ορίζουμε

$$\Phi_E = E_{\perp} A = EA \cos \theta, \quad (1.2.2)$$

όπου θ η γωνία του \vec{E} με το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια \vec{A} . Παρατηρούμε ότι $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$ και για μία γενική (μη-επίπεδη) επιφάνεια A η ηλεκτρική ροή είναι

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (1.2.3)$$

Παράδειγμα 1.2.1. Θεωρούμε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} προς την κατεύθυνση του άξονα x . Θεωρούμε επίσης στον χώρο έναν κύβο ακμής ℓ με προσανατολισμό τέτοιο ώστε μία έδρα του βρίσκεται στο επίπεδο xy . Βρείτε την συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του κύβου.

Λύση. Οι έξι έδρες του κύβου συναποτελούν μία κλειστή επιφάνεια. Θα αθροίσουμε την ροή που διέρχεται από τις οκτώ έδρες του κύβου:

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum_1^6 \vec{E} \cdot \vec{A}_i = -E\ell^2 + E\ell^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0. \quad (1.2.4)$$

□

1.2.2 Ο νόμος του Gauss

Ας θεωρήσουμε σημειακό φορτίο q στο κέντρο σφαίρας ακτίνας r . Η ροή είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA. \quad (1.2.5)$$

Από νόμο Coulomb είναι

$$\Phi_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.2.6)$$

Από το παραπάνω εξάγουμε τον ακόλουθο νόμο του Gauss. Για μία κλειστή επιφάνεια η οποία περικλείει συνολικό φορτίο q_{in} ισχύει

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}. \quad (1.2.7)$$

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω πέντε φορτία $q_1 = q_4 = 3.1 \text{ nC}$, $q_2 = q_5 = -5.9 \text{ nC}$, $q_3 = -3.1 \text{ nC}$. Βρείτε τη ροή σε επιφάνεια που περικλείει τα q_1, q_2, q_3 .

Λύση.

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0} = -670 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

□

Παρατήρηση 1.2.1. Για μία κλειστή επιφάνεια η οποία περικλείει συνολικό φορτίο ίσο με μηδέν ισχύει

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0.$$

1.2.3 Εφαρμογή του νόμου του Gauss σε κατανομές φορτίων

Η εφαρμογή του νόμου Gauss μπορεί να είναι απλή στις περιπτώσεις που

- Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερή, είτε το πεδίο υπακούει σε κάποια συμμετρία.
- Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ μπορεί να εκφραστεί σε απλή μορφή (π.χ., επειδή τα \vec{E} και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα είτε κάθετα μεταξύ τους).

Παράδειγμα 1.2.3. Μία μονωτική συμπαγής σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ και φέρει συνολικό φορτίο Q . (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} σε σημείο εκτός της σφαίρας. (β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} σε σημείο εντός της σφαίρας. (γ) Σχεδιάστε το $E = E(r)$.

Λύση. (α) Θεωρούμε μία σφαιρική επιφάνεια Gauss με κέντρο το κέντρο της συμπαγούς σφαίρας και τυχούσα ακτίνα $r \geq a$. Εφαρμόζουμε τον νόμο Gauss σε αυτή την επιφάνεια:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \geq a. \quad (1.2.8)$$

(β) Θεωρούμε σφαιρική επιφάνεια Gauss με ακτίνα $r \leq a$:

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r, \quad r \leq a. \quad (1.2.9)$$

Η πυκνότητα φορτίου είναι $\rho = Q/(4/3)\pi R^3$, άρα το πεδίο γράφεται και ως

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, \quad r \leq a. \quad (1.2.10)$$

□

Παρατήρηση 1.2.2. Ονομάζουμε επιφάνεια Gauss την κλειστή επιφάνεια που επιλέγουμε για να εφαρμόσουμε τον νόμο Gauss.

Παράδειγμα 1.2.4. Έστω ένα άπειρο μη αγώγιμο φύλλο το οποίο είναι ομοιόμορφα φορτισμένο με επιφανειακή πυκνότητα σ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί. [Υπόδειξη: εφαρμόστε τον νόμο Gauss.]

Λύση. Εφαρμόσουμε τον νόμο Gauss για μία κυλινδρική επιφάνεια με εμβαδό βάσεων A :

$$\Phi_E = 2AE = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

□

1.2.4 Αγωγοί σε ηλεκτροστατικά πεδία

Μέσα στους αγωγούς τα φορτία (ηλεκτρόνια) είναι ελεύθερα να κινούνται.

Παρατήρηση 1.2.3. Όταν δεν υπάρχει κίνηση φορτίου μέσα σε έναν αγωγό τότε λέμε ότι βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

Ένας αγωγός που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία έχει τις παρακάτω ιδιότητες

- Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν σε κάθε εσωτερικό σημείο.
- Το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού.
- Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του αγωγού, στην εξωτερική πλευρά, είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει μέτρο $E = \sigma/\epsilon_0$, όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

Παράδειγμα 1.2.5. Μία συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας a φέρει θετικό συνολικό φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο. Ένα αγωγίμο σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c είναι ομόκεντρο με την σφαίρα και φέρει συνολικό φορτίο $-2Q$. (α) Βρείτε, με τον νόμο του Gauss, το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο καθώς και (β) την κατανομή φορτίου στο κέλυφος, όταν το σύστημα είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία. (γ) Σχεδιάστε το $E = E(r)$.

Λύση.

$$E_1 = k_e \frac{Q}{a^3} r, \quad r \leq a.$$

$$E_2 = k_e \frac{Q}{r^2}, \quad a \geq r > b.$$

$$E_3 = 0, \quad b < r < c.$$

$$E_4 = -k_e \frac{Q}{r^2}, \quad r > c.$$

□

Παράδειγμα 1.2.6. Έστω έναν αγωγό με άπειρη επίπεδη επιφάνεια η οποία είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με επιφανειακή πυκνότητα σ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται.

Λύση. Θεωρούμε μία κυλινδρική επιφάνεια Gauss η οποία έχει βάση dA και ύψος ℓ . Ο κύλινδρος τέμνει την επιφάνεια του αγωγού με τον άξονά του κάθετο στην επιφάνεια. Γνωρίζουμε ότι (α) το πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός είναι κάθετο στην επιφάνειά του (β) εντός του αγωγού το πεδίο είναι μηδέν.

Αν θεωρήσουμε το ύψος του κυλίνδρου πολύ μικρό, τότε η ροή που διέρχεται από τον κύλινδρο είναι ίση με $\Phi_E = E dA$, όπου E είναι το πεδίο κάθετο στον αγωγό ακριβώς έξω από την επιφάνεια. Σε στοιχείο επιφάνειας του αγωγού dA υπάρχει φορτίο σdA . Άρα ο νόμος Gauss δίνει

$$E dA = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Σημείωση: Για την περίπτωση άπειρου αγωγού το πεδίο είναι ομογενές σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου, άρα δεν είναι αναγκαίο να κάνουμε την υπόθεση ότι το ύψος της κυλινδρικής επιφάνειας είναι μικρό. Όμως η παραπάνω συλλογιστική ισχύει και για καμπύλη επιφάνεια (όπου το αποτέλεσμα ισχύει μόνο κοντά στην επιφάνεια του αγωγού).

□

1.2.5 Ασκήσεις

Φροντιστηρίου

Άσκηση 1.2.1.

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 1.2.2. Ένας συμπαγής άπειρος κύλινδρος ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ . (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} σε σημείο εκτός του κυλίνδρου. (β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} σε σημείο εντός του κυλίνδρου. (γ) Σχεδιάστε το $E = E(r)$. [Υπόδειξη: εφαρμόστε τον νόμο Gauss.]

Άσκηση 1.2.3. Έστω δύο άπειρα μη αγώγιμα φύλλα τα οποία είναι ομοιόμορφα φορτισμένα με αντίθετες επιφανειακές πυκνότητες σ και $-\sigma$. Αν τα φύλλα είναι τοποθετημένα παράλληλα σε απόσταση d , βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται. [Υπόδειξη: εφαρμόστε τον νόμο Gauss.]

Άσκηση 1.2.4. Ένα μακρύ ευθύγραμμο σύρμα περιβάλλεται από έναν ομοαξονικό κοίλο μεταλλικό (αγώγιμο) κύλινδρο. Το συμπαγές σύρμα φέρει φορτίο με γραμμική πυκνότητα λ και ο κοίλος κύλινδρος έχει φορτίο με γραμμική πυκνότητα 2λ . Βρείτε (α) τη γραμμική πυκνότητα φορτίου στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια του κοίλου κυλίνδρου και (β) το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του κυλίνδρου σε απόσταση r από τον άξονά του. [Υπόδειξη: εφαρμόστε τον νόμο Gauss.]

Συμπληρωματικές

Άσκηση 1.2.5. Μία ομοιόμορφα φορτισμένη αγώγιμη σφαίρα, διαμέτρου $d = 1.2\text{ m}$ έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = 8.1\ \mu\text{C}/\text{m}^2$. (α) Βρείτε το συνολικό φορτίο πάνω στη σφαίρα. (β) Πόση είναι η συνολική ηλεκτρική ροή που εξέρχεται από την επιφάνεια της σφαίρας;

1.3 Ηλεκτρικό δυναμικό

1.3.1 Εισαγωγή

Έστω φορτίο q μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} . Το έργο που παράγει η δύναμη \vec{F}_e στο φορτίο q όταν αυτό μετατοπίζεται κατά απειροστό διάστημα $d\vec{s}$ είναι

$$dW = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Επειδή η δύναμη Coulomb είναι συντηρητική μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας U . Για μετατόπιση του φορτίου από σημείο A σε σημείο B η διαφορά δυναμικής ενέργειας είναι

$$U(B) - U(A) = \Delta U = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.3.1)$$

Για να ορίσουμε την συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι μπορούμε να επιλέξουμε το σημείο στο οποίο αυτή μηδενίζεται. Όστε, θεωρούμε ως σημείο αναφοράς A το άπειρο και ορίζουμε τη δυναμική ενέργεια

$$U(B) = -q \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Τελικά, μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου r :

$$U(r) = q \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.3.2)$$

Ορίζουμε το **ηλεκτρικό δυναμικό** ως το έργο ανά μονάδα φορτίου

$$V = \frac{U}{q} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.3.3)$$

Για τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B έχουμε

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.3.4)$$

Η μονάδα του δυναμικού στο σύστημα SI είναι

$$1 \text{ Volt} \equiv 1 \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}.$$

Από την εξίσωση ορισμού του δυναμικού (1.3.3) παρατηρούμε ότι η μονάδα ηλεκτρικού πεδίου (την οποία ορίσαμε ως N/C) μπορεί να ορισθεί και ως V/m , δηλαδή

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}.$$

Σημείωση. Συχνά μελετάμε κίνηση ηλεκτρονίων σε ηλεκτρικά πεδία (π.χ., στην ατομική φυσική). Αν ένα ηλεκτρόνιο (με φορτίο $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$) κινηθεί μεταξύ δύο σημείων με διαφορά δυναμικού $\Delta V = 1 \text{ V}$ τότε μεταφέρεται ενέργεια $\Delta U = e\Delta V = (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J/C}) = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$. Ονομάζουμε αυτήν την ποσότητα ενέργειας 1 eV (ηλεκτρονιοβόλτ).

1.3.2 Διαφορά δυναμικού σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Έστω ομογενές πεδίο \vec{E} , δηλαδή, το διάνυσμα \vec{E} είναι σταθερό σε κάθε σημείο του χώρου. Αν η μετατόπιση του φορτίου q είναι παράλληλη στο πεδίο \vec{E} τότε αυτό κινείται σε διαφορά δυναμικού

$$V(B) - V(A) = \Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \int_A^B ds = -Ed, \quad (1.3.5)$$

όπου d η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων.

Γενικότερα, για σταθερό \vec{E} ,

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s}, \quad \vec{s} = \vec{r}_B - \vec{r}_A. \quad (1.3.6)$$

Η διαφορά δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta U = -q\vec{E} \cdot \vec{s}. \quad (1.3.7)$$

Παράδειγμα 1.3.1. Οι δύο πόλοι μίας μπαταρίας είναι συνδεδεμένοι σε δύο παράλληλες πλάκες και η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους είναι $\Delta V = 12 \text{ V}$. Η απόσταση μεταξύ των πλακών είναι $d = 0.30 \text{ cm}$. Ποιό το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών, αν υποθέσουμε ότι αυτό είναι ομογενές;

Λύση.

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{12 \text{ V}}{3 \times 10^{-3} \text{ m}} = 4 \times 10^{-3} \text{ V/m}.$$

□

1.3.3 Ηλεκτρικό δυναμικό και ενέργεια σημειακού φορτίου

Θεωρούμε το πεδίο που δημιουργεί ένα φορτίο q και θα υπολογίσουμε το έργο που αυτό παράγει για μετακίνηση από το άπειρο. Το πεδίο Coulomb ενός φορτίου είναι κεντρικό, δηλαδή, είναι της μορφής $\vec{E} = E(r)\hat{r}$.

Ας θεωρήσουμε ότι μετακινούμαστε ακτινικά από το άπειρο έως απόσταση r από το φορτίο. Από τον νόμο Coulomb είναι $\vec{E} \cdot d\vec{r} = E dr$ και το δυναμικό είναι

$$V(\infty) - V(r) = - \int_r^\infty E dr \Rightarrow V(r) = \int_r^\infty E dr,$$

όπου θεωρήσαμε $V(\infty) = 0$, δηλαδή, ορίζουμε ως σημείο αναφοράς για το δυναμικό το $r = \infty$. Από τον νόμο Coulomb υπολογίζουμε

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.3.8)$$

Σημείωση. Ένα θετικά φορτισμένο σωματίο παράγει θετικό δυναμικό και ένα αρνητικά φορτισμένο σωματίο παράγει αρνητικό δυναμικό.

Ας μελετήσουμε γενικότερα το έργο που παράγει η κεντρική δύναμη Coulomb κατά τη μετατόπιση υλικού σημείου από θέση \vec{r}_i σε \vec{r}_f :

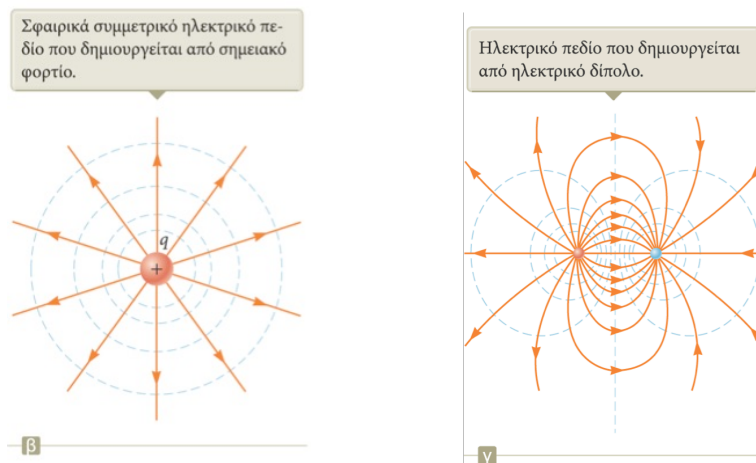
$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} E(r) \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} E(r) dr, \quad (1.3.9)$$

όπου $dr = \hat{r} \cdot d\vec{r}$ είναι η ακτινική μετατόπιση, δηλαδή, η προβολή της μετατόπισης $d\vec{r}$ στην ακτινική διεύθυνση. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής από τη θέση \vec{r}_i στην \vec{r}_f (είναι ένα μονοδιάστατο ολοκλήρωμα που εξαρτάται μόνο από τα r_i, r_f).

Παρατήρηση 1.3.1. Όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης είναι κεντρικές.

Παρατήρηση 1.3.2. Όλες οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές και άρα μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας.

Παρατήρηση 1.3.3. Οι επιφάνειες στις οποίες το δυναμικό έχει συγκεκριμένη τιμή λέγονται ισοδυναμικές. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες για την (1.3.8) είναι σφαιρικές.



Σχήμα 1.1: (Αριστερά) Ισοδυναμικές γραμμές και γραμμές ηλεκτρικού πεδίου σημειακού φορτίου. (Δεξιά) Ισοδυναμικές γραμμές και γραμμές ηλεκτρικού πεδίου διπόλου. Παρατηρήστε ότι οι γραμμές του πεδίου είναι κάθετες στις ισοδυναμικές. Πηγή [1].

1.3.4 Ηλεκτρικό δυναμικό συστήματος φορτίων

Αν έχουμε n φορτία q_i αυτά δημιουργούν ένα συνολικό δυναμικό

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}, \quad (1.3.10)$$

όπου r_i είναι η απόσταση του φορτίου i από το σημείο \vec{r} όπου υπολογίζουμε το δυναμικό.

Παρατήρηση 1.3.4. Για να βρούμε το δυναμικό n φορτίων αρκεί να υπολογίσουμε ένα αλγεβρικό άθροισμα, ενώ για τον υπολογισμό του πεδίου θα απαιτούνταν υπολογισμός διανυσματικού αθροίσματος.

Παράδειγμα 1.3.2. Έστω δύο ηλεκτρόνια σε απόσταση R από σημείο C (τα ηλεκτρόνια δεν βρίσκονται στην ίδια θέση). Πόση είναι το δυναμικό στο C και πόσο το ηλεκτρικό πεδίο;

Λύση. Το δυναμικό εξαρτάται μόνο από την απόσταση του κάθε ηλεκτρονίου από το C . Αφού οι αποστάσεις είναι ίσες, έχουμε το δυναμικό

$$V(C) = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R},$$

όπου θεωρήσαμε φορτίο ηλεκτρονίου $-e$.

Αν τα δύο ηλεκτρόνια βρίσκονται αντιδιαμετρικά του C τότε το πεδίο είναι $\vec{E}(C) = 0$. Αν βρίσκονται σε άλλες θέσεις τότε, γενικά, $\vec{E}(C) \neq 0$.

□

1.3.5 Υπολογισμός του πεδίου από το δυναμικό

Ισχύει

$$\vec{E} = -\nabla V,$$

αναλυτικότερα

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1.3.11)$$

Παρατήρηση 1.3.5. Οι ισοδυναμικές είναι κάθετες σε κάθε σημείο των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου.

Σύντομο πρόβλημα 1.3.1. Δείξτε ότι το δυναμικό (1.3.8) δίνει το πεδίο Coulmb σημειακού φορτίου (1.1.5). [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την έκφραση του ∇ σε σφαιρικές συντεταγμένες.]

1.3.6 Δυναμικό συνεχούς κατανομής φορτίου

Θεωρούμε κατανομή φορτίου $q(\vec{r}')$ σε περιοχή v . Το δυναμικό το οποίο δημιουργεί η κατανομή φορτίου δίνεται από

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.3.12)$$

Για την περίπτωση χωρικής πυκνότητας φορτίου $\rho(\vec{r}')$, είναι $dq = \rho dv'$ (όπου dv' στοιχειώδης όγκος ο οποίος περιέχει φορτίο dq), ώστε

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.3.13)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται επάνω στον όγκο ο οποίος περιέχει την κατανομή φορτίου.

Παράδειγμα 1.3.3. Έστω λεπτή μη αγώγιμη ράβδος μήκους L ομοιόμορφα φορτισμένα με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ . Βρείτε το δυναμικό που δημιουργεί σε ένα σημείο A το οποίο βρίσκεται σε απόσταση d κάθετα στο αριστερό άκρο της ράβδου.

Λύση. Ας θεωρήσουμε ότι η ράβδος κείται στον άξονα x από $0 \leq x \leq L$. Το δυναμικό που δημιουργεί στο A βρίσκεται ως εξής

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(x + (x^2 + d^2)^{1/2} \right) \right]_0^L.$$

Τελικά βρίσκουμε

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{L + (L^2 + d^2)^{1/2}}{d} \right].$$

□

Παράδειγμα 1.3.4. Έστω ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας R με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Βρείτε το δυναμικό $V(z)$ που δημιουργεί σε ένα σημείο A το οποίο βρίσκεται επάνω στον άξονα z του δίσκου.

Λύση. Κάθε στοιχειώδης δακτύλιος ακτίνας r' και ακτίνας dr' δημιουργεί δυναμικό

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi r' dr')}{\sqrt{z^2 + r'^2}}.$$

Το δυναμικό υπολογίζεται τελικά ως το ολοκλήρωμα

$$V(z) = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{z^2 + r'^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right).$$

□

Σύντομο πρόβλημα 1.3.2. Βρείτε το δυναμικό του ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου του παραπάνω παραδείγματος για (α) $z/R \ll 1$ και κάνετε σύνδεση του αποτελέσματος με το πεδίο (και δυναμικό) ομοιόμορφα φορτισμένου άπειρου φύλλου (β) $R/z \ll 1$ και κάνετε σύνδεση του αποτελέσματος με το δυναμικό σημειακού φορτίου.

1.3.7 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια συστήματος φορτίων

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σημειακών φορτίων είναι ίση με το έργο που πρέπει να παραχθεί, από έναν εξωτερικό παράγοντα, ώστε να σχηματισθεί το σύστημα, μεταφέροντας κάθε φορτίο από άπειρη απόσταση στη θέση του.

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα δύο φορτίων. Μπορούμε να μεταφέρουμε το πρώτο φορτίο q_1 στη θέση του χωρίς να παραγάγουμε έργο, αφού αρχικά δεν υπάρχει πεδίο ή δυνάμεις στον χώρο. Το δεύτερο φορτίο q_2 θα μεταφερθεί σε απόσταση r από το πρώτο σε θέση δυναμικού

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}.$$

Επομένως η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια τους ζεύγους θα είναι

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (1.3.14)$$

Παράδειγμα 1.3.5. Ποιά είναι η ηλεκτρική ενέργεια συστήματος τριών φορτίων q_1, q_2, q_3 ;

Λύση.

$$U = U_{12} + U_{23} + U_{13}.$$

□

1.3.8 Δυναμικό φορτισμένου αγωγού

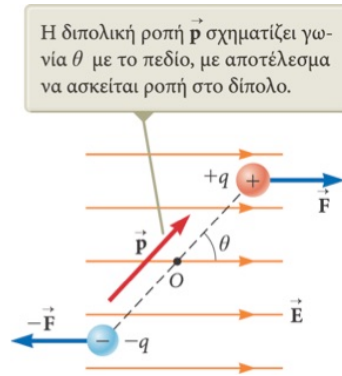
Έχουμε δει ότι $\vec{E} = 0$ σε όλα τα εσωτερικά σημεία ενός αγωγού. Επίσης, ο νόμος Gauss δίνει ότι όλο το φορτίο μέσα στον αγωγό κατανέμεται στην επιφάνειά του.

Παρατήρηση 1.3.6. Το πλεονάζον φορτίο μέσα σε αγωγό κατανέμεται στην επιφάνειά του έτσι ώστε το δυναμικό να έχει σταθερή τιμή σε όλα τα εσωτερικά σημεία στον αγωγό.

1.3.9 Ηλεκτρικό δίπολο σε ηλεκτρικό πεδίο

Ένα δίπολο είναι ένα ζεύγος θετικού και αρνητικού φορτίου $\pm q$. Θα υποθέσουμε ότι αυτά απέχουν απόσταση μεταξύ τους $2a$. Ονομάζουμε ηλεκτρική διπολική ροπή το διάνυσμα \vec{p} με κατεύθυνση από το αρνητικό στο θετικό φορτίο και μέτρο

$$p = 2aq. \quad (1.3.15)$$



Σχήμα 1.2: Ηλεκτρικό δίπολο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Πηγή [1].

Θεωρούμε δίπολο σε ομογενές εξωτερικό πεδίο \vec{E} . Ασκούνται δυνάμεις στα φορτία αντίστοιχα $\pm \vec{F}$. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι μηδέν. Ασκείται ροπή με μέτρο

$$\tau = 2Fa \sin \theta$$

όπου θ είναι η γωνία η οποία σχηματίζει η \vec{p} με το \vec{E} . Είναι

$$\tau = pE \sin \theta \quad (1.3.16)$$

και σε διανυσματική μορφή

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (1.3.17)$$

Το έργο που απαιτείται για την περιστροφή του διπόλου είναι $dW = \tau d\theta$, ώστε η διαφορά δυναμικής ενέργειας του διπόλου όταν περιστρέφεται είναι

$$U_f - U_i = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = pE(\cos \theta_i - \cos \theta_f). \quad (1.3.18)$$

Θεωρούμε ως γωνία αναφοράς της $\theta_i = 90^\circ$ και έχουμε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

$$U = -pE \cos \theta$$

και σε διανυσματική μορφή

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (1.3.19)$$

1.3.10 Ασκήσεις

Φροντιστηρίου

Άσκηση 1.3.1. Ένα ηλεκτρόνιο στη δέσμη ενός μηχανήματος λήψης οδοντιατρικών ακτινογραφιών έχει ταχύτητα μέτρου $v = 1.4 \times 10^8$ m/sec. Αυτή αντιστοιχεί σε κινητική ενέργεια $K = 1.1 \times 10^{-14}$ J, όπως προκύπτει από τη θεωρία σχετικότητας. Σε τι διαφορά δυναμικού πρέπει να επιταχυνθεί το ηλεκτρόνιο ώστε να αποκτήσει αυτήν την ταχύτητα ξεκινώντας από την ηρεμία;

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 1.3.2. (Δυναμικό ηλεκτρικού διπόλου) Θεωρήστε δύο ίσα και αντίθετα φορτία τα οποία βρίσκονται στον άξονα x σε απόσταση d μεταξύ τους. Γράψτε τον τύπο για το δυναμικό που παράγουν. Βρείτε έναν προσεγγιστικό τύπο για το δυναμικό για μεγάλες αποστάσεις από το δίπολο, $r \gg d$.

Άσκηση 1.3.3. Έστω ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Εάν είναι γνωστό το δυναμικό, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του άξονα του δίσκου.

Άσκηση 1.3.4. Μία πλαστική ράβδος η οποία έχει ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο $Q = -25.6$ pC, έχει καμφθεί έτσι ώστε να σχηματίζει κυκλικό τόξο ακτίνας $R = 3.71$ cm και κεντρικής γωνίας $\phi = 120^\circ$. Αν το ηλεκτρικό δυναμικό στο άπειρο είναι $V = 0$, πόσο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P που είναι το κέντρο καμπυλότητας της ράβδου;

Άσκηση 1.3.5. Μία κοίλη μεταλλική σφαίρα με φορτίο Q έχει εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b . (α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(r)$ σε απόσταση r από το κέντρο της. (β) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό $V(r)$. (γ) Αν είναι γνωστό ότι η κρίσιμη τιμή του πεδίου είναι $E = 3 \times 10^6$ V/m, ποιο πρέπει να είναι το μέγεθος της σφαίρας για να αποφύγουμε ηλεκτρική εκκένωση αν $Q = 10$ μ C;

Συμπληρωματικές

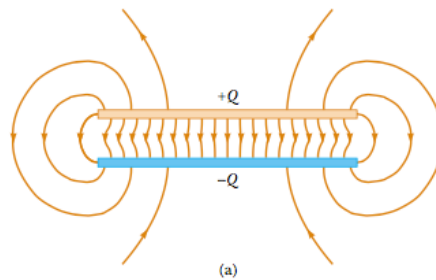
1.4 Χωρητικότητα

1.4.1 Εισαγωγή

Επίπεδοι φορτισμένοι αγωγοί

Θεωρούμε δύο επίπεδες παράλληλες αγώγιμες πλάκες φορτισμένες με πυκνότητα φορτίου $\pm\sigma$ αντίστοιχα (με αντίστοιχα ολικά φορτία $\pm Q$) και σε απόσταση μεταξύ τους d . Οι πλάκες βρίσκονται σε δυναμικό αντίστοιχα V_+, V_- . Αν το πεδίο στο χώρο ανάμεσα στις πλάκες είναι \vec{E} τότε η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους είναι

$$V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (1.4.1)$$



Σχήμα 1.3: Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δύο επιπέδων φορτισμένων πλακών είναι προσεγγιστικά ομογενές. (Πηγή [1].

Ας υποθέσουμε ότι το πεδίο είναι περίπου σταθερό ανάμεσα στις πλάκες (δηλαδή, αυτές είναι αρκετά μεγάλες) και ας ακολουθήσουμε μία διαδρομή παράλληλα σε γραμμή του ηλεκτρικού πεδίου με φορά αντίθετη του πεδίου \vec{E} , ώστε $-\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών είναι

$$|\Delta V| = \int_+^- E ds = Ed. \quad (1.4.2)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} έχει βέβαια δημιουργηθεί από το φορτίο στις πλάκες. Για να συνδέσουμε το φορτίο και το πεδίο εφαρμόζουμε τον νόμο Gauss. Υποθέτουμε επιφάνεια, π.χ., κυλινδρική η οποία περικλείει μόνο το φορτίο της μίας πλάκας (έστω ότι αυτό είναι θετικό) και έχει επιφάνεια βάσης A ίση με την επιφάνεια της πλάκας. Έχουμε

$$Q = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \Rightarrow Q = \epsilon_0 EA. \quad (1.4.3)$$

Εδώ κάναμε την υπόθεση ότι το πεδίο είναι μη-μηδενικό μόνο μεταξύ των πλακών και επίσης είναι περίπου κάθετο στην επιφάνειά τους. Η διαφορά δυναμικού, την οποία ως συμβολίσουμε $V \equiv |\Delta V|$, μπορεί να εκφραστεί ως

$$V = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q \Rightarrow Q = \frac{\epsilon_0 A}{d} V. \quad (1.4.4)$$

Έχουμε τη γενική μορφή

$$Q = CV \quad (1.4.5)$$

όπου C είναι μία σταθερά η οποία εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Στο σύστημα των δύο πλακών είναι

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

Θα ονομάζουμε το σύστημα των δύο φορτισμένων αγωγών πυκνωτή και τις πλάκες οπλισμούς του πυκνωτή. Για πυκνωτές διαφόρων ειδών ισχύει μια σχέση όπως η (1.4.5)

Παρατήρηση 1.4.1. Ορίζουμε ως χωρητικότητα C του πυκνωτή τον λόγο του φορτίου (στον έναν από τους οπλισμούς) προς την απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού μεταξύ τους

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}.$$

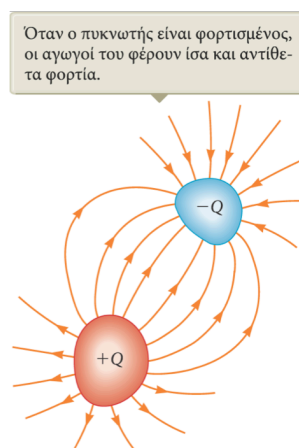
Ορίζουμε τη μονάδα χωρητικότητας και την ονομάζουμε Faraday:

$$1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}.$$

Πυκνωτές

Το σύστημα δύο αγωγών οι οποίοι είναι φορτισμένοι με αντίθετα φορτία $\pm Q$ το ονομάζουμε πυκνωτή.

- Οι αγωγοί ονομάζονται οπλισμοί του πυκνωτή.
- Λόγω του φορτίου έχουμε διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών.



1.4.2 Κυλινδρικοί και σφαιρικοί πυκνωτές

Κυλινδρικός πυκνωτής

Παίρνουμε δύο αγωγίμους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες a και $b > a$ οι οποίοι θεωρούνται οι οπλισμοί ενός πυκνωτή (και οι δύο κύλινδροι υποθέτουμε ότι έχουν μικρό πάχος). Έχουν και οι δύο ύψος $L \gg a, b$ και κάθε ένας έχει φορτίο Q . Από τον νόμο Gauss βρίσκουμε το πεδίο E μεταξύ των οπλισμών, το οποίο έχει ακτινική κατεύθυνση. Θεωρούμε μία κυλινδρική επιφάνεια Gauss με ακτίνα ρ , όπου $a < \rho < b$ και έχουμε

$$Q = \epsilon_0 E (2\pi\rho L) \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L\rho}. \quad (1.4.6)$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι

$$V = \int_+^- E ds = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (1.4.7)$$

Από την σχέση ορισμού έχουμε τη χωρητικότητα του κυλινδρικού πυκνωτή

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}. \quad (1.4.8)$$

Σφαιρικός πυκνωτής

Θεωρούμε δύο ομόκεντρα σφαιρικά κελύφη με ακτίνες a και $b > a$. Μεταξύ των κελύφων έχουμε πεδίο

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (1.4.9)$$

Η διαφορά δυναμικού είναι

$$V = \int_{-}^{+} E ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}, \quad (1.4.10)$$

άρα η χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή είναι

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \quad (1.4.11)$$

Παράδειγμα 1.4.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εξωτερικό κέλυφος είναι αρκετά μακριά, ώστε $b \rightarrow \infty$. Ουσιαστικά, δηλαδή, υποθέτουμε ότι έχουμε μόνο τον έναν σφαιρικό αγωγό με ακτίνα a . Μπορούμε να θεωρήσουμε τον σφαιρικό αγωγό με ακτίνα a ως πυκνωτή με χωρητικότητα

$$C = \lim_{b \rightarrow \infty} 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 a.$$

□

Σύντομο πρόβλημα 1.4.1. Αν διαθέτουμε έναν χώρο συγκεκριμένου όγκου v ποιός από τους πυκνωτές που είδαμε θα έδινε τη μεγαλύτερη χωρητικότητα;

1.4.3 Συνδεσμολογίες πυκνωτών

Πυκνωτές συνδεδεμένοι παράλληλα

Χρησιμοποιούμε σύμβολα για να σχεδιάσουμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα και τα στοιχεία που το αποτελούν. Για παράδειγμα, ένας πυκνωτής παριστάνεται από δύο παράλληλες γραμμές (οι οποίες θυμίζουν δύο παράλληλους οπλισμούς).

Έστω δύο πυκνωτές με χωρητικότητες C_1, C_2 οι οποίοι συνδέονται παράλληλα με μία μπαταρία η οποία παρέχει φορτίο σε κάθε οπλισμό και κατά συνέπεια μία διαφορά δυναμικού ΔV (η οποία είναι ίδια σε κάθε έναν από τους πυκνωτές). Τα φορτία στους οπλισμούς τους είναι

$$Q_1 = C_1 \Delta V, \quad Q_2 = C_2 \Delta V. \quad (1.4.12)$$

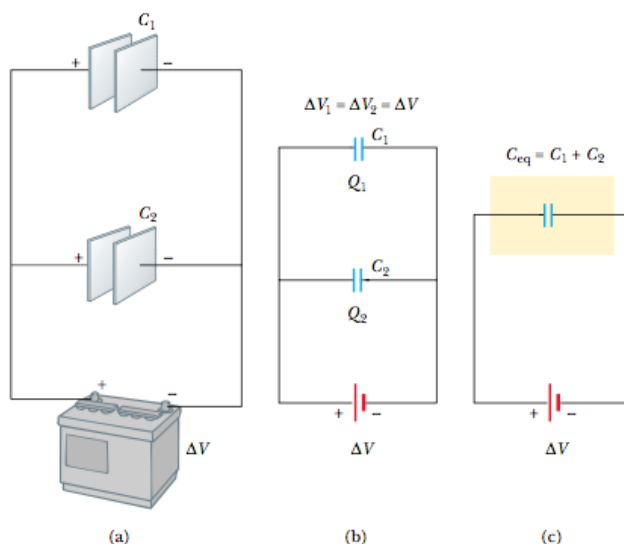
Παρατήρηση 1.4.2. Το κύκλωμα δύο πυκνωτών σε παράλληλη διάταξη είναι ισοδύναμο μέ κύκλωμα με έναν και μόνο πυκνωτή.

Ο ισοδύναμος πυκνωτής πρέπει να έχει φορτίο $Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2$ στους οπλισμούς του όταν του παρέχεται διαφορά δυναμικού ΔV από την ίδια μπαταρία. Θα ισχύει

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 \Rightarrow C_{\text{eqv}} \Delta V = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V \Rightarrow C_{\text{eqv}} = C_1 + C_2. \quad (1.4.13)$$

Γενικά, η χωρητικότητα ενός ισοδύναμου πυκνωτή για πυκνωτές C_i συνδεδεμένων παράλληλα είναι

$$C_{\text{eqv}} = C_1 + C_2 + \dots \quad (1.4.14)$$



Σχήμα 1.4: (a) Δύο πυκνωτές συνδεδεμένοι παράλληλα. (b) Σχέδιο του κυκλώματος. (c) Ισοδύναμο κύκλωμα. (Πηγή [1].)

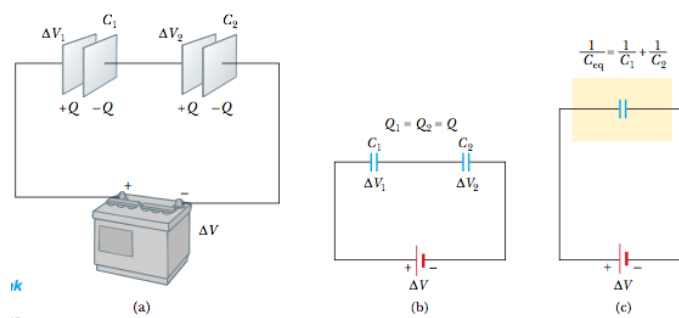
Πυκνωτές συνδεδεμένοι σε σειρά

Η μπαταρία μεταφέρει φορτία από τον οπλισμό του ενός πυκνωτή στον οπλισμό του άλλου. Άρα τα φορτία στους δύο πυκνωτές είναι ίσα

$$Q_1 = Q_2 = Q.$$

Επίσης, η συνολική τάση (διαφορά δυναμικού) στο κύκλωμα θα μοιραστεί στους δύο πυκνωτές

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2. \quad (1.4.15)$$



Σχήμα 1.5: (a) Δύο πυκνωτές συνδεδεμένοι σε σειρά. (b) Σχέδιο του κυκλώματος. (c) Ισοδύναμο κύκλωμα. (Πηγή [1].)

Για τους δύο πυκνωτές ισχύουν οι $Q = C_1 \Delta V_1$ $Q = C_2 \Delta V_2$. Αν θεωρήσουμε έναν και μόνο ισοδύναμο πυκνωτή τότε $Q = C_{\text{eqv}} \Delta V$. Η σχέση για τις διαφορές δυναμικού λοιπόν δίνει

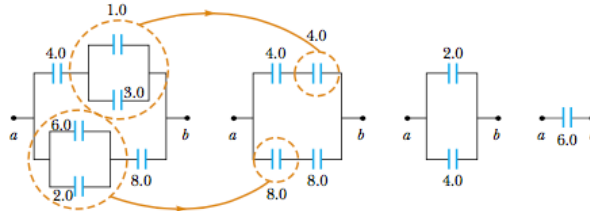
$$\frac{Q}{C_{\text{eqv}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{\text{eqv}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (1.4.16)$$

Γενικά, η χωρητικότητα ενός ισοδύναμου πυκνωτή για πυκνωτές C_i συνδεδεμένων σε

σειρά είναι

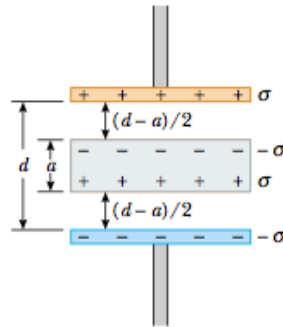
$$\frac{1}{C_{\text{eqv}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \quad (1.4.17)$$

Παράδειγμα 1.4.2. Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των σημείων a και b για την διάταξη των πυκνωτών του σχήματος



□

Παράδειγμα 1.4.3. Έχουμε έναν επίπεδο πυκνωτή με ενβαδό οπλισμών A και απόσταση μεταξύ τους d . Στον μέσον της απόστασης μεταξύ των οπλισμών εισάγεται μία μεταλλική πλάκα πάχους a . Βρείτε τη χωρητικότητα της διάταξης.



Λύση. Η μεταλλική πλάκα που εισάγεται συγκεντρώνει φορτία στις δύο πλευρές της έτσι ώστε το πεδίο να είναι μηδέν εντός της πλάκας. Τελικά, ο πυκνωτής χωρίζεται σε δύο τμήματα (πυκνωτές με απόσταση οπλισμών $(d - a)/2$) και κάθε ένα έχει χωρητικότητα

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{(d - a)/2}.$$

Η διάταξη είναι ισοδύναμη με δύο ίδιους πυκνωτές σε σειρά και η χωρητικότητα C της διάταξης είναι

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1}{2} = \frac{\epsilon_0 A}{d - a}.$$

□

Σύντομο πρόβλημα 1.4.2. Δύο πυκνωτές είναι ίδιοι. Αν θέλουμε να έχουμε τη μικρότερη δυνατή χωρητικότητα θα πρέπει να τους συνδέσουμε παράλληλα ή σε σειρά;

1.4.4 Ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή

Όταν ένας πυκνωτής είναι φορτισμένος, οι οπλισμοί του βρίσκονται σε διαφορά δυναμικού ΔV . Άρα, για να μεταφερθεί φορτίο, έστω dq , από τον έναν οπλισμό του πυκνωτή στον άλλον απαιτείται έργο

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq.$$

Εδώ θεωρούμε ότι ο πυκνωτής έχει φορτίο q στη δεδομένη στιγμή που μεταφέρεται το φορτίο dq . Για να φορτίσουμε τον πυκνωτή με ολικό φορτίο Q πρέπει να καταναλώσουμε έργο

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (1.4.18)$$

Παρατήρηση 1.4.3. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στον πυκνωτή υπάρχει αποθηκευμένη ενέργεια, η οποία δώθηκε κατά τη φόρτισή του.

Την αποθηκευμένη ενέργεια μπορούμε να γράψουμε ως

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q \Delta V = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2. \quad (1.4.19)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για πυκνωτή οποιουδήποτε σχήματος. Όταν αυξάνεται το φορτίο και η διαφορά δυναμικού, αυξάνεται και η αποθηκευμένη ενέργεια.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ενέργεια του πυκνωτή είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο E που δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών του. Έχουμε την $\Delta V = Ed$, ώστε

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (E^2 d^2) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (Ad) E^2. \quad (1.4.20)$$

Παρατηρούμε ότι Ad είναι ο όγκος στον οποίο έχουμε ηλεκτρικό πεδίο E , ώστε μπορούμε να ορίσουμε την πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα όγκου)

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (1.4.21)$$

Αυτή η σχέση ισχύει γενικά για την ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου.

1.4.5 Πυκνωτής με διηλεκτρικό

Ο Faraday παρατήρησε ότι όταν ο πυκνωτής είναι γεμάτος με κάποιο μονωτικό υλικό (το οποίο θα ονομάζουμε διηλεκτρικό) τότε η χωρητικότητά του αλλάζει σε σχέση με αυτήν που μετρήθηκε χωρίς το διηλεκτρικό, C_{air} και γίνεται

$$C = \kappa C_{\text{air}},$$

όπου $\kappa > 1$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το διηλεκτρικό.

Παρατήρηση 1.4.4. Σε περιοχή γεμάτη με διηλεκτρικό, με διηλεκτρική σταθερά κ , όλες οι ηλεκτροστατικές εξισώσεις που περιέχουν την σταθερά ϵ_0 τροποποιούνται και περιέχουν τη νέα σταθερά $\epsilon = \kappa \epsilon_0$. Αυτό συμβαίνει διότι τα άτομα ή μόρια του διηλεκτρικού πολώνονται (πρόκειται για ένα ενδιαφέρον φαινόμενο το οποίο μπορείτε να δείτε στα [1, 2]).

Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο φορτίο εντός διηλεκτρικού είναι

$$E = \frac{1}{4\pi\kappa\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.4.22)$$

Βλέπουμε ότι έχουμε μία εξασθένιση του πεδίου.

Παράδειγμα 1.4.4. Επίπεδος πυκνωτής με $C = 13 \text{ pF}$ φορτίζεται από μπαταρία με $\Delta V = 12 \text{ V}$. Ακολούθως, η μπαταρία αποσυνδέεται κι ένα πλακίδιο πορσελάνη με $\kappa = 6.5$ εισάγεται ανάμεσα στους οπλισμούς. (α) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια του πυκνωτή πριν την εισαγωγή του διηλεκτρικού; (β) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια του πυκνωτή μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού;

Λύση. (α)

$$U_i = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}(13 \times 10^{-12} \text{ F})(12 \text{ V}) = 936 \text{ pJ}.$$

(β) Μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού το φορτίο στον πυκνωτή παραμένει το ίδιο, ενώ η διαφορά δυναμικού αλλάζει. Είναι

$$U_f = \frac{Q^2}{2\kappa C} = \frac{U_i}{\kappa} = 144 \text{ pJ}.$$

□

Νόμος Gauss παρουσία διηλεκτρικού

Αν υπολογίσουμε την ροή του ηλεκτρικού πεδίου σε πυκνωτή ο οποίος είναι γεμάτος με διηλεκτρικό τότε βρίσκουμε

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint \frac{\vec{E}_0}{\kappa} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\kappa}, \quad (1.4.23)$$

όπου \vec{E}_0 είναι το πεδίο που θα είχαμε απουσία διηλεκτρικού. Άρα, ο νόμος Gauss σε χώρο με διηλεκτρικό γράφεται

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\kappa\epsilon_0}. \quad (1.4.24)$$

Παρατήρηση 1.4.5. (Δέσμια φορτία) Το διηλεκτρικό περιέχει φορτία τα οποία λέμε δέσμια (σε αντίθεση με το ελεύθερο φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή).

Το συνολικό φορτίο, το οποίο μετράει ο νόμος Gauss, είναι Q/κ , είναι δηλαδή μικρότερο του ελεύθερου φορτίου Q , ακριβώς λόγω της παρουσίας δέσμιων φορτίων.

1.4.6 Ασκήσεις

Φροντιστηρίου

Άσκηση 1.4.1. Μία μονωμένη αγωγίμη σφαίρα με ακτίνα $R = 7 \text{ cm}$ έχει φορτίο $Q = 1 \text{ nC}$. (α) Πόση δυναμική ενέργεια αποθηκεύεται στο ηλεκτρικό πεδίο αυτού του φορτισμένου αγωγού; (β) Πόση είναι η πυκνότητα ενέργειας στην επιφάνεια της σφαίρας;

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 1.4.2. Θεωρούμε C_0 τη χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή με απόσταση d μεταξύ των οπλισμών του. Πόση θα είναι η χωρητικότητα όταν ανάμεσα στους οπλισμούς εισαχθεί μία πλάκα από διηλεκτρικό υλικό με διηλεκτρική σταθερά κ και πάχος fd , όπου $0 < f < 1$.

Άσκηση 1.4.3. Δύο επίπεδοι πυκνωτές $C_1 = 6.0 \mu\text{F}$ ο καθένας, συνδέονται παράλληλα με μπαταρία $\Delta V = 12 \text{ V}$. Κατόπιν ένας από τους πυκνωτές συμπιέζεται ώστε η απόσταση ανάμεσα στους οπλισμούς να γίνει το 50% της αρχικής τιμής της. Πόσο επιπλέον φορτίο μεταφέρεται στους πυκνωτές από τη μπαταρία εξαιτίας της συμπίεσης;

Άσκηση 1.4.4. Δύο σφαιρικοί αγωγοί ακτίνων R_1 και R_2 βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους έτσι ώστε τα φαινόμενα επαγωγής να είναι αμεληταία. Οι σφαίρες συνδέονται με ένα λεπτό αγωγίμο σύρμα και φορτίζονται με φορτία Q_1, Q_2 έως ότου αποκτήσουν κοινό δυναμικό V ως προς το άπειρο, όπου θεωρούμε ότι $V = 0$. (α) Προσδιορίστε τη χωρητικότητα C του συστήματος, όπου $C = (Q_1 + Q_2)/V$. (β) Ποιός ο λόγος των φορτίων Q_1/Q_2 ;

Συμπληρωματικές

Άσκηση 1.4.5. Ένας επίπεδος πυκνωτής (γεμάτος με αέρα) έχει εμβαδό οπλισμών $A = 8.50 \text{ cm}^2$ και απόσταση οπλισμών $d = 3.00 \text{ mm}$ και είναι φορτισμένος από μία μπαταρία $\Delta V = 6.00 \text{ Volt}$. Στη συνέχεια αποσυνδέεται από τη μπαταρία και επίσης απομακρύνονται ο ένας οπλισμός από τον άλλο (χωρίς να εκφορτιστούν) σε μία απόσταση $d' = 8.00 \text{ mm}$. Βρείτε (α) τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών (β) την αρχική αποθηκευμένη ενέργεια, (γ) την τελική αποθηκευμένη ενέργεια. [Υπόδειξη: αγνοείστε την περίπλοκη συμπεριφορά του πεδίου στις ακριανές περιοχές των οπλισμών.]

Άσκηση 1.4.6. Διάταξη τριών πυκνωτών: [2] ασκ 25.37

Άσκηση 1.4.7. [2] ενδ προβλ 25.7

Κεφάλαιο 2

Ρεύμα

2.1 Ρεύμα και αντίσταση

2.1.1 Ρεύμα

Υποθέτουμε έναν αγώγιμο βρόγχο και συνεχή κίνηση φορτίου μέσα σε αυτόν. Ορίζουμε το ρεύμα

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (2.1.1)$$

Η μονάδα μέτρησης ρεύματος είναι το 1 Ampere = 1 A = 1 Cb/sec. Θεωρούμε συνήθως σταθερή ροή ρεύματος, δηλαδή η ίδια ποσότητα ρεύματος κινείται σε όλο το μήκος του αγωγού.

Θεωρούμε ότι η ροή του ρεύματος είναι προς τα εκεί που κινούνται οι θετικοί φορείς φορτίου. Όταν έχουμε κίνηση αρνητικών φορέων (ηλεκτρονίων) θεωρούμε τη ροή ρεύματος αντίθετα στη ροή των αρνητικών φορέων.

Πυκνότητα ρεύματος

Αν θεωρήσουμε έναν αγωγό με διατομή A τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το ρεύμα σε κάθε εσωτερικό σημείο του αγωγού. Το ρεύμα σε όλη τη διατομή είναι

$$I = \int J dA, \quad (2.1.2)$$

όπου J λέγεται πυκνότητα ρεύματος. Αν το J είναι σταθερό στον αγωγό τότε

$$I = JA \Rightarrow I = \frac{J}{A}. \quad (2.1.3)$$

Παρατήρηση 2.1.1. Μπορούμε να ορίσουμε τις ρευματικές γραμμές με τρόπο ανάλογο που ορίσαμε τις γραμμές ηλεκτρικού πεδίου. Επειδή τα φορτία διατηρούνται αυτές οι γραμμές είναι συνεχείς. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι ένας αγωγός στενεύει τότε πυκνώνουν και οι ρευματικές γραμμές. Η πυκνότητα των γραμμών με συνέπεια υποδηλώνει την πυκνότητα ρεύματος.

Παράδειγμα 2.1.1. Κυλινδρικός αγωγός ακτίνας $R = 2.0 \text{ mm}$ διαρρέεται από ρεύμα με σταθερή πυκνότητα $J = 2.0 \times 10^5 \text{ A/m}^2$. (α) Πόσο είναι το ρεύμα που διαρρέει το εξωτερικό τμήμα του αγωγού, από ακτίνα $R/2$ έως R ; (β) Αν υποθέσουμε ότι η πυκνότητα ρεύματος μεταβάλλεται με την ακτίνα ως $J = ar^2$, όπου $a = 2.0 \times 10^{11} \text{ A/m}^4$, πόσο είναι το ρεύμα που διαρρέει το εξωτερικό τμήμα του αγωγού;

Λύση. (α)

$$I_{\text{out}} = JA_{\text{out}} = J \pi \frac{3R^2}{4}.$$

(β)

$$I_{\text{out}} = \int_{\text{out}} J dA = \int_{R/2}^R ar^2 2\pi r dr = \dots = \frac{15}{32} \pi a R^4.$$

□

Μικροσκοπική θεώρηση ηλεκτρικού ρεύματος

Ας δούμε με λεπτομέρεια την κίνηση των φορέων (ηλεκτρονίων) μέσα σε έναν αγωγό διατομής A σε ένα τμήμα του μήκους Δx . Αν n είναι η πυκνότητα των φορέων (δηλ., ο αριθμός των φορέων ανά μονάδα όγκου), τότε το πλήθος των φορέων είναι $nA\Delta x$ και το ολικό φορτίο είναι $\Delta q = (nA\Delta x)e$.

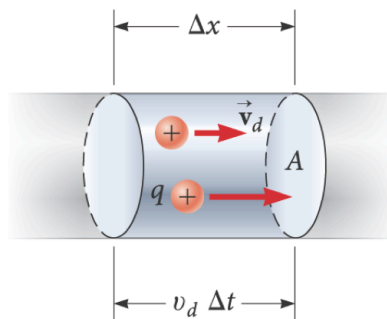
Παρατήρηση 2.1.2. Υποθέτουμε ότι κάθε φορέας φορτίου κινείται με δεδομένη ταχύτητα v_e την οποία ονομάζουμε ταχύτητα ολίσθησης.

Κάθε φορτίο (φορέας) θα διατρέξει το μήκος Δx σε χρόνο Δt με

$$\Delta x = v_e \Delta t.$$

Άρα, το φορτίο το οποίο διέρχεται από την διατομή A σε χρόνο Δt είναι

$$\Delta q = (nAv_e \Delta t)e$$



Σχήμα 2.1: Φορείς φορτίου q κινούνται με ταχύτητα v_d και διέρχονται από επιφάνεια A . Σε χρόνο Δt θα διέλθουν δια μέσου της A τα φορτία τα οποία βρίσκονται σε απόσταση $\Delta x = v_d \Delta t$ από την A . Πηγή [1].

Αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα στον αγωγό (το φορτίο το οποίο διέρχεται από διατομή A ανά μονάδα χρόνου) θα είναι

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nev_e A \quad (2.1.4)$$

και η πυκνότητα ρεύματος

$$\vec{J} = (ne)\vec{v}_e. \quad (2.1.5)$$

Παρατηρούμε ότι το ne είναι η πυκνότητα φορτίου. Η τελευταία σχέση ισχύει ως διανυσματική σχέση διότι η φορά του ρεύματος θεωρείται ότι είναι αυτή της ταχύτητας των φορέων.

Παράδειγμα 2.1.2. Ένα χάλκινο σύρμα διαμέτρου $d = 2 \text{ mm}$ έχει διατομή εμβαδού $A = 3.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2$. Αν διαρρέεται από ρεύμα $I = 10 \text{ A}$ πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης των ηλεκτρονίων v_e ; [Θεωρήστε ότι κάθε άτομο χαλκού συνεισφέρει στο ρεύμα ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο και η πυκνότητα του χαλκού είναι $\rho_{\chi} = 8.92 \text{ g/cm}^3$].

Λύση. Στον περιοδικό πίνακα βρίσκουμε ότι η γραμμομοριακή μάζα του χαλκού είναι $M = 64.5 \text{ g/mol}$. Η πυκνότητα ενός mol χαλκού είναι $V = \frac{M}{\rho_{\chi}}$. Ένα mol περιέχει $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ άτομα, ώστε η πυκνότητα ατόμων είναι

$$n = \frac{N_A}{V} = \frac{N_A \rho_{\chi}}{M} = 8.33 \times 10^{28}.$$

Αυτή είναι και η πυκνότητα φορέων φορτίου, αφού κάθε άτομο συνεισφέρει ένα ηλεκτρόνιο. Έχουμε

$$v_e = \frac{I}{neA} = \frac{IM}{eAN_A\rho_{\chi}} = \dots = 2.23 \times 10^{-4} \text{ m/s}.$$

□

Παρατήρηση 2.1.3. Τα φορτία (ηλεκτρόνια) σε ένα μέταλλο κινούνται με μεγάλες ταχύτητες προς όλες τις κατευθύνσεις με τυχαίο τρόπο. Έτσι δεν δημιουργείται ρεύμα προς κάποια κατεύθυνση διότι η μέση ταχύτητά τους είναι μηδέν. Αν εφαρμόσουμε μία διαφορά δυναμικού τότε η μέση ταχύτητά των φορτίων θα αποκτήσει μία συνιστώσα προς την κλίση του δυναμικού (προς το πεδίο). Είναι αυτή η ταχύτητα την οποία θεωρήσαμε ως ταχύτητα ολίσθησης v_e των φορέων.

2.1.2 Αντίσταση και ειδική αντίσταση

Τα φορτία κινούνται ανάμεσα σε σημεία με διαφορά δυναμικού. Ονομάζουμε αντίσταση τον λόγο

$$R = \frac{V}{I}. \quad (2.1.6)$$

Η μονάδα μέτρησης είναι το $1 \text{ ohm} = 1 \Omega = 1 \text{ V/A}$. Συνήθως γνωρίζουμε την αντίσταση ενός ηλεκτρικού στοιχείου και έτσι έχουμε ότι το ρεύμα που το διαρρέει είναι

$$I = \frac{V}{R}.$$

Συχνά μετράμε την πυκνότητα ρεύματος και τότε ορίζουμε την *ειδική αντίσταση* σε ένα υλικό το οποίο βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο E :

$$\rho = \frac{E}{J}. \quad (2.1.7)$$

Έτσι, το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = \rho \vec{J}.$$

Επίσης, ορίζουμε την αγωγιμότητα

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (2.1.8)$$

Παρατήρηση 2.1.4. Η αντίσταση είναι ιδιότητα ενός αντικειμένου (π.χ. ενός σύρματος), ενώ η ειδική αντίσταση είναι ιδιότητα ενός υλικού.

Νόμος του Ohm

Από τις παραπάνω προκύπτει

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (2.1.9)$$

Τα υλικά που υπακούουν τον παραπάνω νόμο ονομάζονται λέμε ότι υπακούουν τον νόμο του Ohm.

Παρατήρηση 2.1.5. Στα ωμικά υλικά ο λόγος της πυκνότητας ρεύματος προς το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερή τιμή. Ο μόνος του Ohm είναι εμπειρικός.

Έστω ένα σύρμα μήκους L και διατομής A . Αν θέσουμε στα άκρα του διαφορά δυναμικού V τότε έχουμε

$$E = \frac{V}{L}, \quad J = \frac{I}{A}.$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τη σχέση αντίστασης και ειδικής αντίστασης

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{V/L}{I/A} = \frac{V A}{I L}$$

άρα

$$R = \rho \frac{L}{A}. \quad (2.1.10)$$

Παρατήρηση 2.1.6. Ο νόμος του Ohm λέει ότι το ρεύμα που διαρρέει μία συσκευή είναι ανάλογο της διαφοράς δυναμικού που εφαρμόζεται.

Όταν τα ηλεκτρόνια του υλικού βρεθούν σε ηλεκτρικό πεδίο επιταχύνονται σύμφωνα με τον νόμο Νεύτωνα, με επιτάχυνση $a = eE/m$. Υποθέτουμε όμως ότι συμβαίνουν συχνές συγκρούσεις των ηλεκτρονίων με τα άτομα του υλικού, ώστε τα ηλεκτρόνια χάνουν την ταχύτητά τους. Αν ο μέσος χρόνος κίνησης είναι τ τότε η μέση ταχύτητα είναι

$$v_e = a\tau = \frac{eE\tau}{m}.$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι $v_e = J/(ne)$, άρα

$$\frac{J}{ne} = \frac{eE\tau}{m} \Rightarrow J = \frac{ne^2\tau}{m} E. \quad (2.1.11)$$

Άρα, η ειδική αντίσταση και η αγωγιμότητα είναι

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}, \quad \sigma = \frac{ne^2\tau}{m}. \quad (2.1.12)$$

Αφού τα e, m είναι σταθερά, η ρ θα ακολουθεί τον νόμο του Ohm, δηλαδή θα είναι σταθερή, αν και ο μέσος χρόνος τ είναι σταθερός και ανεξάρτητος του εφαρμοζόμενου πεδίου E . Αυτό είναι λογικό να το υποθέσουμε, αφού το εφαρμοζόμενο πεδίο αλλάζει μόνο λίγο την κινητική κατάσταση των ηλεκτρονίων.

Παράδειγμα 2.1.3. (α) Πόσος είναι ο μέσος ελεύθερος χρόνος τ ανάμεσα σε διαδοχικές συγκρούσεις για τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας στο χαλκό; (β) Ποιά είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή λ των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας την οποία διανύουν μεταξύ των συγκρούσεων;

(α) Είναι (δείτε την n από το παράδειγμα 2.1.2)

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}}{(8.33 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2(1.69 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})} = 2.5 \times 10^{-14} \text{ sec.}$$

(β) Είναι (μας δίνεται η ταχύτητα v_{eff} των ηλεκτρονίων)

$$\lambda = v_{\text{eff}}\tau = (1.6 \times 10^6 \text{ m/s})(2.5 \times 10^{-14} \text{ sec}) = 4.0 \times 10^{-8} \text{ m} = 40 \text{ nm.}$$

□

Υλικά και αγωγιμότητα

- **Αγωγοί:** έχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια.
- **Μονωτές:** δεν έχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια.
- **Ημιαγωγοί:** σαν μονωτές, όμως ηλεκτρόνια απελευθερώνονται με τη θερμοκρασία. Επίσης, μπορούμε να βάλουμε προσμίξεις.
- **Υπεραγωγοί:** έχουν μηδενική ειδική αντίσταση κάτω από μία θερμοκρασία.

2.1.3 Ηλεκτρική ισχύς

Ας θεωρήσουμε μία μπαταρία η οποία είναι συνδεδεμένη με μία συσκευή, π.χ., με μία αντίσταση, έναν μηχανικό κινητήρα κλπ. (δηλαδή, έχουμε ένα απλό κύκλωμα). Αφού μεταξύ των πόλων της μπαταρίας έχουμε διαφορά δυναμικού V , θα ρέει φορτίο στο κύκλωμα, άρα θα έχουμε ένα σταθερό ρεύμα I . Όταν ρέει φορτίο $dq = Idt$ μεταξύ διαφοράς δυναμικού V θα έχουμε μείωση της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας

$$dU = dqV = IV dt.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας dU/dt είναι

$$P \equiv \frac{dU}{dt} = IV \quad (2.1.13)$$

και πρόκειται για την ισχύ η οποία καταναλώνεται στο κύκλωμα. Αυτή είναι η ισχύς που μεταφέρεται από τη μπαταρία και καταναλώνεται στη συσκευή. Η μονάδα ισχύος είναι

$$1 \text{ V} \cdot \text{A} = \left(1 \frac{\text{J}}{\text{C}}\right) \left(1 \frac{\text{C}}{\text{s}}\right) = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αντίστασης έχουμε

$$P = I^2V = \frac{V^2}{R}. \quad (2.1.14)$$

Παράδειγμα 2.1.4. Ένα σύρμα παρουσιάζει αντίσταση $R = 72 \Omega$. Με τί ρυθμό καταναλώνεται ενέργεια (α) αν στα άκρα του συνδεθεί πηγή που δίνει διαφορά δυναμικού $V = 120 \text{ V}$; (β) αν το σύρμα κοπεί στη μέση και η ίδια διαφορά δυναμικού εφαρμοστεί στα άκρα του ενός κομματιού;

Λύση. (α) Είναι

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(120 \text{ V})^2}{72 \Omega} = 200 \text{ W}.$$

(β) Το μισό μήκος σύρματος παρουσιάζει τη μισή αντίσταση $R/2 = 36 \Omega$. Επομένως

$$P = \frac{V^2}{R/2} = \frac{(120 \text{ V})^2}{36 \Omega} = 400 \text{ W}.$$

Παρατηρήστε ότι τότε περνάει ρεύμα $I\sqrt{2}$, όπου I το ρεύμα της περίπτωσης (α).

□

2.1.4 Ασκήσεις

Φροντιστηρίου

Άσκηση 2.1.1. Μία δέσμη περιέχει $n = 2.0 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ διπλά φορτισμένων ιόντων, τα οποία κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα $v = 1.0 \times 10^5 \text{ m/sec}$. (α) Πόσο είναι το μέτρο της πυκνότητας ρεύματος \vec{J} ; και (β) ποιά η κατεύθυνσή της; (γ) Ποιό επιπλέον μέγεθος χρειαζόμαστε προκειμένου να υπολογίσουμε το συνολικό ρεύμα I από αυτή τη δέσμη ιόντων;

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 2.1.2. Ένα σύρμα με αντίσταση $R_0 = 6.0 \Omega$ τεντώνεται έτσι ώστε το μήκος του να γίνει τρεις φορές μεγαλύτερο του αρχικού του μήκους. Βρείτε την αντίσταση του μακρύτερου σύρματος υποθέτοντας ότι η ειδική αντίσταση και η πυκνότητά του δεν μεταβάλλονται.

Άσκηση 2.1.3. Δύο σύρματα C και D είναι κατασκευασμένα από διαφορετικά υλικά και έχουμε μήκος $L_C = L_D = 1.0 \text{ m}$. Η ειδική αντίσταση του C είναι $\rho_C = 2.0 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ και η διάμετρος του $d_C = 1.00 \text{ mm}$ και του D είναι $\rho_D = 1.0 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ και $d_D = 0.50 \text{ mm}$. Τα σύρματα συνδέονται σε σειρά (το ένα μετά το άλλο) και διαρρέονται από ρεύμα $I = 2.0 \text{ A}$. Πόση είναι η διαφορά δυναμικού (α) ανάμεσα στα άκρα του C ; και (β) ανάμεσα στα άκρα του D ; Πόσος είναι ο ρυθμός με τον οποίο χάνεται ενέργεια (γ) ανάμεσα στα άκρα του C ; και (δ) ανάμεσα στα άκρα του D ;

Συμπληρωματικές

Άσκηση 2.1.4.

2.2 Κυκλώματα

2.2.1 Εισαγωγή

Παρατήρηση 2.2.1. *Κύκλωμα λέγεται μία σειρά από ηλεκτρικά στοιχεία συνδεδεμένα μεταξύ τους, τα οποία είναι δυνατόν να τα διαρρέει ηλεκτρικό ρεύμα.*

Μία συσκευή η οποία παράγει μία διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο άκρα προκαλεί τη ροή φορτίου ανάμεσα σε δύο άκρα του κυκλώματος. Λέμε ότι η συσκευή παρέχει μία *ηλεκτρεγερτική δύναμη*. Παράδειγμα τέτοιων συσκευών είναι οι ηλιακοί συλλέκτες.

Αν υποθέσουμε ότι η ηλεκτρεγερτική συσκευή διατηρεί μία διαφορά δυναμικού V , αυτό σημαίνει ότι όταν φορτίο dq μετακινείται από τον αρνητικό πόλο της μέχρι τον θετικό η συσκευή παράγει μία ποσότητα έργου dW . Ορίζουμε την ηλεκτρεγερτική δύναμη ως

$$E = \frac{dW}{dq}. \quad (2.2.1)$$

Αυτή φαίνεται να είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού που δίνει η ηλεκτρεγερτική συσκευή. Όμως, αυτό είναι αλήθεια μόνο για ιδανικές ηλεκτρεγερτικές συσκευές οι οποίες δεν παρουσιάζουν αντίσταση.

2.2.2 Ρεύμα σε βρόγχο

Ας θεωρήσουμε έναν βρόγχο (κύκλωμα) ο οποίος περιλαμβάνει μία μπαταρία και μία αντίσταση R . Έστω $dW = E dq = E Idt$ το έργο που παράγει η μπαταρία. Αυτό θα πρέπει να ισούται με το έργο που καταναλώθηκε στην αντίσταση $I^2 R dt$. Άρα,

$$E Idt = I^2 R dt \Rightarrow E = IR.$$

Όστε το ρεύμα στον βρόγχο που περιέχει μία ιδανική μπαταρία και αντίσταση R είναι

$$I = \frac{E}{R}. \quad (2.2.2)$$

Από τον ορισμό της αντίστασης προκύπτει ότι η διαφορά δυναμικού V στα άκρα αντίστασης η οποία διαρρέεται από ρεύμα I είναι

$$V = IR. \quad (2.2.3)$$

Παρατήρηση 2.2.2. *Σε μετακίνηση διαμέσου αντίστασης R κατά τη φορά του ρεύματος η μεταβολή στο δυναμικό είναι $-IR$ ενώ κατά την αντίθετη κατεύθυνση είναι IR .*

Εσωτερική αντίσταση μπαταρίας

Στο εσωτερικό των πραγματικών μπαταριών υπάρχει αντίσταση στην ροή φορτίου. Αυτή λέγεται *εσωτερική αντίσταση* και θα την συμβολίζουμε με r . Όστε η διαφορά δυναμικού στα άκρα της μπαταρίας είναι

$$\Delta V = E - Ir. \quad (2.2.4)$$

Σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά

Παρατήρηση 2.2.3. Οι αντιστάσεις οι οποίες είναι συνδεδεμένες σε σειρά διαρρέονται όλες από το ίδιο ρεύμα.

Το άθροισμα διαφορών δυναμικού στα άκρα τους είναι ίσο με με την εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού V . Για δύο αντιστάσεις σε σειρά

$$E = IR_1 + IR_2 = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Οι δύο αντιστάσεις είναι ισοδύναμες με μία αντίσταση

$$R_{\text{eqv}} = R_1 + R_2.$$

Γενικά

$$R_{\text{eqv}} = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (2.2.5)$$

Παράδειγμα 2.2.1. Ας θεωρήσουμε (μη-ιδανική) μπαταρία η οποία παρουσιάζει αντίσταση r . Σε κύκλωμα με τη μπαταρία και μία αντίσταση R ισχύει

$$E - Ir - IR = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R + r}. \quad (2.2.6)$$

□

2.2.3 Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων κυκλώματος

Θεωρούμε κύκλωμα με μπαταρία και αντίσταση R και ας δούμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων a, b μπαταρίας με εσωτερική αντίσταση r . Είναι

$$V_a + E - ir = V_b \Rightarrow V_b - V_a = E - Ir.$$

Έχουμε δει ότι $I = E/(R + r)$, άρα

$$V_b - V_a = \frac{E}{R + r} R. \quad (2.2.7)$$

Παρατήρηση 2.2.4. Για να βρούμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων, ξεκινάμε από το ένα σημείο και διατρέχουμε το κύκλωμα ως το άλλο σημείο, ακολουθώντας οποιαδήποτε διαδρομή, αθροίζοντας αλγεβρικά τις διαφορές δυναμικού που συναντάμε.

Παρατήρηση 2.2.5. (Γειώση) Αν συνδέσουμε ένα σημείο του κυκλώματος με το έδαφος τότε στο σημείο αυτό έχουμε δυναμικό ίσο με αυτό του εδάφους, το οποίο θεωρούμε συμβατικά ίσο με μηδέν. Λέμε ότι έχουμε γειώσει το κύκλωμα.

Παράδειγμα 2.2.2. Έστω κύκλωμα με ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις (αντίθετα συνδεδεμένες)

$$E_1 = 4.4 \text{ V}, \quad E_2 = 2.1 \text{ V}$$

και αντιστάσεις

$$r_1 = 2.3 \Omega, \quad r_2 = 1.8 \Omega, \quad R = 5.5 \Omega.$$

(α) Ποιό είναι το ρεύμα I στο κύκλωμα; (β) Ποιά η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους ακροδέκτες της μπαταρίας 1; [δώστε σχήμα]

Λύση. (α)

$$I = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2 + R}.$$

(β)

$$V_b - V_a = -Ir_1 + E_1.$$

□

2.2.4 Κυκλώματα πολλαπλών βρόγχων

Παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων

Αν και τα δύο άκρα δύο αντιστάσεων R_1, R_2 είναι απευθείας συνδεδεμένα μεταξύ τους λέμε ότι οι αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα.

Παρατήρηση 2.2.6. Για αντιστάσεις οι οποίες είναι συνδεδεμένες παράλληλα η διαφορά δυναμικού στα άκρα κάθε μίας είναι ίδια.

Στις αντιστάσεις διέρχονται ρεύματα

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2}.$$

Παρατήρηση 2.2.7. Αντιστάσεις που είναι παράλληλα συνδεδεμένες μπορούν να αντικατασταθούν από μία αντίσταση R_{eqv} η οποία έχει την ίδια διαφορά δυναμικού και διαρρέεται από το ίδιο συνολικό ρεύμα I .

Πρέπει να βρούμε R_{eqv} στην οποία, αν ασκηθεί διαφορά δυναμικού V , διαρρέεται από ρεύμα $I = I_1 + I_2$. Είναι

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_{\text{eqv}}} \Rightarrow \frac{V}{R_{\text{eqv}}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \frac{V}{R_{\text{eqv}}} \Rightarrow \frac{1}{R_{\text{eqv}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ή

$$R_{\text{eqv}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.2.8)$$

Για n αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα:

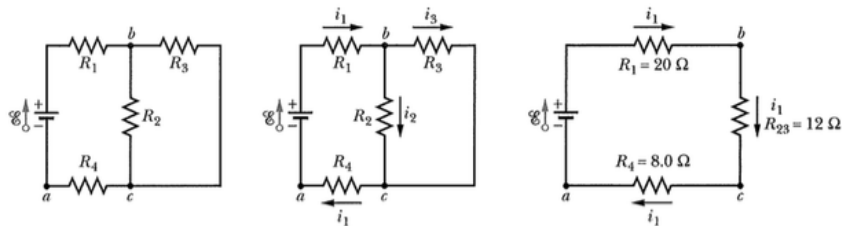
$$\frac{1}{R_{\text{eqv}}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}. \quad (2.2.9)$$

Κανόνες του Kirchhoff

Παρατήρηση 2.2.8. (Κανόνας των κόμβων) Το άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται σε έναν οποιονδήποτε βρόγχο ισούται με το άθροισμα των ρευμάτων που εξέρχονται από αυτόν.

Παρατήρηση 2.2.9. (Κανόνας βρόγχων) Το αλγεβρικό άθροισμα των μεταβολών δυναμικού σε μία πλήρη διαδρομή σε έναν βρόγχο κυκλώματος ισούται με μηδέν.

Παράδειγμα 2.2.3. Τα ηλεκτρικά στοιχεία στο σχήμα 2.2 είναι $E = 12\text{V}$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $R_4 = 8.0\Omega$. Υπολογίστε τα ρεύματα (α) I_1 (β) I_2 και (γ) I_3 στον πολλαπλό βρόγχο του σχήματος



Σχήμα 2.2: Πηγή [2]

Λύση. (α) Οι R_2, R_3 είναι παράλληλα:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 12 \Omega.$$

Κανόνας των βρόγχων, στον μοναδικό βρόγχο:

$$12 \text{ V} - I_1(20 \Omega) - I_1(12 \Omega) - I_1(8.0 \Omega) = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{12 \text{ V}}{40 \Omega} = 0.30 \text{ A}.$$

(β) Δουλεύουμε αντίστροφα. Στα άκρα των R_2, R_3 έχουμε διαφορά δυναμικού $V_{23} = I_1 R_{23} = 3.6 \text{ V}$. Η ίδια αυτή διαφορά δυναμικού υπάρχει στα άκρα της R_2 και της R_3 . Άρα,

$$I_2 = \frac{V_{23}}{R_2} = 0.18 \text{ A}.$$

(γ)

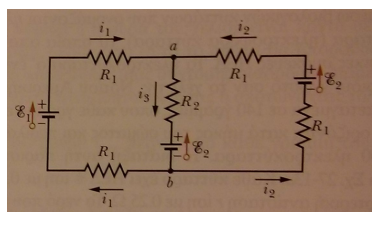
$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_3 = 0.12 \text{ A}.$$

□

Παράδειγμα 2.2.4. Τα στοιχεία του κυκλώματος είναι

$$E_1 = 3.0 \text{ V}, \quad E_2 = 6.0 \text{ V}, \quad R_1 = 2.0 \Omega \quad R_2 = 4.0 \Omega.$$

Βρείτε την ένταση και την κατεύθυνση του ρεύματος σε κάθε έναν από τους τρεις κλάδους.



Σχήμα 2.3: Πηγή [2]

Λύση. Κανόνας κόμβων

$$I_3 = I_1 + I_2.$$

Αριστερός βρόγχος:

$$-I_1 R_1 + E_1 - I_1 R_1 - (I_1 + I_2) R_2 - E_2 = 0 \Rightarrow I_1(8.0 \Omega) + I_2(4.0 \Omega) = -3.0 \text{ V}.$$

Δεξιός βρόγχος:

$$-I_2 R_1 + E_2 - I_2 R_1 - (I_1 + I_2) R_2 - E_2 = 0 \Rightarrow I_1(4.0 \Omega) + I_2(8.0 \Omega) = 0.$$

Λύνουμε το σύστημα

$$I_1 = -0.50 \text{ A}, \quad I_2 = 0.25 \text{ A}.$$

Και

$$I_3 = -0.25 \text{ A}.$$

□

2.2.5 Αμπερόμετρο και Βολτόμετρο

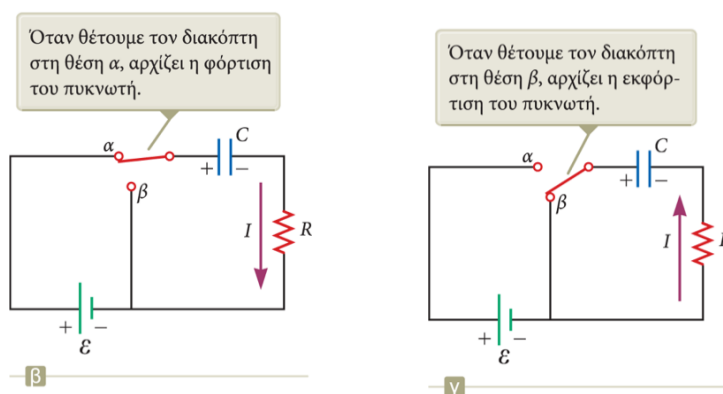
Το αμπερόμετρο μετράει το ρεύμα που διέρχεται από ένα κύκλωμα: πρέπει να παρεμβάλλεται στο κύκλωμα.

Το βολτόμετρο μετράει διαφορά δυναμικού στα άκρα κάποιου στοιχείου: συνδέεται παράλληλα στο στοιχείο.

2.2.6 Κυκλώματα RC

Θεωρούμε κύκλωμα με ηλεκτρεγερτική δύναμη E , μία αντίσταση R και έναν πυκνωτή C .

Φόρτιση πυκνωτή



Σχήμα 2.4: Πηγή [1]

Όταν ο διακόπτης κλείνει ώστε να περιλαμβάνει την E , ο κανόνας των βρόχων δίνει

$$E - IR - \frac{Q}{C} = 0. \quad (2.2.10)$$

Παρατηρούμε ότι

$$I = \frac{dQ}{dt},$$

ώστε έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E. \quad (2.2.11)$$

Έχουμε λύση την

$$Q(t) = CE(1 - e^{-t/RC}). \quad (2.2.12)$$

Η λύση παριστάνει φόρτιση του πυκνωτή από $Q(t=0) = 0$ σε $Q(t \rightarrow \infty) = CE$.

Αντιστοίχως, το ρεύμα είναι

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/RC}. \quad (2.2.13)$$

Είναι $I(t=0) = E/R$ σε $I(t \rightarrow \infty) = 0$.

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$V_C(t) = \frac{Q}{C} = E(1 - e^{-t/RC}). \quad (2.2.14)$$

Είναι $V_C(t=0) = 0$ σε $V_C(t \rightarrow \infty) = E$.

Σταθερά χρόνου

Το γινόμενο

$$\tau = RC \quad (2.2.15)$$

ονομάζεται *χωρητική σταθερά χρόνου* και δίνει τον τυπικό χρόνο φόρτισης και εκφόρτισης του πυκνωτή. Παρατηρούμε ότι το γινόμενο RC έχει μονάδες χρόνου.

Εκφόρτιση πυκνωτή

Όταν απομονωθεί η E από το κύκλωμα ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Έχουμε

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (2.2.16)$$

με λύση

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}, \quad (2.2.17)$$

όπου $Q_0 = CV_0$ είναι το αρχικό φορτίο του πυκνωτή. Η λύση παριστάνει εκφόρτιση του πυκνωτή από $Q(t=0) = Q_0$ σε $Q(t \rightarrow \infty) = 0$.

Το ρεύμα είναι

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}. \quad (2.2.18)$$

Παράδειγμα 2.2.5. Ένα αυτοκίνητο φορτίζεται ενώ κινείται στο οδόστρωμα. Εκφορτίζεται μέσω των ελαστικών όταν σταματά. Άρα το αμάξιμα δρα ως πυκνωτής (ο άλλος οπλισμός είναι το έδαφος). Έστω $C = 500$ pF η χωρητικότητα του συστήματος και $R_{\text{tire}} = 100$ GΩ η αντίσταση κάθε ελαστικού. Επίσης, η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στο αμάξιμα και το έδαφος είναι $V = 30$ kV όταν το αυτοκίνητο σταματήσει. Πόσος χρόνος απαιτείται για να εκφορτιστεί σε ενέργεια μικρότερη από μία κρίσιμη τιμή, έστω $U_{\text{fire}} = 50$ mJ; [Για αυτή την ενέργεια υποθέτουμε ότι υπάρχει κίνδυνος σπινθήρα].

Λύση. Η συνολική αντίσταση των ελαστικών είναι

$$\frac{1}{R} = \sum_1^4 \frac{1}{R_{\text{tire}}} \Rightarrow R = R_{\text{tire}} = \frac{R}{4}.$$

Η ενέργεια στον πυκνωτή είναι

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(Q_0 e^{-t/RC})^2}{2C} = \frac{(CV_0)^2}{2C} e^{-2t/RC} = \frac{CV_0^2}{2} e^{-2t/RC}.$$

Άρα,

$$e^{-2t/RC} = \frac{2U}{CV_0^2} \Rightarrow t = \frac{RC}{2} \ln \left(\frac{CV_0^2}{2U} \right).$$

Για $U = U_{\text{fire}}$ είναι

$$t = \frac{RC}{2} \ln \left(\frac{CV_0^2}{2U_{\text{fire}}} \right) = 9.4 \text{ sec.}$$

□

2.2.7 Σύγχρονες εφαρμογές: Memristors

Η λέξη memristor φτιάχεται με συγχώνευση των λέξεων memory (μνήμη) και resistor (αντιστάτης) και χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τον Leon Chua το 1971. Αυτός θεώρησε ότι στα υπάρχοντα ηλεκτρικά στοιχεία θα πρέπει να προστεθεί άλλο ένα το οποίο θα συνδέει το συνολικό διερχόμενο φορτίο με την αντίσταση του κυκλώματος. Δηλαδή η αντίσταση του κυκλώματος θα σχετίζεται με το φορτίο το οποίο θα έχει διέλθει, άρα το κύκλωμα θα έχει μνήμη αυτού του φορτίου. Η σχέση που ορίζει ένα κύκλωμα με memristor είναι

$$V = M(q)I$$

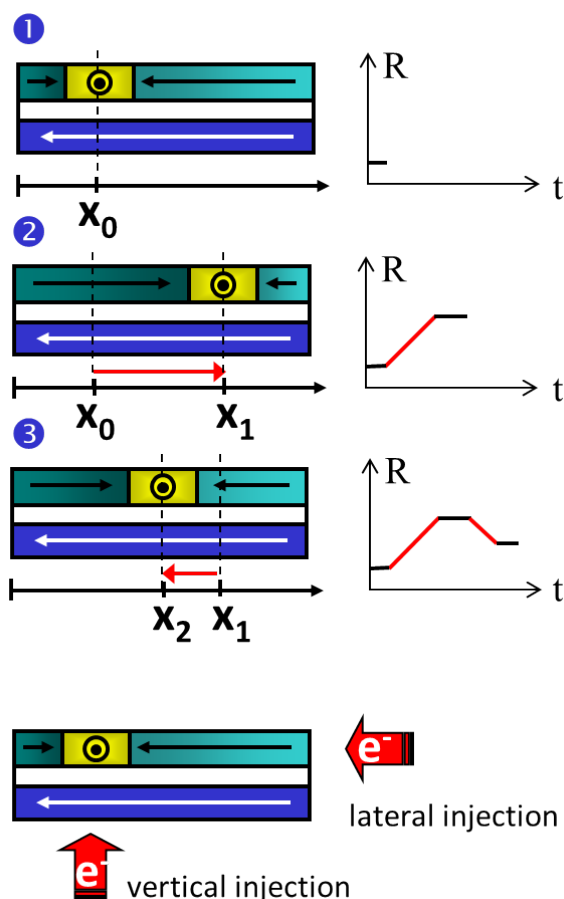
όπου V είναι η διαφορά δυναμικού, I το ρεύμα, M η σταθερά αναλογίας (αντίσταση) και q το φορτίο που έχει διέλθει.

Spin-torque memristor

Έχουμε μια κατασκευή με τρία επίπεδα στα οποία το επάνω και το κάτω είναι από μαγνητικά υλικά (δείτε σχήμα 2.5). Το κάτω μαγνητικό υλικό είναι πάντα πλήρως μαγνητισμένο. Το επάνω υλικό είναι μαγνητικό και έχει δύο μαγνητικές περιοχές αντίθετης μαγνήτισης. Ρεύμα μπορεί να περνάει κάθετα στα επίπεδα με αποτέλεσμα το σχετικό μέγεθος των μαγνητικών περιοχών να μεταβάλλεται. Οι μαγνητικές περιοχές μεταβάλλονται μόνο κατά τον χρόνο που περνάει ρεύμα. Όταν δεν περνάει ρεύμα οι μαγνητικές περιοχές δεν μεταβάλλονται. Μπορούμε να γράψουμε ότι η θέση x της ενδιάμεσης περιοχής η οποία χωρίζει τις δύο περιοχές μαγνήτισης (και η οποία λέγεται μαγνητικό τείχος) είναι

$$x \sim I \Delta t = q.$$

Η αντίσταση της κατασκευής εξαρτάται από το σχετικό μέγεθος των δύο αντίθετων μαγνητικών περιοχών στον επάνω μαγνήτη. Αυτό προκύπτει από το φαινόμενο Giant MagnetoResistance (GMR).



Σχήμα 2.5: Σχέδιο ενός spin-torque memristor. Αποτελείται από τρία επίπεδα. Αριστερά φαίνεται η κατασκευή σε τρεις διαφορετικές καταστάσεις και δεξιά φαίνεται η αντίστοιχη αντίσταση. Στο κάτω σχήμα φαίνεται ότι το ρεύμα μπορεί να εισέρχεται κάθετα στα επίπεδα, ενώ υπάρχει και η δυνατότητα για ρεύμα κατά μήκος του επάνω επιπέδου. Πηγή: Julie Grollier.

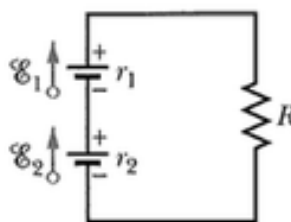
2.2.8 Ασκήσεις

Φροντιστηρίου

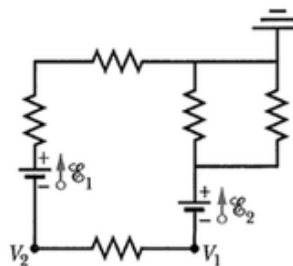
Άσκηση 2.2.1.

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 2.2.2. Η μπαταρία $E_1 = 12.0\text{ V}$ έχει εσωτερική αντίσταση $r_1 = 0.016\Omega$ και η $E_2 = 12.0\text{ V}$ έχει εσωτερική αντίσταση $r_2 = 0.012\Omega$. Οι μπαταρίες συνδέονται σε σειρά με αντίσταση R . (α) Ποιά τιμή της R μηδενίζει τη διαφορά δυναμικού στα άκρα μίας εκ των μπαταριών; (β) Ποιά μπαταρία είναι αυτή;

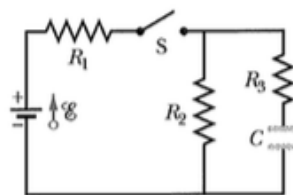


Άσκηση 2.2.3. Οι ιδανικές μπαταρίες έχουν $E_1 = 5.0 \text{ V}$ και $E_2 = 12 \text{ V}$, κάθε αντίσταση είναι $R = 2.0 \Omega$ και το δυναμικό ορίζεται μηδέν στο γειωμένο σημείο του κυκλώματος. Πόσο είναι το δυναμικό (α) V_1 και (β) V_2 στα σημειωμένα σημεία;



Άσκηση 2.2.4. Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $E = 1.2 \text{ kV}$, $C = 6.5 \mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 0.73 \text{ M}\Omega$. Ο πυκνωτής C είναι αρχικά ($t = 0$) πλήρως εκφορτισμένος και ξαφνικά ο διακόπτης κλείνει. (α) Βρείτε το φορτίο στον πυκνωτή $Q = Q(t)$ για $t \geq 0$. (β) Τη στιγμή $t = 0$ πόσο είναι το ρεύμα I_1 στην R_1 , το ρεύμα I_2 στην R_2 και το ρεύμα I_3 στην R_3 ; (γ) Για $t = \infty$, πόσο είναι το I_1 , το I_2 και

το I_3 ; (δ) Σχεδιάστε το $Q = Q(t)$. (ε) Πόση είναι η διαφορά δυναμικού V_2 στα άκρα της R_2 ;



Συμπληρωματικές

Άσκηση 2.2.5. [1] ασκ Η6.62)

Άσκηση 2.2.6. [1] ασκ Η6.39)

Κεφάλαιο 3

Μαγνητισμός

3.1 Μαγνητικά πεδία

3.1.1 Εισαγωγή

Μαγνητικά πεδία χρησιμοποιούνται για την εγγραφή στους σκληρούς δίσκους υπολογιστών, για τον έλεγχο στα μηχανήματα αναπαραγωγής CD, DVD, στις τηλεοράσεις, τηλέφωνα κ.α.

Παρατήρηση 3.1.1. *Ενώ το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από ηλεκτρικά φορτία, δεν συμβαίνει κάτι αντίστοιχο για το μαγνητικό πεδίο, δηλαδή, αυτό δεν δημιουργείται από μαγνητικά φορτία.*

Παρατήρηση 3.1.2. *Μαγνητικά πεδία δημιουργούνται από κινούμενα ηλεκτρικά φορτία.*

Σε κάθε υλικό υπάρχει κίνηση φορτίου (ηλεκτρονίων) στα άτομα, όμως η κίνηση αυτή δεν είναι συγχρονισμένη για όλα τα άτομα και έτσι τα ατομικά μαγνητικά πεδία που δημιουργούνται αλληλοαναιρούνται.

Σε ορισμένα υλικά, τα μαγνητικά πεδία των κινούμενων ηλεκτρονίων σε κάθε άτομο, προστίθενται και έτσι δημιουργείται ένα μετρήσιμο μαγνητικό πεδίο από το υλικό. Τέτοια υλικά είναι οι σιδηρομαγνήτες. Υπάρχουν και μία σειρά άλλα υλικά των οποίων το μαγνητικό πεδίο είναι πιο περίπλοκο από ό,τι των σιδηρομαγνητών.

Παρατήρηση 3.1.3. (Γραμμές μαγνητικού πεδίου) *Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα μαγνητικά πεδία με γραμμές πεδίου, σε αναλογία με τις γραμμές ηλεκτρικού πεδίου. Όταν έχουμε έναν μαγνήτη οι γραμμές μαγνητικού πεδίου ξεκινούν από τον βόρειο πόλο του μαγνήτη και καταλήγουν στον νότιο πόλο. Λέμε ότι έχουμε ένα μαγνητικό δίπολο.*

3.1.2 Μαγνητική δύναμη

Ας θεωρήσουμε ότι μπορεί να ορισθεί ένα μαγνητικό πεδίο \vec{B} σε μία περιοχή. Το μαγνητικό πεδίο δρα σε ηλεκτρικά φορτία όμως θα δούμε όμως ότι η χρήση του για την εύρεση της κίνησης των φορτίων διαφέρει δραστικά από αυτή για το ηλεκτρικό πεδίο.

Η δύναμη που ασκείται σε κινούμενο σωματίο εξαρτάται από την κατεύθυνση της ταχύτητάς του:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.1.1)$$

Άρα, αν η ταχύτητα είναι παράλληλη στο \vec{B} η δύναμη είναι μηδέν και αν η ταχύτητα είναι κάθετη στο \vec{B} η δύναμη είναι μέγιστη.

Παρατήρηση 3.1.4. Η δύναμη \vec{F}_B που ασκείται σε κινούμενο σωματίο είναι κάθετη στην ταχύτητά του \vec{v} και στο μαγνητικό πεδίο \vec{B} . Η δύναμη βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Μονάδα μαγνητικού πεδίου

$$1 \text{ Tesla} = 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Cb} \cdot \text{m/sec}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Παράδειγμα 3.1.1. Το μαγνητικό πεδίο της Γης, κοντά στην επιφάνειά της είναι 10^{-4} T . \square

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα μαγνητικά πεδία με γραμμές πεδίου, σε αναλογία με τις γραμμές ηλεκτρικού πεδίου. Όταν έχουμε έναν μαγνήτη, ο οποίος δημιουργεί μαγνητικά πεδία, οι γραμμές ξεκινούν από τον βόρειο πόλο του μαγνήτη και καταλήγουν στον νότιο πόλο. Λέμε ότι έχουμε ένα μαγνητικό δίπολο.

Παράδειγμα 3.1.2. Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = 1.2 \text{ mT}$ έχει κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα πάνω. Ένα πρωτόνιο με κινητική ενέργεια $K = 5.3 \text{ MeV}$ εισέρχεται στον εργαστηριακό θάλαμο, κινούμενο οριζόντια από το νότο προς τον βορρά. Ποιά μαγνητική δύναμη εκτροπής δρα στο πρωτόνιο καθώς εισέρχεται στον θάλαμο;

Λύση. Η ταχύτητα του πρωτονίου \vec{v} είναι κάθετη στο \vec{B} . Είναι

$$K = \frac{1}{2} m_p v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m_p}} = \sqrt{\frac{2(5.3 \times 10^6 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} = 3.2 \times 10^7 \text{ m/sec}.$$

Η μαγνητική δύναμη είναι

$$F_B = e v B \sin \phi = (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(3.2 \times 10^7 \text{ m/sec})(1.2 \times 10^{-3} \text{ T})(\sin 90^\circ) = 6.1 \times 10^{-15} \text{ N}.$$

Η διεύθυνση της \vec{F}_B είναι κάθετη στο \vec{B} και στην \vec{v} , άρα κείται στην ευθεία ανατολής-δύσης. Με τον κανόνα του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι κατευθύνεται από δύση προς ανατολή.

Παρατηρήστε ότι αν το φορτίο ήταν αρνητικό η κατεύθυνση της δύναμης θα ήταν αντίθετη, δηλαδή, από ανατολή προς δύση.

\square

3.1.3 Κίνηση κυκλότρου

Θεωρούμε ένα σωματίο μάζας m με φορτίο q το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση ομογενούς μαγνητικού πεδίου

$$\vec{B} = B\vec{k}.$$

Έστω ότι το σωματίο κινείται επάνω στο επίπεδο xy . Ασκείται δύναμη $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ και οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qB v_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qB v_x, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

και σε απλούστερη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega_c v_y \\ \dot{v}_y &= -\omega_c v_x. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

όπου

$$\omega_c = \frac{qB}{m}. \quad (3.1.4)$$

Παράδειγμα 3.1.3. Δείξτε ότι το μέτρο της ταχύτητας δεν αλλάζει κατά την κίνηση φορτίου σε μαγνητικό πεδίο.

Λύση.

$$\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \left(\frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} \right) = 0.$$

□

Για να γίνει σαφής η μορφή αυτής της εξίσωσης γράφουμε τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας ως μία μιγαδική μεταβλητή

$$v = v_x + iv_y, \quad (3.1.5)$$

για την οποία έχουμε την εξίσωση κίνησης

$$\dot{v} + i\omega_c v = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-i(\omega_c t + \delta)}, \quad (3.1.6)$$

όπου οι v_0, δ είναι πραγματικές σταθερές. Η ταχύτητα \vec{v} μεταβάλλεται περιοδικά και η v_0 δίνει το σταθερό μέτρο της ταχύτητας.

Οι συντεταγμένες θέσης δίνονται από τις

$$x(t) = x_0 + R \sin(\omega_c t + \delta), \quad y(t) = y_0 + R \cos(\omega_c t + \delta), \quad R = \frac{v_0}{\omega_c}. \quad (3.1.7)$$

Η κίνηση είναι κυκλική γύρω από τη θέση (x_0, y_0) την οποία μπορούμε να θέσουμε στην αρχή των αξόνων $(0, 0)$. Η συχνότητα περιστροφής είναι ω_c και αυτή είναι ανεξάρτητη του μέτρου της ταχύτητας v_0 καθώς και της ακτίνας της κυκλικής κίνησης R .

Παρατήρηση 3.1.5. Η ακτίνα της κυκλικής κίνησης R είναι ανάλογη της ταχύτητας του σωματίου v_0 και αντιστρόφως ανάλογη του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου B .

Παρατήρηση 3.1.6. Κύκλωτρο: είναι συσκευή επιτάχυνσης φορτισμένων σωματιίων η οποία εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι τα σωματίια κάνουν κυκλική κίνηση σε ένα κάθετο στο επίπεδο κίνησης μαγνητικό πεδίο.

3.1.4 Το φαινόμενο Hall

Έστω μία ταινία αγωγού πλάτους d στα άκρα της οποίας υπάρχει διαφορά δυναμικού και άρα την ταινία διαρρέει ρεύμα I . Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα ρεύματος είναι

$$J = (ne)v_d$$

όπου v_d η ταχύτητα των φορτίων.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι στην περιοχή της ταινίας υπάρχει ένα μαγνητικό πεδίο \vec{B} το οποίο έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της ταινίας. Ο Edwin H. Hall παρατήρησε το 1879 ότι η μαγνητική δύναμη $F_B = (e)v_d$ θα εκτρέψει τα κινούμενα ηλεκτρόνια προς τη μία πλευρά της ταινίας. Οπότε θα έχουμε συγκέντρωση των αρνητικών κινούμενων φορτίων από τη μία πλευρά και περίσσεια θετικών φορτίων από την άλλη. Άρα θα δημιουργηθεί ένα ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} με διεύθυνση κατά την διεύθυνση του πλάτους του αγωγού. Η δημιουργούμενη διαφορά δυναμικού θα είναι

$$V_H = Ed. \quad (3.1.8)$$

Η μαγνητική και η δημιουργούμενη ηλεκτρική δύναμη έχουν αντίθετες φορές, άρα θα έχουμε ισορροπία (θα σταματήσει η εγκάρσια κίνηση των ηλεκτρονίων) όταν

$$eE = ev_d B \Rightarrow v_d = \frac{E}{B} = \frac{V_H}{dB}. \quad (3.1.9)$$

Το ρεύμα που θα έχουμε τότε είναι

$$I = JA = (ne)v_d(d\ell) \Rightarrow I = (ne)\ell \frac{V_H}{B}. \quad (3.1.10)$$

όπου ℓ το πάχος του αγωγού και $A = d\ell$ η επιφάνεια διατομής του. Μπορούμε να μετρήσουμε το ρεύμα I σε έναν αγωγό και τη διαφορά δυναμικού στις δύο πλευρές του και να ελέγξουμε αυτό το αποτέλεσμα.

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί στις μορφές

$$V_H = \frac{BI}{nle} \quad \text{και} \quad n = \frac{BI}{V_H \ell e}. \quad (3.1.11)$$

Παρατήρηση 3.1.7. Με μετρήσεις ρεύματος και διαφοράς δυναμικού μπορούμε να βρούμε την πυκνότητα φορέων ηλεκτρικού ρεύματος σε έναν αγωγό.

3.1.5 Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό

Θεωρούμε έναν ευθύ αγωγό μήκους L τον οποίο διαρρέει ρεύμα I και ο οποίος βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο κάθετο στον αγωγό. Στα φορτία, που κινούνται με ταχύτητα v_d , ασκείται δύναμη $F_B = qv_d B$. Το κάθε φορτίο διέρχεται από τον αγωγό σε χρόνο $t = L/v_d$. Το σύνολο των φορτίων που διέρχονται από τον αγωγό σε κάθε στιγμή είναι

$$q = It = I \frac{L}{v_d} \quad (3.1.12)$$

και η συνολική δύναμη που ασκείται σε αυτά είναι

$$F_B = qv_d B = I \frac{L}{v_d} v_d B = ILB. \quad (3.1.13)$$

Αυτή είναι η δύναμη που ασκείται από μαγνητικό πεδίο B σε ρευματοφόρο αγωγό.

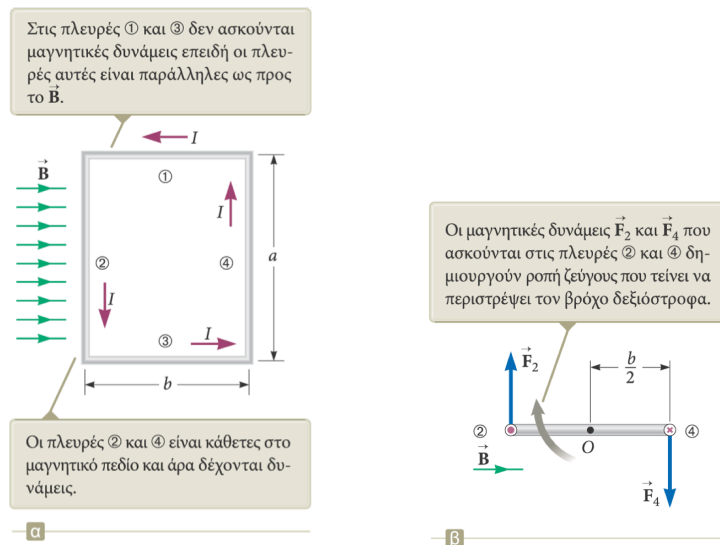
Αν το \vec{B} δεν είναι κάθετο στον αγωγό τότε

$$\vec{F}_B = I \vec{L} \times \vec{B}, \quad (3.1.14)$$

όπου \vec{L} είναι διάνυσμα με μήκος ίσο με τον αγωγό και διεύθυνση όπως το ρεύμα. Η δύναμη σε κάθε τμήμα του αγωγού $d\vec{L}$ είναι

$$d\vec{F}_B = I d\vec{L} \times \vec{B}. \quad (3.1.15)$$

Παρατήρηση 3.1.8. Μπορούμε να μετρήσουμε τη δύναμη Lorentz που ασκεί ένα μαγνητικό πεδίο στα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας, μετρώντας τη μηχανική δύναμη που ασκείται στον αγωγό.



Σχήμα 3.1: Το μαγνητικό πεδίο είναι στο επίπεδο του βρόγχου. Από [1].

3.1.6 Ροπή σε βρόγχο ρεύματος

Έστω ένας βρόγχος σχήματος ορθογωνίου με πλευρές μήκους a, b ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I και βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο \vec{B} .

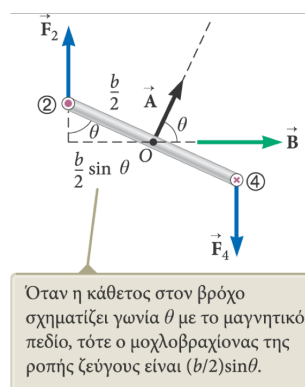
Στις πλευρές 1, 3 δεν ασκείται μαγνητική δύναμη, διότι $\vec{L} \times \vec{B} = 0$. Οι πλευρές 2, 4 είναι κάθετες στο \vec{B} και ασκούνται δυνάμεις $F_2 = F_4 = IaB$ με αντίθετες κατευθύνσεις. Η συνολική δύναμη είναι μηδέν.

Οι ροπές των F_2 και F_4 προστίθενται. Άρα, δημιουργείται ολική ροπή

$$\tau = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = 2(IaB) \frac{b}{2} = I(ab)B. \tag{3.1.16}$$

Αν θέσουμε $A = ab$ την επιφάνεια του βρόγχου, τότε

$$\tau = I A B. \tag{3.1.17}$$



Σχήμα 3.2: Η επιφάνεια του βρόγχου σχηματίζει γωνία θ με το μαγνητικό πεδίο. Από [1].

Αν το διάνυσμα \vec{A} το κάθετο στον βρόγχο σχηματίζει γωνία θ με το \vec{B} , τότε στις πλευρές 1 και 3 ασκούνται δυνάμεις ίσες και αντίθετες. Η συνολική ροπή ως προς το κέντρο του

βρόγχου είναι επίσης μηδέν, διότι οι δυνάμεις είναι παράλληλες στον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του βρόγχου.

Στις πλευρές 2 και 4 ασκούνται δυνάμεις $F_2 = F_4 = IaB$ ίσες και αντίθετες. Η συνολική ροπή ως προς το κέντρο του βρόγχου είναι

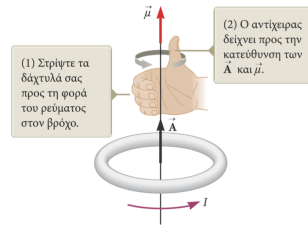
$$\tau = (IaB) \frac{b}{2} \sin \theta + (IaB) \frac{b}{2} \sin \theta = IabB \sin \theta = IAB \sin \theta. \quad (3.1.18)$$

σε διανυσματική μορφή

$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}, \quad (3.1.19)$$

Παρατήρηση 3.1.9. Η ροπή σε ρευματοφόρο βρόγχο τείνει να τον φέρει σε θέση ώστε το \vec{A} να έχει την ίδια διεύθυνση με το πεδίο \vec{B} .

Αν ο βρόγχος είναι κάθετος στο \vec{B} τότε οι τέσσερες δυνάμεις που ασκούνται στις πλευρές έχουν κατεύθυνση προς τα έξω (για κάθε πλευρά) και μέτρο $F_1 = F_3 = IbB$, $F_2 = F_4 = IaB$. Η συνολική δύναμη και η συνολική ροπή είναι μηδέν.



Σχήμα 3.3: Από [1].

Παρατήρηση 3.1.10. Η κατεύθυνση του $I\vec{A}$ βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως στο σχήμα.

Αν έχουμε ένα πηνίο με N βρόγχους τότε $\tau = (NI)B \sin \theta$. Στα πηνία η διεύθυνση του ρεύματος αντιστρέφεται περιοδικά ώστε η ροπή τείνει συνεχώς να περιστρέφει το πηνίο.

3.1.7 Μαγνητική διπολική ροπή

Αφού ο βρόγχος δέχεται δυνάμεις από το μαγνητικό πεδίο θα τον ονομάσουμε μαγνήτη και ειδικότερα μαγνητικό δίπολο. Ορίζουμε τη μαγνητική διπολική ροπή ως

$$\vec{\mu} = I\vec{A} \quad (3.1.20)$$

και βλέπουμε ότι η ροπή που δέχεται είναι

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (3.1.21)$$

Αυτό μπορούμε να το συγκρίνουμε με την ροπή που δέχεται ένα ηλεκτρικό δίπολο σε ηλεκτρικό πεδίο: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Παρατήρηση 3.1.11. Η διεύθυνση της ροπής είναι τέτοια ώστε η μαγνητική διπολική ροπή να στραφεί ώστε να γίνει παράλληλη σε διεύθυνση και φορά με το μαγνητικό πεδίο.

Η ενέργεια μαγνητικού διπόλου (σε πλήρη αναλογία με την ενέργεια ηλεκτρικού διπόλου) είναι

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (3.1.22)$$

Το δίπολο έχει ελάχιστη ενέργεια όταν η $\vec{\mu}$ είναι παράλληλη στο πεδίο \vec{B} και μέγιστη όταν είναι αντιπαράλληλη.

3.1.8 Ασκήσεις

Φροντιστηρίου

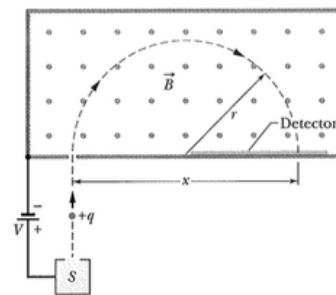
Άσκηση 3.1.1. (Φίλτρο ταχυτήτων) Φορτισμένο σωματίο κινείται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, π.χ., $\vec{E} = E\vec{i}$ και κάθετο σε αυτό μαγνητικό πεδίο, π.χ., $\vec{B} = B\vec{k}$. Ποιά πρέπει να είναι η ταχύτητα του σωματίου $\vec{v} = v\vec{j}$ ώστε αυτή να παραμένει σταθερή;

Άσκηση 3.1.2. (Φασματογράφος μάζας)

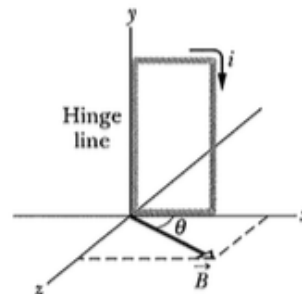
Άσκηση 3.1.3. Ποιά είναι η κίνηση σωματίου σε σταθερό μαγνητικό πεδίο \vec{B} όταν το σωματίο μπορεί να κινείται στον χώρο (στις τρεις διαστάσεις);

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 3.1.4. Ένα ιόν μάζας m και φορτίου $q = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ παράγεται από μία πηγή S (όπως στο σχήμα). Το ιόν επιταχύνεται από διαφορά δυναμικού $V = 10^3 \text{ V}$ και ακολούθως εισέρχεται σε μαγνητικό πεδίο $B = 2 \times 10^4 \text{ mT}$ κάθετο στο επίπεδο της κίνησης. Το ιόν κάνει ημικυκλική τροχιά και χτυπάει τον ανιχνευτή στη θέση $x = 1.6254 \text{ m}$ από το σημείο εισόδου του. Βρείτε τη μάζα m του σωματίου.



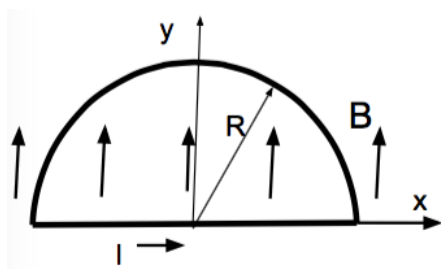
Άσκηση 3.1.5. Ένα πηνίο έχει $N = 20$ περιελίξεις σε ορθογώνιο σχήμα με πλευρές $a = 10 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$. Διαρρέεται από ρεύμα $I = 0.10 \text{ A}$ και είναι προσδεμένο στη μία μεγάλη του πλευρά. Το επίπεδο του ορθογωνίου σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με τη διεύθυνση μαγνητικού πεδίου \vec{B} μέτρου $B = 0.50 \text{ T}$. Ποιά είναι η ροπή στο πηνίο ως προς την προσδεσμένη πλευρά;



Άσκηση 3.1.6. Βρείτε την ενέργεια μαγνητικού διπόλου $\vec{\mu}$ το οποίο βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο \vec{B} .

Άσκηση 3.1.7. Ένα χάλκινο έλασμα ορθογώνιας διατομής, με πλάτος $a = 1.5 \text{ cm}$ και πάχος $b = 0.10 \text{ cm}$, διαρρέεται από ρεύμα $I = 5.0 \text{ A}$. Βρείτε την τάση Hall που παράγεται από ένα μαγνητικό πεδίο $B = 1.2 \text{ T}$ κάθετο στο έλασμα. [Υπόδειξη: για να βρείτε την πυκνότητα φορέων, υποθέστε ότι κάθε άτομο χαλκού συνεισφέρει ένα ηλεκτρόνιο αγωγιμότητας. Αριθμός Avogadro $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, πυκνότητα χαλκού $\rho = 8920 \text{ kg/m}^3$, μάζα ενός mol χαλκού $M_{\text{mol}} = 0.0635 \text{ kg/mol}$.]

Άσκηση 3.1.8. Ένα σύρμα κάμπτεται σε ημικυκλικό σχήμα ακτίνας R και σχηματίζει ένα κλειστό κύκλωμα το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I . Το σύρμα βρίσκεται στο επίπεδο xy και είναι μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\vec{j}$. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο ευθύγραμμο μέρος του σύρματος και εκείνης που ασκείται στο καμπυλόγραμμο τμήμα του.



Συμπληρωματικές

Άσκηση 3.1.9. Δέσμη πρωτονίων κινείται με ταχύτητα v σε μαγνητικό πεδίο. ...Ποιά η δύναμη σε πρωτόνιο της δέσμης;

Άσκηση 3.1.10. Θεωρήστε σωματίο το οποίο κινείται στο επίπεδο xy και βρίσκεται υπό την επίδραση ομογενών μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου:

$$\vec{E} = E\vec{i}, \quad \vec{B} = B\vec{k}.$$

(α) Ποιά η ταχύτητά του και η θέση του ως συναρτήσεις του χρόνου.

(β) Βρείτε τη θέση του με αριθμητικό υπολογισμό. [Υπόδειξη: δείτε το τροχοειδές και το κυκλοειδές.]

3.2 Μαγνητικά πεδία από ρεύματα

3.2.1 Νόμος Biot-Savart

Τα κινούμενα ηλεκτρικά φορτία δημιουργούν μαγνητικό πεδίο, άρα ένα ρεύμα I δημιουργεί μαγνητικό πεδίο \vec{B} . Θεωρούμε έναν αγωγό ο οποίος περιγράφεται από καμπύλη \vec{s} και ένα σημείο P στον χώρο. Το πείραμα δείχνει ότι από ένα τμήμα $d\vec{s}$ ρευματοφόρου αγωγού δημιουργείται μαγνητικό πεδίο

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (3.2.1)$$

όπου \vec{r} είναι το διάνυσμα από το $d\vec{s}$ στο P . Η σταθερά

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad (3.2.2)$$

ονομάζεται *μαγνητική διαπερατότητα*.

Οι πειραματικές παρατηρήσεις που περιγράφει ο νόμος Biot-Savart είναι

- Το μέτρο του $d\vec{B}$ είναι αντιστρόφως ανάλογο του r^2 .
- Το μέτρο του $d\vec{B}$ είναι ανάλογο του ρεύματος I και του μήκους ds του στοιχειώδους τμήματος του αγωγού.
- Στο διάνυσμα $d\vec{B}$ είναι κάθετο τόσο στο $d\vec{s}$ όσο και στο διάνυσμα \hat{r} .
- Το μέτρο του $d\vec{B}$ είναι ανάλογο του $\sin \theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα $d\vec{s}$ και \hat{r} .

Παρατήρηση 3.2.1. Το ολικό μαγνητικό πεδίο \vec{B} είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων $d\vec{B}$ από τα τμήματα $d\vec{s}$ του αγωγού.

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (3.2.3)$$

Μαγνητικό πεδίο άπειρου ευθύγραμμου αγωγού

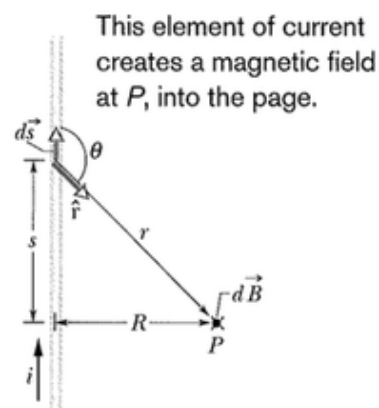
Σε σημείο P σε απόσταση R από τον αγωγό έχουμε, από στοιχείο ds ,

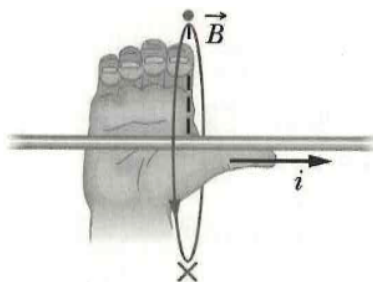
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin \theta}{r^2}. \quad (3.2.4)$$

Αν ο αγωγός και το P είναι επάνω στη σελίδα τότε η διεύθυνση του \vec{B} είναι κάθετη στη σελίδα, για κάθε $d\vec{s}$.

Το ολικό πεδίο είναι

$$B = 2 \int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta ds}{r^2}. \quad (3.2.5)$$



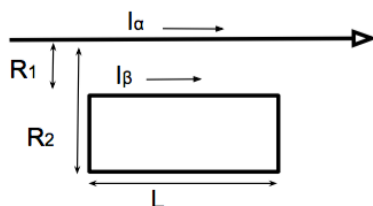


Σχήμα 3.4: Για να βρούμε τη διεύθυνση του \vec{B} χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού. Πηγή: [2] (study guide).

Είναι $\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = R/\sqrt{s^2 + R^2}$, οπότε

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left[\frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (3.2.6)$$

Παράδειγμα 3.2.1. Ποιά η μαγνητική δύναμη στον βρόγχο από τον ευθύγραμμο αγωγό; [Θεωρούμε: $I_s = 8 \text{ A}$, $I_\ell = 6 \text{ A}$ και $L = 41 \text{ cm}$, $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 12.6 \text{ cm}$.]



Σχήμα 3.5: Από [2] study guide.

Λύση. Μαγνητικό πεδίο:

$$B_{\text{top}} = \frac{\mu_0 I_s}{2\pi R_1}, \quad B_{\text{bottom}} = \frac{\mu_0 I_s}{2\pi R_2}$$

με διεύθυνση προς τα μέσα στη σελίδα.

Η δύναμη στον επάνω αγωγό είναι

$$F_{\text{top}} = I_\ell L B_{\text{top}}$$

και έχει διεύθυνση προς τα επάνω. Η δύναμη F_{bottom} έχει διεύθυνση προς τα κάτω. Η συνολική δύναμη (στις μεγάλες πλευρές του βρόγχου) είναι

$$F = F_{\text{top}} - F_{\text{bottom}} = I_\ell L (B_{\text{top}} - B_{\text{bottom}}) = \frac{\mu_0 I_\ell L}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 2.4 \times 10^{-5} \text{ N}.$$

Οι δυνάμεις στις δύο μικρές πλευρές του βρόγχου είναι ίσες και αντίθετες.

□

Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου βρόγχου

Στο κέντρο C κυκλικού βρόγχου ακτίνας R ένα τμήμα ds του κυκλικού βρόγχου παράγει πεδίο

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \sin(90^\circ)}{R^2}. \quad (3.2.7)$$

Το ολικό πεδίο είναι

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (3.2.8)$$

Για να βρούμε τη διεύθυνση του \vec{B} χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού: ο αντίχειρας στη διεύθυνση του ρεύματος (σε οποιοδήποτε τμήμα του βρόγχου), οπότε τα λυγισμένα δάκτυλα δείχνουν τη διεύθυνση του \vec{B} . Εναλλακτικός τρόπος είναι να δείχνουμε με τα λυγισμένα δάκτυλα στη διεύθυνση του ρεύματος, οπότε ο αντίχειρας δείχνει προς το \vec{B} στο κέντρο του βρόγχου.

Μαγνητικό πεδίο κινούμενου φορτίου

Ένα φορτίο q το οποίο κινείται με ταχύτητα v δημιουργεί μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (3.2.9)$$

Θα δούμε πώς αυτό συνδέεται με τον νόμο Biot-Savart.

Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα ρεύματος από φορτία κινούμενα με ταχύτητα v είναι $J = nqv$. Άρα το ρεύμα σε αγωγό διατομής A είναι $I = nqAv$, άρα $I ds = nqA ds v = dQ v$. Θεωρήσαμε ότι τα \vec{v} και $d\vec{s}$ είναι συγγραμμικά και επίσης θέσαμε $dQ = nq A ds$ το φορτίο στο τμήμα ds . Ο νόμος Biot-Savart γίνεται

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ \vec{v} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (3.2.10)$$

3.2.2 Δύναμη μεταξύ δύο παράλληλων ρευμάτων

Έστω δύο μακριοί ευθύγραμμοι και παράλληλοι ρευματοφόροι αγωγοί με ρεύματα I_a, I_b . Ας βρούμε τη δύναμη που ασκείται στον αγωγό b από τον αγωγό a . Το μαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο του b είναι

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d} \quad (3.2.11)$$

όπου d η απόσταση μεταξύ των αγωγών. Η διεύθυνση του \vec{B}_a είναι κάθετη στον b . Η δύναμη στον b είναι

$$\vec{F}_{ba} = I_b \vec{L} \times \vec{B}_a, \quad (3.2.12)$$

όπου \vec{L} είναι ένα τμήμα του αγωγού b . Έχει μέτρο

$$F_{ba} = I_b L B_a = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d} \quad (3.2.13)$$

και διεύθυνση από τον έναν αγωγό προς τον άλλον.

Δύναμη ανά μονάδα μήκους αγωγού

$$\frac{F_{ba}}{L} = \frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi d} \quad (3.2.14)$$

Παρατήρηση 3.2.2. Δύο παράλληλα ρεύματα έλκονται αν έχουν την ίδια φορά και απωθούνται αν έχουν αντίθετη φορά.

3.2.3 Νόμος του Ampere

Αν έχουμε μία κατανομή ρεύματος τότε δημιουργείται μαγνητικό πεδίο \vec{B} το οποίο, επάνω σε μία κλειστή διαδρομή C , ικανοποιεί τον νόμο του Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (3.2.15)$$

όπου I_{enc} είναι το ρεύμα το οποίο περικλείεται στην C . Ο νόμος αυτός είναι, για τα ρεύματα και τα μαγνητικά πεδία, ανάλογος του νόμου Gauss για τα φορτία και τα ηλεκτρικά πεδία.

Μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού

Θεωρούμε άπειρο ευθύγραμμο αγωγό. Θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \vec{B} σε μία κυκλική διαδρομή ακτίνας r η οποία περικλείει τον αγωγό. Υποθέτουμε ότι, λόγω συμμετρίας, το \vec{B} είναι παντού κάθετο στο \vec{r} . Είναι

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r). \quad (3.2.16)$$

Ο νόμος Ampere μας δίνει

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (3.2.17)$$

όπως είχαμε βρει και με τον νόμο Biot-Savart.

Μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού

Έστω ότι ο αγωγός είναι κυλινδρικός με ακτίνα R . Εφαρμόζουμε τον νόμο Ampere σε μία κυκλική διαδρομή ακτίνας $r < R$. Είναι

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{enc}}, \quad (3.2.18)$$

όπου

$$I_{\text{enc}} = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \quad (3.2.19)$$

Έστω

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, \quad (3.2.20)$$

3.2.4 Σωληνοειδή (εφαρμογές νόμου Ampere)

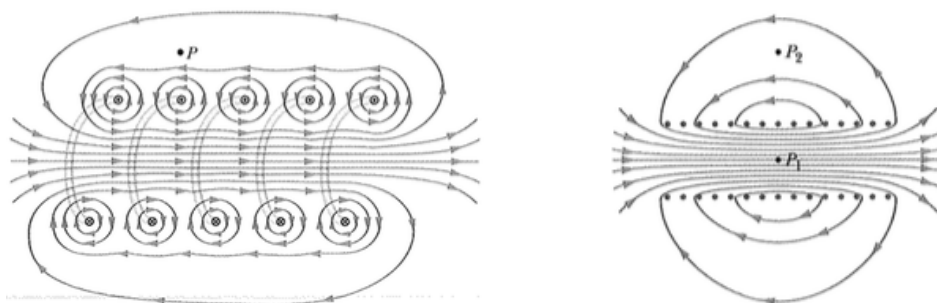
Σωληνοειδές (κυλινδρικό)

Θα μελετήσουμε αγωγό που είναι τυλιγμένος σε διαδοχικές σπείρες και λέγεται σωληνοειδές.

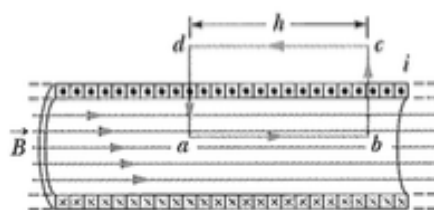
Το πεδίο εντός του σωληνοειδούς είναι κατά τον άξονά του και εκτός του σωληνοειδούς είναι πολύ μικρό. Για ένα ιδανικό σωληνοειδές απείρου μήκους είναι ομογενές εντός και μηδέν εκτός του σωληνοειδούς.

Εφαρμόζουμε τον νόμο Ampere σε ένα τέλειο (άπειρο) σωληνοειδές με n σπείρες ανά μονάδα μήκους. Θεωρούμε ορθογώνιο το οποίο περικλείει αρκετές σπείρες. Στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ συνεισφέρει μόνο η πλευρά ab . Είναι $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bh$ και $I_{\text{enc}} = I(nh)$, άρα

$$Bh = \mu_0 I(nh) \Rightarrow B = \mu_0 I n. \quad (3.2.21)$$



Σχήμα 3.6: (Αριστερά) Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς, κάπως τεντωμένου. (Δεξιά) Πεδίο σωληνοειδούς πεπερασμένου μήκους. Από [2].



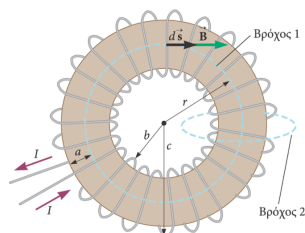
Σχήμα 3.7: Εφαρμογή νόμου Ampere σε τέλει σωληνοειδές. Από [2].

Δακτυλιοειδές πηνίο

Θεωρούμε σωληνοειδές με N σπείρες το οποίο έχει καμφθεί ώστε να έχει το σχήμα ενός τόρου. Για την εφαρμογή του νόμου Ampere παίρνουμε κυκλική διαδρομή ακτίνας r εντός του σωληνοειδούς:

$$B(2\pi r) = \mu_0 IN \Rightarrow B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi} \frac{1}{r}. \tag{3.2.22}$$

Το πεδίο δεν είναι σταθερό, αλλά αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης. Το πεδίο είναι μηδέν εκτός του σωληνοειδούς.

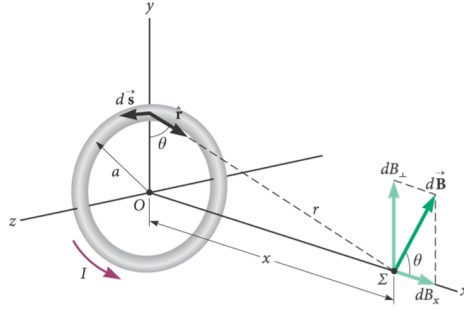


Σχήμα 3.8: Δακτυλιοειδές πηνίο. Από [1].

3.2.5 Το κυκλικό ρεύμα ως μαγνητικό δίπολο

Έχουμε δει ότι ένας κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός δέχεται ροπή $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ από εξωτερικό πεδίο \vec{B} , άρα έχει συμπεριφορά μαγνητικού διπόλου.

Ας δούμε το πεδίο που δημιουργεί στον άξονα που διέρχεται από τον κέντρο του. Το πεδίο από κάθε στοιχείο ds έχει δύο συνιστώσες: μία παράλληλη στο άξονα dB_x και μία



Σχήμα 3.9: Πεδίο κυκλικού ρεύματος. Από [1].

κάθετη dB_{\perp} . Οι κάθετες συνιστώσες δίνουν μηδέν αν αθροίσουμε τις συνεισφορές από όλον τον κύκλο, λόγω συμμετρίας. Από τον νόμο Biot-Savart, βρίσκουμε το ολικό πεδίο, αθροίζοντας τις dB_x :

$$B = \int dB_x. \quad (3.2.23)$$

Είναι $dB_x = dB \cos \theta$, όπου

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I ds}{r^2} \quad (3.2.24)$$

και $\cos \theta = a/r$. Άρα

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I a}{r^3} ds = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} ds \quad (3.2.25)$$

και

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int ds = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (3.2.26)$$

Για μακρινές αποστάσεις $x \gg a$ έχουμε

$$B(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3}. \quad (3.2.27)$$

Έχουμε ορίσει τη μαγνητική διπολική ροπή ως $\mu = IA = I(\pi a^2)$ με φορά κάθετη στην επιφάνεια του βρόγχου. Ώστε έχουμε

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{x^3}. \quad (3.2.28)$$

Το πεδίο του κυκλικού ρεύματος δίνει μαγνητικό πεδίο παρόμοιο με αυτό ενός ραβδόμορφου μαγνήτη.

Το κλασικό μοντέλο του ατόμου

Στην κλασική εικόνα για το άτομο, το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα v γύρω από τον πυρήνα, σε απόσταση r .

Άρα έχουμε ρεύμα

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (3.2.29)$$

Παρατηρούμε ότι η μαγνητική ροπή είναι $\mu = IA = \frac{1}{2}evr$ και η στροφορμή του είναι $L = m_e v r$, άρα

$$\mu = \frac{e}{2m_e} L. \quad (3.2.30)$$



Σχήμα 3.10: Από [4].

Στην κβαντική φυσική η στροφορμή L είναι κβαντισμένο μέγεθος, άρα το ίδιο συμβαίνει και για τη μαγνητική διπολική ροπή ατόμου.

Τα ηλεκτρόνια έχουν και μία ιδιότητα η οποία λέγεται σπιν και μοιάζει με ιδιοπεριστροφή. Είναι κβαντισμένο μέγεθος και προσδίδει μία μαγνητική διπολική ροπή στο ηλεκτρόνιο:

$$\mu_{\text{spin}} = \frac{eh}{2m_e}, \quad h : \text{σταθερά του Planck.} \quad (3.2.31)$$

3.2.6 Νόμος Gauss στον μαγνητισμό

Ροή μαγνητικού πεδίου

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (3.2.32)$$

Παράδειγμα 3.2.2. Έστω ομογενές πεδίο \vec{B} και ένα επίπεδο με εμβαδό A . Αν το επίπεδο σχηματίζει γωνία θ με το \vec{B} τότε η ροή που διέρχεται από αυτό είναι

$$\Phi_B = BA \cos \theta.$$

Αν το επίπεδο είναι κάθετο στο \vec{B} τότε $\Phi_B = BA$. □

Παρατήρηση 3.2.3. Οι μαγνητικές γραμμές σχηματίζουν κλειστούς βρόγχους.

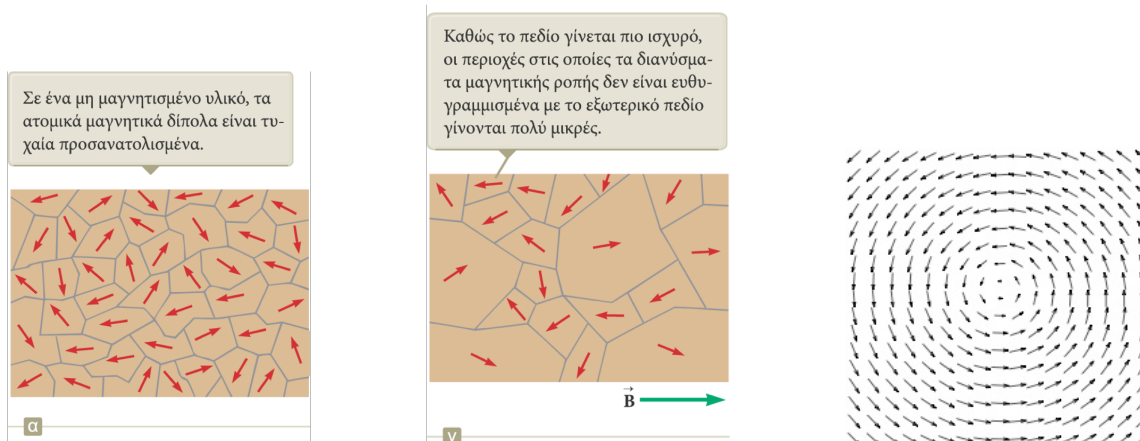
Παρατήρηση 3.2.4. (Νόμος Gauss στον μαγνητισμό) Η μαγνητική ροή που διέρχεται από μία κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (3.2.33)$$

3.3 Σύγχρονες εφαρμογές: Μαγνητικά υλικά

Μερικά υλικά έχουν ισχυρές μαγνητικές ιδιότητες οι οποίες είναι γνωστές ως σιδηρομαγνητισμός. Τα άτομα των υλικών αυτών έχουν μαγνητικές ροπές οι οποίες τείνουν να ευθυγραμμίζονται ακόμα και με την επίδραση ασθενών εξωτερικών πεδίων.

Κάθε περιοχή περιλαμβάνει πολλά άτομα. Άρα, οι δυνάμεις που ασκούνται στο μικροσκοπικό επίπεδο δημιουργούν δομές σε μεσοσκοπική κλίμακα. Πρόκειται για ένα πρόβλημα πολλαπλών κλιμάκων, σημαντικό στα μαθηματικά.



Σχήμα 3.11: (Αριστερά) Μαγνητικές περιοχές σε σιδηρομαγνήτη. Από [1]. (Μέσον) Μαγνητικές περιοχές σε σιδηρομαγνήτη υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Από [1]. (Δεξιά) Μία ειδική διάταξη μαγνητικών περιοχών η οποία ονομάζεται μαγνητική δίνη.

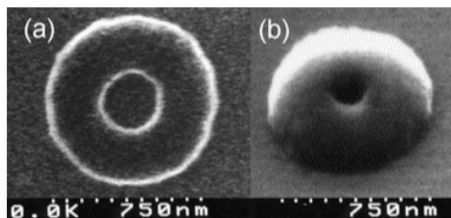


Figure 3. Ring structures of different diameters $d_{int} = 100$ nm (a) and 200 nm (b) made from thinner (200 nm thickness) resist.

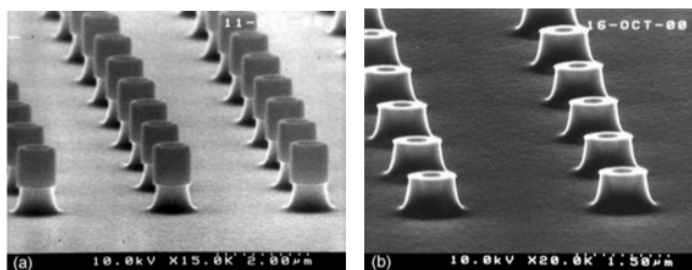


Figure 4. Conventional RIE of silicon rings: (a) an etched ring feature before removal of the resist mask and (b) after removal of the resist mask.

Σχήμα 3.12: Μαγνητικά σωματριά διαστάσεων κάτω του 1μm. Από το άρθρο M. Kläui et al, J. Phys.: Condens. Matter 15, R985 (2003).

3.3.1 Ασκήσεις

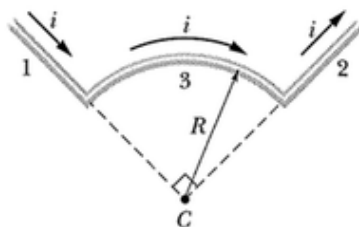
Φροντιστηρίου

Άσκηση 3.3.1. Από τον νόμο Biot-Savart για κινούμενα φορτία εξάγετε τον νόμο Biot-Savart για ρεύματα.

Άσκηση 3.3.2. (Δυνάμεις μεταξύ κινούμενων πρωτονίων) Δύο πρωτόνια με φορτία q κινούνται παράλληλα στον άξονα x σε αντίθετες κατευθύνσεις $\vec{v} = \pm v\hat{i}$ με ίδιο μέτρο ταχύτητας. Την στιγμή που βρίσκονται στις θέσεις $(0, \mp d/2)$, ποιά είναι η ηλεκτρική και η μαγνητική δύναμη μεταξύ τους.

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 3.3.3. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο \vec{B} στο σημείο C το οποίο δημιουργεί ρεύμα I το οποίο διαρρέει αγωγό ο οποίος αποτελείται από τόξο ακτίνας R και γωνίας $\pi/2$ και από δύο ευθύγραμμους αγωγούς (όπως στο σχήμα).



Άσκηση 3.3.4. Κοντά σε ευθύγραμμο σύρμα μεγάλου μήκους το οποίο φέρει ρεύμα I , υπάρχει ορθογώνιος βρόγχος πλάτους a και μήκους b . Το σύρμα έχει διεύθυνση κατά το μήκος του βρόγχου και τέμνει τις πλευρές στο πλάτος του. Η απόσταση του σύρματος από την πλησιέστερη πλευρά είναι c . Βρείτε τη συνολική μαγνητική ροή από τον βρόγχο λόγω του ρεύματος στο σύρμα.

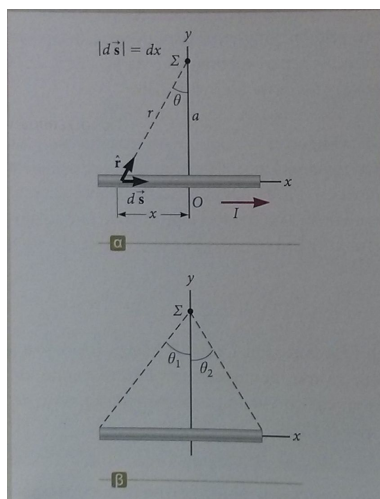
Άσκηση 3.3.5. Στο επίπεδο του εδάφους βρίσκονται δύο σύρματα άπειρου μήκους, σε απόσταση $a = 1.0\text{ cm}$ το ένα από το άλλο και διαρρέονται από ρεύματα I_2 ίσου μέτρου και ίδιας φοράς. Ένα τρίτο σύρμα μήκους $L = 10.0\text{ m}$ και μάζας $m = 400\text{ gr}$ διαρρέεται από ρεύμα $I_1 = 100\text{ A}$ φοράς αντίθετης των I_2 και αιωρείται επάνω από τα δύο πρώτα σε οριζόντια θέση στο μέσον της μεταξύ τους απόστασης. Πόσο πρέπει να είναι το I_2 ώστε τα τρία σύρματα να σχηματίζουν τρίσημο διατομής ισόπλευρου τριγώνου;

Άσκηση 3.3.6. Ευθύγραμμος αγωγός μήκους $L = 13.6\text{ cm}$ διαρρέεται από ρεύμα $I = 0.693\text{ A}$. Πόσο είναι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται σε σημείο P το οποίο βρίσκεται σε κάθετη απόσταση $R = 25.1\text{ cm}$ από το ένα άκρο του αγωγού;

Συμπληρωματικές

Άσκηση 3.3.7. Θεωρήστε λεπτό ευθύγραμμο σύρμα κατά μήκος του άξονα x που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I . Βρείτε το μαγνητικό πεδίο \vec{B} που δημιουργείται σε ένα σημείο στον χώρο.

Άσκηση 3.3.8. Πόσο είναι το μέτρο της μαγνητικής διπολικής ροπής σωληνοειδούς με $N = 200$ σπείρες που έχει διάμετρο $d = 10\text{ cm}$ και διαρέεται από ρεύμα $I = 0.30\text{ A}$;



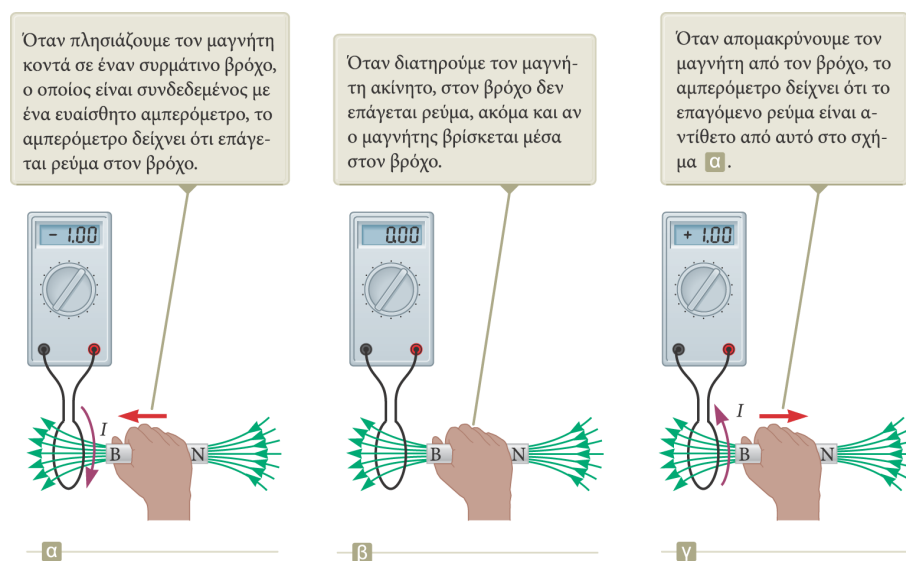
Scanned by CamScanner

Άσκηση 3.3.9. Ένας κούφιος κυλινδρικός αγωγός με εξωτερική ακτίνα a και εσωτερική ακτίνα b διαρρέεται από ομοιόμορφα κατανεμημένο ρεύμα I . Βρείτε το μαγνητικό πεδίο $B(r)$. [Υπόδειξη: εφαρμόστε τον νόμο Ampere.]

Άσκηση 3.3.10.

3.4 Μαγνητική επαγωγή

3.4.1 Πειραματικές παρατηρήσεις



Σχήμα 3.13: Από [1].

3.4.2 Χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο

Θεωρούμε έναν αγωγίμο βρόγχο και πεδίο \vec{B} το οποίο διέρχεται από αυτόν.

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που προκύπτει από μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δίνεται από τον νόμο του Faraday για την επαγωγή

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3.4.1)$$

Για πηνίο με N σπείρες έχουμε

$$E = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3.4.2)$$

Αν υποθέσουμε βρόγχο επιφάνειας A και ομογενές πεδίο \vec{B} υπό γωνία θ ως προς την επιφάνεια του βρόγχου

$$E = -\frac{d}{dt}(BA \cos \theta) \quad (3.4.3)$$

Παράδειγμα 3.4.1. (Παραγωγή ήχου από ηλεκτρική κιθάρα) □

3.4.3 ΗΕΔ λόγω κίνησης

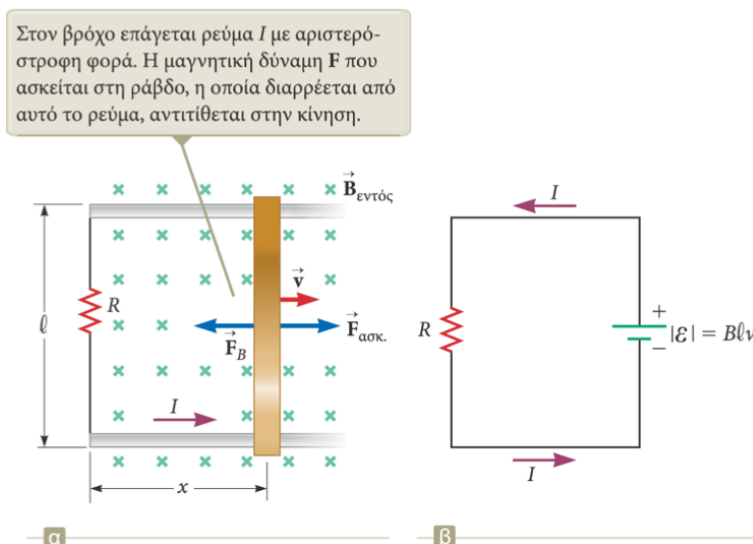
Θεωρούμε αγωγό που κινείται μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο. Ο αγωγός έχει μήκος ℓ και το πεδίο \vec{B} είναι κάθετο σε αυτόν. Αν ο αγωγός κινείται (κάθετα στη διεύθυνσή του και στο \vec{B}) με ταχύτητα v τότε τα ηλεκτρόνια στον αγωγό δέχονται δύναμη $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Κινούνται προς τη μία άκρη του αγωγού και τελικά έχουμε ηλεκτρικό πεδίο E , τέτοιο ώστε

$$qE = qvB \Rightarrow E = vB. \quad (3.4.4)$$

Διαφορά δυναμικού

$$\Delta V = E\ell = Blv. \quad (3.4.5)$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο αγωγός είναι τμήμα κλειστής διαδρομής, τότε έχουμε επαγόμενο ρεύμα στο κύκλωμα.



Σχήμα 3.14: From [1]

Ας δούμε τη μαγνητική ροή μέσα από το πλαίσιο:

$$\Phi_B = Blx. \quad (3.4.6)$$

Ο νόμος Faraday δίνει

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Blv. \quad (3.4.7)$$

Το επαγόμενο ρεύμα

$$I = \frac{|E|}{R} = \frac{Blv}{R}. \quad (3.4.8)$$

Παράδειγμα 3.4.2. Μία αγώγιμη ράβδος μήκους ℓ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα σταθερού μέτρου ω ως προς άξονα κάθετο στο ένα άκρο της. Υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} κάθετο στο επίπεδο περιστροφής. Βρείτε την ΗΕΔ που επάγεται λόγω κίνησης μεταξύ των δύο άκρων της.

Λύση. Αν τμήμα dr κινείται με ταχύτητα v τότε

$$dE = Bv dr.$$

Συνολική ΗΕΔ

$$E = B \int v dr = B\omega \int_0^\ell r dr = \frac{1}{2}B\omega\ell^2.$$

□

3.4.4 Κανόνας του Lenz

Παρατήρηση 3.4.1. Το επαγόμενο ρεύμα σε έναν βρόγχο έχει φορά τέτοια ώστε να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο το οποίο αντιτίθεται στη μεταβολή της μαγνητικής ροής που διαπερνά τον βρόγχο.

3.4.5 Ηλεκτρικό πεδίο και ΗΕΔ από επαγωγή

Παρατήρηση 3.4.2. Το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} είναι μη συντηρητικό.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3.4.9)$$

Παράδειγμα 3.4.3. (Ηλεκτρικό πεδίο που επάγεται από μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς)

□

3.4.6 Δινορεύματα

3.4.7 Ασκήσεις

Φροντιστηρίου

Άσκηση 3.4.1. Αγώγιμη ράβδος κινείται χωρίς τριβές πάνω σε δύο παράλληλους αγώγιμους οδηγούς. Οι οδηγοί συνδέονται με ακίνητη ράβδο στο ένα άκρο τους ώστε το σύστημα των δύο οδηγών, της ακίνητης και της κινούμενης ράβδου σχηματίζουν κύκλωμα σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το σύστημα είναι μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B το οποίο κατευθύνεται προς τα μέσα στη σελίδα (στο επίπεδο του παραλληλογράμμου). Η ράβδος έχει μάζα m , μήκος ℓ και παρουσιάζει αντίσταση R . Δίνουμε στη ράβδο αρχική ταχύτητα v_i και την αφήνουμε ελεύθερη. Βρείτε την ταχύτητά της συναρτήσει του χρόνου [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τους νόμους Νεύτωνα. Στη ράβδο ασκείται δύναμη από το πεδίο B .]

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 3.4.2. Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\vec{k}$ περιορίζεται εντός κυλινδρικού όγκου ακτίνας R . Το μέτρο του \vec{B} μειώνεται με σταθερό ρυθμό. Πόση είναι η αρχική επιτάχυνση ενός ηλεκτρονίου που απελευθερώνεται σε ένα σημείο σε απόσταση r από το κέντρο του κυλίνδρου;

Άσκηση 3.4.3. Δύο παράλληλοι συρμάτινοι βρόγχοι έχουν κοινό άξονα. Ο μεγάλος βρόγχος έχει ακτίνα R και ο μικρότερος βρόγχος με ακτίνα r βρίσκεται επάνω από τον μεγάλο σε απόσταση $x \gg R$. Ο μεγάλος βρόγχος διαρρέεται από ρεύμα I και υποθέτουμε ότι το x αυξάνει με σταθερό ρυθμό $dx/dt = v$. Βρείτε (α) τη μαγνητική ροή διαμέσου του μικρού βρόγχου, (β) την επαγόμενη ΗΕΔ. [Υπόδειξη: Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο στον μικρό βρόγχο είναι σχεδόν ομογενές.]

Συμπληρωματικές

Άσκηση 3.4.4. Ένα πηνίο με $N = 120$ σπείρες, ακτίνας $r_c = 1.8$ cm και αντίστασης $R = 5.3 \Omega$, είναι ομοαξονικό με σωληνοειδές των $n = 220$ σπειρών/cm και ακτίνας $r_s = 1.6$ cm. Το ρεύμα στο σωληνοειδές μειώνεται από $I_s = 1.5$ A σε μηδέν μέσα σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 25$ ms. Πόσο είναι το επαγόμενο ρεύμα στο πηνίο στη διάρκεια του Δt ;

Άσκηση 3.4.5.

3.5 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

3.5.1 Ρεύμα μετατόπισης και νόμος Ampere

Αν στο κύκλωμα υπάρχει πυκνωτής τότε είναι δυνατόν να θεωρήσουμε κλειστή διαδρομή η οποία οριοθετεί επιφάνειες τις οποίες είτε διαπερνά ρεύμα (αν οι επιφάνειες τέμνουν τον αγωγό) είτε δεν τις διαπερνά (αν η επιφάνεια περνά ανάμεσα από τις πλάκες του πυκνωτή). Ο νόμος του Ampere θα έδινε αντιφατικά αποτελέσματα.

Ο Maxwell πρόσθεσε έναν ακόμα όρο στον νόμο Ampere, που ονομάζεται ρεύμα μετατόπισης:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (3.5.1)$$

και έχουμε τον νόμο Ampere=Maxwell

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (3.5.2)$$

Παράδειγμα 3.5.1. Το φορτίο πυκνωτή δίνεται από

$$Q = \epsilon_0 \Phi_E.$$

Το ρεύμα στο κύκλωμα είναι

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Το ρεύμα μετατόπισης είναι

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt}.$$

Άρα, $I = I_d$.

Αν E είναι το πεδίο εντός των οπλισμών και A η επιφάνεια του πυκνωτή, το ρεύμα μετατόπισης γράφεται και ως ($\Phi_E = AE$)

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt}.$$

□

Παρατήρηση 3.5.1. Το I_d δημιουργείται από μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Δηλαδή, μαγνητικά πεδία δημιουργούνται τόσο από ρεύματα όσο και από μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία.

Παράδειγμα 3.5.2. Στα άκρα επίπεδου πυκνωτή $C = 8 \mu\text{F}$ εφαρμόζεται ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη τάση συχνότητας $f = 3 \text{ kHz}$ με πλάτος $\Delta V_{\text{max}} = 30 \text{ V}$. Βρείτε το ρεύμα μετατόπισης στον πυκνωτή.

Λύση. Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = 1.88 \times 10^4 \text{ sec}^{-1}.$$

Η τάση είναι

$$V_c = \Delta V_{\text{max}} \sin \omega t.$$

Ρεύμα μετατόπισης

$$I_d = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C V_c) = C \frac{dV_c}{dt} = C \Delta V_{\text{max}} \cos \omega t = 4.52 \cos \omega t.$$

□

3.5.2 Εξισώσεις Maxwell

Νόμος Gauss

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3.5.3)$$

Νόμος Gauss για μαγνητισμό

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (3.5.4)$$

Νόμος Ampere-Maxwell

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (3.5.5)$$

Νόμος Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (3.5.6)$$

Παρατήρηση 3.5.2. Οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού δίνουν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Αυτά είναι συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου, δηλαδή μπορεί να είναι μη-ομογενή και χρονομεταβαλλόμενα: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ και $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$.

Όλοι οι παραπάνω νόμοι είναι σε ολοκληρωτική μορφή. Ας πάρουμε τον νόμο του Gauss και ας εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης:

$$\oint_{\text{surface}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{volume}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV. \quad (3.5.7)$$

Υποθέτουμε ότι το ολικό φορτίο Q προέρχεται από μία κατανομή φορτίου στον χώρο με πυκνότητα ρ . Έχουμε

$$\int_{\text{volume}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \int_{\text{volume}} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) dV. \quad (3.5.8)$$

Αφού αυτό ισχύει σε οποιονδήποτε όγκο πρέπει οι ολοκληρωταίες να είναι ίσες:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (3.5.9)$$

Αυτός είναι ο νόμος Gauss σε διαφορική μορφή.

Παρατήρηση 3.5.3. Οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού μπορούν να γραφούν σε διαφορική μορφή και λέγονται εξισώσεις του Maxwell.

3.5.3 Επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Από τις εξισώσεις του Maxwell προκύπτει διάδοση του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου υπό μορφή κυμάτων.

Θα δούμε μία συγκεκριμένη περίπτωση. Έστω διάδοση κατά μήκος του άξονα x . Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = E(x - vt)\hat{y} \quad \vec{B} = B(x - vt)\hat{z}. \quad (3.5.10)$$

Εφαρμόζουμε τον νόμο Faraday $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d\Phi_B/dt$, σε ορθογώνιο πλάτους Δx και ύψους ℓ στο επίπεδο xy . Διατρέχουμε αριστερόστροφα το ορθογώνιο και θεωρούμε το Δx είναι πολύ μικρό:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \approx E(x + \Delta x)\ell - E(x)\ell \approx \ell \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x. \quad (3.5.11)$$

Η μαγνητική ροή $\Phi_B = B\ell\Delta x$, άρα

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \ell \Delta x \left. \frac{dB}{dt} \right|_{x \text{ const}} = \ell \Delta x \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (3.5.12)$$

Παίρνουμε

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (3.5.13)$$

Θεωρούμε την 4η εξίσωση Maxwell $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 (d\Phi_E/dt)$. Σε ορθογώνιο στο επίπεδο xz με πλάτος Δx και ύψος ℓ είναι (παίρνουμε φορά διαγραφής ώστε η κάθετη στο επίπεδο να είναι προς τον \hat{y})

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \approx B(x)\ell - B(x + \Delta x)\ell \approx -\ell \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x. \quad (3.5.14)$$

Η ηλεκτρική ροή $\Phi_E = E\ell\Delta x$, άρα

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \ell \Delta x \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (3.5.15)$$

Παίρνουμε

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (3.5.16)$$

Από τις δύο εξισώσεις που εξαγάγαμε

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right)$$

Ώστε έχουμε

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (3.5.17)$$

Με παρόμοιο τρόπο εξάγουμε

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \quad (3.5.18)$$

Παρατήρηση 3.5.4. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν την κυματική εξίσωση με ταχύτητα

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (3.5.19)$$

Βρίσκουμε την τιμή

$$c = \dots = 2.997 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (3.5.20)$$

Μία απλή λύση των εξισώσεων είναι

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t) \quad (3.5.21)$$

$$B = B_0 \cos(kx - \omega t). \quad (3.5.22)$$

Πρέπει

$$\frac{\omega}{k} = c. \quad (3.5.23)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= -kE_0 \sin(kx - \omega t) \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \omega B_0 \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

ώστε έχουμε την συνθήκη

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow kE_0 = \omega B_0 \Rightarrow \frac{E_0}{B_0} = c. \quad (3.5.24)$$

3.5.4 Ασκήσεις

Φροντιστηρίου

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 3.5.1. Το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο σε ακτινική απόσταση $r = 6 \text{ mm}$ από τον κεντρικό άξονα ενός επίπεδου πυκνωτή με κυκλικούς οπλισμούς είναι $B = 2 \times 10^{-7} \text{ T}$. Οι οπλισμοί έχουν ακτίνα $R = 3 \text{ mm}$. Με τι ρυθμό μεταβάλλεται το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς;

Άσκηση 3.5.2. Να δείξετε ότι το ρεύμα μετατόπισης σε έναν επίπεδο πυκνωτή C μπορεί να γραφεί ως $I_d = C(dV/dt)$.

Άσκηση 3.5.3.

Συμπληρωματικές

Άσκηση 3.5.4.

Κεφάλαιο 4

Φως και οπτική

4.1 Αρχές γεωμετρικής οπτικής

4.1.1 Εισαγωγή

- Το φως έχει κυματικές ιδιότητες: φαινόμενα συμβολής (αρχή υπέρθεσης).
- Επίσης, έχει σωματιδιακές ιδιότητες (φωτοηλεκτρικό φαινόμενο).
- Επίπεδα κύματα.
- Σφαιρικά κύματα.

Παρατήρηση 4.1.1. Στη γεωμετρική οπτική αναπαριστούμε το ηλεκτρομαγνητικό κύμα με μία ακτίνα.

- **Βιβλιογραφία.** Serway, παράγραφος O1.1, O1.3 (ειδικά σχήμα 1.4)

4.1.2 Ανάκλαση

Γωνία θ ως προς την κάθετο στην πρόσπτωση

$$\theta' = \theta. \quad (4.1.1)$$

Παράδειγμα 4.1.1. (Serway, παράδειγμα O1.2) Διπλή ανάκλαση ακτίνας φωτός.

- **Βιβλιογραφία.** Serway, παράγραφος O1.4

□

4.1.3 Διάθλαση

Νόμος διάθλασης

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (4.1.2)$$

Γεωμετρικά

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (4.1.3)$$

Άρα θα έχουμε $f = v/\lambda \Rightarrow f_1 = f_2$.

Παρατήρηση 4.1.2. Η συχνότητα του φωτός στο μέσο είναι ίδια με αυτή στο κενό.

Ορισμός. Δείκτης διάθλασης

$$n = \frac{c}{v}. \quad (4.1.4)$$

Εξαρτάται από την ταχύτητα στο μέσο και είναι $n > 1$.

Νόμος διάθλασης Snell

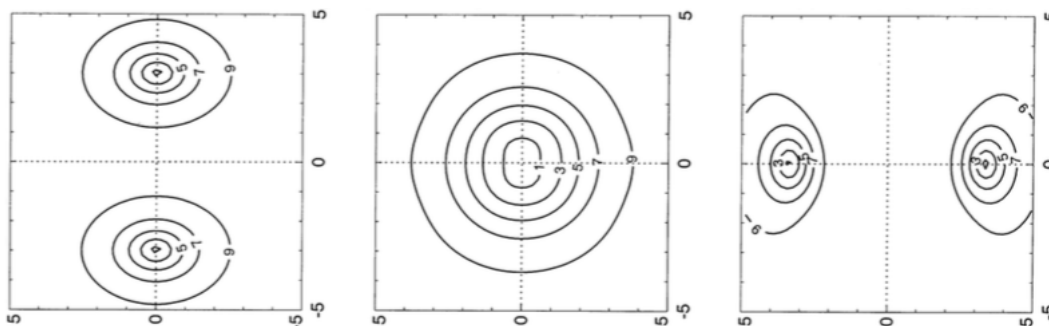
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (4.1.5)$$

Παράδειγμα 4.1.2. (Serway παράδειγμα O1.4) Διέλευση φωτός μέσα από μία πλάκα. □

Παράδειγμα 4.1.3. (Halliday, παράγραφος 35-2, σημείο κατανόησης 1) □

Παρατήρηση 4.1.3. (Παράδειγμα από την σύγχρονη έρευνα) Η ταχύτητα του φωτός μπορεί να γίνει πάρα πολύ μικρή μέσω τεχνικών που αναπτύχθηκαν πρόσφατα (*slow light*).

Παρατήρηση 4.1.4. (Παράδειγμα από την σύγχρονη έρευνα) Μπορούμε να έχουμε σκέδαση σε 90° για σολιτονικά κύματα (*right-angle scattering of solitons*).



Σχήμα 4.1: Δύο κυματικοί (σολιτονικοί) παλμοί συγκρούονται και φαίνεται να σκεδάζονται σε γωνία 90° . Παρουσιάζονται τρεις διαδοχικές εικόνες αυτής της διαδικασίας.

• **Βιβλιογραφία.** Halliday, παράγραφος 35-2 (ο νόμος της διάθλασης), είτε Serway, παράγραφος O1.5

4.1.4 Ολική εσωτερική ανάκλαση

Για $n_2 > n_1$ μπορούμε να πετύχουμε ολική ανάκλαση για γωνία πρόσπτωσης

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.1.6)$$

• **Βιβλιογραφία.** Halliday, παράγραφος 33.9, είτε Serway, παράγραφος O1.8

4.1.5 Αρχή του Huygens

Παρατήρηση 4.1.5. Όλα τα σημεία ενός μετώπου κύματος δρουν ως σημειακές πηγές δευτερογενών σφαιρικών κυμάτων. Μετά από χρόνο t η νέα θέση του μετώπου κύματος θα είναι αυτή μίας επιφάνειας εφαπτόμενης στα δευτερογενή κύματα.

Εφαρμογή της αρχής Huygens στην ανάκλαση.

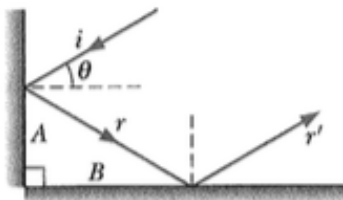
Εφαρμογή της αρχής Huygens στη διάθλαση. Δίνει

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (4.1.7)$$

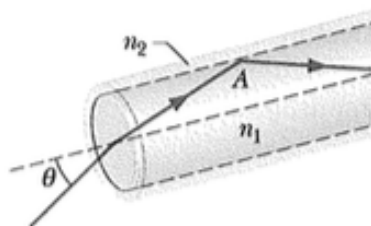
- Βιβλιογραφία. Serway, παράγραφος 01.6 (ειδικά εικόνες 01.19 και 01.20)

4.1.6 Ασκήσεις

Άσκηση 4.1.1. (Halliday ασκ 33.47) Το φως ανακλάται από δύο κάθετες μεταξύ τους ανακλαστικές επιφάνειες A και B . Να βρείτε τη γωνία μεταξύ της εισερχόμενης ακτίνας i και της εξερχόμενης r' .



Άσκηση 4.1.2. (Halliday ασκ 33.63) Το σχήμα δείχνει μία απλουστευμένη οπτική ίνα: ένας πλαστικός πυρήνας ($n_1 = 1.58$) περιβάλλεται από πλαστικό περίβλημα ($n_2 = 1.53$). Μία φωτεινή ακτίνα προσπίπτει στο λένα άκρο της ίνας υπό γωνία θ . Η ακτίνα θα υποστεί ολική ανάκλαση στο σημείο A όπου συναντάει το σύνορο πυρήνα-περίβληματος (συνεπώς δεν υπάρχει απώλεια φωτός μέσω αυτού του συνόρου). Ποιά είναι η μέγιστη τιμή της θ που επιτρέπει ολική εσωτερική ανάκλαση στο A ; [Σχετικά με οπτικές ίνες δείτε Halliday παράγραφος 33-9]



Άσκηση 4.1.3. Halliday ασκηση 33.75

4.2 Κυματική συμβολή

4.2.1 Εισαγωγή

Ισχύει η αρχή της επαλληλίας κυμάτων όταν αυτά βρεθούν στην ίδια θέση στον χώρο.

Παρατήρηση 4.2.1. Δύο κύματα μπορούν να έχουν ενισχυτική είτε καταστρεπτική συμβολή.

- Αν η διαφορά δύο κυμάτων που συμβάλλουν είναι (ακέραιος) λ έχουμε ενισχυτική συμβολή.
- Αν η διαφορά δύο κυμάτων που συμβάλλουν είναι $\phi = (\text{περιττός})(\lambda/2)$ έχουμε καταστρεπτική συμβολή.

Αν έχουμε δύο κύματα $E_1 = E_0 \cos(kx - \omega t)$, $E_2 = E_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$ τότε η συμβολή τους δίνει

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right). \quad (4.2.1)$$

- Αν η διαφορά φάσης είναι $\phi = (\text{ακέραιος})(2\pi)$ έχουμε ενισχυτική συμβολή.
 - Αν η διαφορά φάσης είναι $\phi = (\text{περιττός})\pi$ έχουμε καταστρεπτική συμβολή.
- **Βιβλιογραφία.** Halliday, παράγραφος 35-6 (απόδειξη των Εξ. 35-22 και 35-23)

4.2.2 Το πείραμα συμβολής του Young

Υποθέτουμε δύο σχισμές σε απόσταση d και ανίχνευση σε ένα επίπεδο σε απόσταση $D \gg d$. Η διαφορά στις διαδρομές των ακτίνων από τις δύο σχισμές είναι

$$\Delta L = d \sin \theta, \quad (4.2.2)$$

όπου θ η γωνία παρατήρησης.

Έχουμε κροσσούς συμβολής

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{μέγιστα - φωτεινοί κροσσοί} \quad (4.2.3)$$

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{ελάχιστα - σκοτεινοί κροσσοί} \quad (4.2.4)$$

Παράδειγμα 4.2.1. (Halliday, ενδεικτικό πρόβλημα 35-2) Απόσταση μεταξύ διαδοχικών ελαχίστων στο πείραμα του Young κοντά στο κέντρο του σχηματισμού συμβολής.

Λύση. Θεωρούμε $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ για $\theta \ll 1$.

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}.$$

όπου d η απόσταση μεταξύ των σχισμών και D η απόσταση των σχισμών από το επίπεδο παρατήρησης.

□

- **Βιβλιογραφία.** Halliday, παράγραφος 35-4

4.2.3 Οπτικά κύματα στην ύλη

Ακτίνα που ταξιδεύει σε υλικό μήκους L μετρά τον ακόλουθο αριθμό μηκών κυμάτων

$$N_1 = \frac{L}{\lambda} = \frac{Ln}{\lambda}. \quad (4.2.5)$$

Δύο ακτίνες που ξεκινούν με την ίδια φάση, ταξιδεύουν ίδια απόσταση L σε δύο διαφορετικά υλικά n_1, n_2 έχουν στην έξοδο διαφορά φάσης

$$N_2 - N_1 = \frac{L}{\lambda}(n_2 - n_1). \quad (4.2.6)$$

Παράδειγμα 4.2.2. (Halliday, ενδεικτικό προβλημα 35-3) Τοποθετούμε υλικό με δείκτη διάθλασης $n = 1.5$ μπροστά από τη μία σχισμή στο πείραμα Young.

□

- **Βιβλιογραφία.** Halliday, παράγραφος 35-2 (μήκος κύματος και δείκτης διάθλασης)

4.2.4 Ένταση του φωτός που συμβάλλει (προαιρετικά)

Έστω τα ηλεκτρικά πεδία δύο κυμάτων που συμβάλλουν στο ίδιο σημείο x στον χώρο

$$E_1 = E_0 \sin \omega t \quad (4.2.7)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (4.2.8)$$

Υποθέτουμε ότι η διαφορά φάσης ϕ δεν μεταβάλλεται (τα κύματα λέγονται σύμφωνα).

Το συνολικό κύμα έχει πεδίο

$$E = E_1 + E_2 = \left(2E_0 \cos \frac{\phi}{2}\right) \sin \left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right), \quad E_a = 2E_0 \cos \frac{\phi}{2}. \quad (4.2.9)$$

Για τις εντάσεις έχουμε

$$\frac{I}{I_0} = \frac{E_a^2}{E_0^2} \Rightarrow I = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}. \quad (4.2.10)$$

Τα μέγιστα των χροσμών συμβολής βρίσκονται για

$$\frac{\phi}{2} = m\pi \quad (4.2.11)$$

Στο πείραμα Young η διαφορά φάσης είναι $\phi = 2\pi\Delta L/\lambda$ όπου $\Delta L = d \sin \theta$, άρα

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta \quad (4.2.12)$$

ώστε παίρνουμε χροσσούς συμβολής για $d \sin \theta = m\lambda$ όπως έχουμε βρει και παραπάνω.

- **Βιβλιογραφία.** Halliday, παράγραφος 35-6

4.2.5 Συμβολή από λεπτά υμένια (προαιρετικά)

- **Βιβλιογραφία.** Halliday, παράγραφος 35-7

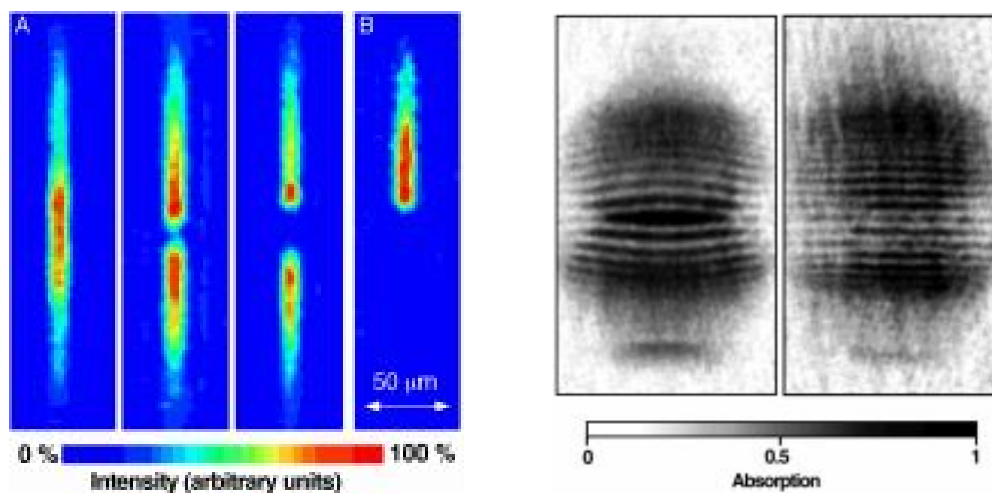
4.2.6 Το συμβολόμετρο Michelson (προαιρετικά)

- Βιβλιογραφία. *Halliday*, παράγραφος 35-8

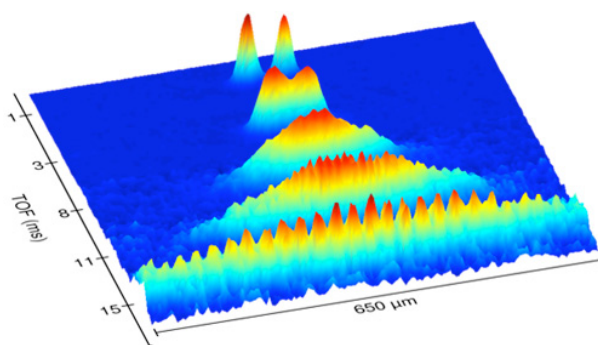
4.2.7 Συμβολή υπερ-κρύων ατόμων (Παράδειγμα από τη σύγχρονη έρευνα)

Σε νέφη ατόμων τα οποία είναι δυνατόν να ψυχθούν σε εξαιρετικά χαμηλές θερμοκρασίες μπορούμε να παρατηρήσουμε κυματική συμπεριφορά, όπως προβλέπει η κβαντική θεωρία. Αυτό έχει επιτευχθεί με άτομα Li, Na, Cs, Rb, τα οποία ψύχονται σε θερμοκρασίες $T \sim 10$ nK. Η φυσική κατάσταση στην οποία βρίσκεται η ύλη σε τέτοιες θερμοκρασίες λέγεται συμπύκνωμα Bose-Einstein (BEC).

Πειράματα συμβολής με συμπυκνώματα Bose-Einstein έχουν δείξει τις κυματικές ιδιότητες της ύλης.



Σχήμα 4.2: (Αριστερά) Δύο νέφη υπερ-κρύων ατόμων Νατρίου τα οποία βρίσκονται σε κατάσταση συμπύκνωσης Bose-Einstein. (Δεξιά) Συμβολή των δύο νεφών και παρατήρηση κροσσών συμβολής. Δείτε λεπτομέρειες [εδώ](#).



Σχήμα 4.3: Συμβολή δύο νεφών υπερ-κρύων μορίων ${}^6\text{Li}$. Δείτε λεπτομέρειες [εδώ](#).

4.2.8 Ασκήσεις

Άσκηση 4.2.1. (Serway Παράδειγμα O3.1) Μία οθόνη απέχει $D = 4.80\text{ m}$ από μία διπλή σχισμή. Η απόσταση μεταξύ των σχισμών είναι $d = 0.030\text{ mm}$. Από τη διπλή σχισμή εξέρχεται μονοχρωματικό φως και ο πρώτος φωτεινός κροσσός απέχει $y = 4.5\text{ cm}$ από το κέντρο της οθόνης. Υπολογίστε το μήκος κύματος του φωτός.

Άσκηση 4.2.2. (Serway Παράδειγμα O3.2) Μία πηγή εκπέμπει φως με δύο μήκη κύματος $\lambda_1 = 430\text{ nm}$ και $\lambda_2 = 510\text{ nm}$. Η πηγή χρησιμοποιείται στο πείραμα συμβολής με διπλή σχισμή του Young. Η απόσταση μεταξύ των σχισμών είναι $d = 0.025\text{ mm}$ και η απόσταση της οθόνης παρατήρησης από τις σχισμές είναι $D = 1.50\text{ m}$. Βρείτε την απόσταση των κροσσών τρίτης τάξης του κάθε χρώματος.

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα

5.1 Εργασίες

5.1.1 Ηλεκτρικό πεδίο και δυναμικό σημειακών φορτίων

Εργασία 5.1.1. (n φορτία) Θεωρήστε n φορτία και (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο (x, y) του επιπέδου. (β) Υπολογίστε το δυναμικό σε σημείο (x, y) του επιπέδου και κάνετε γραφική παράσταση δίνοντας τις ισοδυναμικές καμπύλες.

Εργασία 5.1.2. (Ηλεκτρικό δίπολο) Θεωρήστε ένα ηλεκτρικό δίπολο. (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο (x, y) του επιπέδου. Περιγράψτε τη μορφή του πεδίου. (β) Υπολογίστε το δυναμικό σε σημείο (x, y) του επιπέδου και κάνετε γραφική παράσταση δίνοντας τις ισοδυναμικές καμπύλες.

5.1.2 Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου

Εργασία 5.1.3. (Ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος) Μία ράβδος μήκους ℓ είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με θετικό φορτίο. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι λ και το ολικό φορτίο Q . (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο (x, y) του επιπέδου. (β) Υπολογίστε το δυναμικό σε σημείο (x, y) του επιπέδου και κάνετε γραφική παράσταση. (γ) Εξηγήστε πώς συνδέονται το πεδίο και το δυναμικό κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς.

Εργασία 5.1.4. (Ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος) Ένας δίσκος ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή κατανομή φορτίου σ . (α) Βρείτε το πεδίο που δημιουργεί. (β) Βρείτε το δυναμικό. (γ) Εξηγήστε πώς συνδέονται το πεδίο και το δυναμικό κάνοντας αναλυτικά τους σχετικούς υπολογισμούς. (δ) Εξηγήστε πώς συνδέονται τα αποτελέσματά σας με το πεδίο και δυναμικό ομοιόμορφης κατανομής φορτίου σε άπειρο επίπεδο.

5.1.3 Πυκνωτές

Εργασία 5.1.5. (Πυκνωτής και ρεύμα μετατόπισης) Το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο σε ακτινική απόσταση $r = 6 \text{ mm}$ από τον κεντρικό άξονα ενός επίπεδου πυκνωτή με κυκλικούς οπλισμούς είναι $B = 2 \times 10^{-7} \text{ T}$. Οι οπλισμοί έχουν ακτίνα $R = 3 \text{ mm}$. Με τι ρυθμό μεταβάλλεται το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς; [Υπόδειξη: εξηγήστε πλήρως, χρησιμοποιώντας (α) τη θεωρία από πυκνωτές (β) το μαγνητικό πεδίο αγωγών (γ) νόμους Maxwell.]

5.1.4 Ηλεκτρικά κυκλώματα

Εργασία 5.1.6. (Φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτή) Κατασκευάστε κύκλωμα (πολλαπλών βρόγχων) με μπαταρία, αντίσταση και πυκνωτή. Σχεδιάστε το με ένα εργαλείο που θα βρείτε. Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις για φόρτιση και εκφόρτιση του πυκνωτή.

Εργασία 5.1.7. (Memristors) Εξηγήστε τι είναι τα memristors και πώς διαφέρουν από τα συνήθη κυκλώματα. Εξηγήστε ένα παράδειγμα.

Βιβλιογραφία: Δείτε την σελίδα της Julie Grollier.

Εργασία 5.1.8. (Κύκλωμα με πυκνωτή και πηνίο) Δώστε την περιγραφή κυκλώματος με πυκνωτή και πηνίο.

Βιβλιογραφία: π.χ., [2] παράγραφοι 30-8, 30-9.

5.1.5 Μαγνητικό πεδίο και μαγνητική δύναμη

Εργασία 5.1.9. (Κίνηση φορτίου σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο κάθετα μεταξύ τους) Θεωρήστε σωματίο το οποίο κινείται στο επίπεδο xy και βρίσκεται υπό την επίδραση μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου: $\vec{E} = E\hat{z}$, $\vec{B} = B\hat{k}$. (α) Γράψτε αναλυτικά τις εξισώσεις κίνησης. (β) Βρείτε λύσεις για απλές περιπτώσεις. (γ) Βρείτε τη θέση του φορτίου $\vec{r} = \vec{r}(t)$ με αριθμητικό υπολογισμό. [Υπόδειξη: δείτε το τροχοειδές και το κυκλοειδές.]

Εργασία 5.1.10. (Κύκλωτρο) Εξηγήστε πώς λειτουργεί το κύκλωτρο για την επιτάχυνση φορτίων.

Εργασία 5.1.11. (Φασματογράφος μάζας) Εξηγήστε πώς λειτουργεί ένας φασματογράφος μάζας.

Εργασία 5.1.12. (Μαγνητικό πεδίο κινούμενου φορτίου) Ένα φορτίο q το οποίο κινείται με ταχύτητα v δημιουργεί μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (5.1.1)$$

Εξηγήστε πώς αυτό συνδέεται με τον νόμο Biot-Savart. Δώστε παραδείγματα.

Βιβλιογραφία: [3], κεφ. 28.

Εργασία 5.1.13. (Φαινόμενο Hall) Εξηγήστε το φαινόμενο Hall και εφαρμογές του.

Εργασία 5.1.14. (Εκτυπωτές inkjet) Εξηγήστε πώς λειτουργεί η τεχνολογία inkjet.

Εργασία 5.1.15. (Πεδίο μαγνητικού διπόλου) Βρείτε το πεδίο μαγνητικού διπόλου.

5.1.6 Μαγνητική επαγωγή

Εργασία 5.1.16. (ΗΕΔ από δύο βρόγχους) Δύο παράλληλοι συρμάτινοι βρόγχοι έχουν κοινό άξονα. Ο μεγάλος βρόγχος έχει ακτίνα R και ο μικρότερος βρόγχος με ακτίνα r βρίσκεται επάνω από τον μεγάλο σε απόσταση $x \gg R$. Ο μεγάλος βρόγχος διαρρέεται από ρεύμα I και υποθέτουμε ότι το x αυξάνει με σταθερό ρυθμό $dx/dt = v$. Βρείτε αριθμητικά (α) τη μαγνητική ροή διαμέσου του μικρού βρόγχου, (β) την επαγόμενη ΗΕΔ.

Εργασία 5.1.17. (Νόμοι Maxwell) Εξάγετε και περιγράψτε έναν από τους νόμους Maxwell σε διαφορική μορφή.

5.1.7 Γεωμετρική οπτική

Εργασία 5.1.18. (Συμβολή κυμάτων) Ετοιμάστε μία παρουσίαση με συμβολή ακτίνων. Δείξτε γραφικά τους νόμους συμβολής κυμάτων. Δείξτε τους κροσσούς συμβολής.

Εργασία 5.1.19. (Περίθλαση) Ετοιμάστε ένα μάθημα για την περίθλαση φωτός.

5.2 Χρήσιμες σχέσεις

- Νόμος Coulomb: $F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$.
- Ηλεκτρική διπολική ροπή: $p = qd$.
- Χωρητικότητα C πυκνωτή: $Q = C \Delta V$. Χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή: $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$
- Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου: $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.
- Πυκνότητα ρεύματος για κινούμενα φορτία: $\vec{J} = (ne)\vec{v}_e$.
- Δύναμη Lorentz: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$.
- Μαγνητικό δίπολο: $\vec{\mu} = I\vec{A}$.
- Πεδίο μαγνητικού διπόλου $\vec{\mu} = \mu\vec{i}$ επάνω στον άξονά του (x): $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{x^3}$
- Ροπή σε μαγνητικό δίπολο, ενέργεια διπόλου: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.
- Νόμος Biot-Savart: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$.
- Νόμος Gauss (στον κενό χώρο, σε διηλεκτρικό σταθεράς κ): $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\kappa\epsilon_0}$.
- Νόμος Gauss στον μαγνητισμό: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$.
- Νόμος Faraday: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_E}{dt}$
- Νόμος Ampere-Maxwell: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$.
- Νόμος διάθλασης Snell: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, $n_i = \frac{c}{v_i}$.

5.3 Σταθερές

Φορτίο, μάζα ηλεκτρονίου $e = 1.60 \times 10^{-19}$ Cb, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg.

Μάζα πρωτονίου $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg.

Διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{Cb}^2}{\text{Nm}^2}$,

Μαγνητική διαπερατότητα κενού $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T · m/A.

Βιβλιογραφία

- [1] R. A. Serway, J. W. Jewett, “Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς, Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική” (8η αμερικανική έκδοση) (Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2013)
- [2] Halliday, Resnick, Walker, “Φυσική”, τόμος Β’ (Εκδόσεις Gutenberg).
- [3] H. D. Young, R. A. Freedman, “Πανεπιστημιακή φυσική”, τόμος Β’ (2η Ελληνική Έκδοση) (Εκδόσεις Παπαζήση).