ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Λύσεις των Θεμάτων εξέτασης προόδου στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα» (ΗΥ119)

Ηράκλειο, 29 Νοεμβρίου 2009

Θέμα 1. (μονάδες 1.0)

Οι ορίζουσες των πινάκων $A,B,C\in\mathbb{R}^{8\times 8}$ είναι $\det A=-5$, $\det B=2$, $\det C=0$. Να βρεθούν οι ορίζουσες των πινάκων: $-A$, $-2A$, B^5, AB^2C, $-2(A^{-1})^T B^{-3}$

Λύση

$$\det(-A)=\det(-1A)=(-1)^8\det A=\det A=-5$$

$$\det(-2A)=(-2)^8\det A=2^8(-5)=-1280$$

$$\det(B^5)=(\det B)^5=2^5=32$$

$$\det(AB^2C)=(\det A)(\det B^2)(\det C)=0$$

$$\det\left[-2(A^{-1})^T B^{-3}\right]=(-2)^8\det\left[(A^{-1})^T(B^{-1})^3\right]=(-2)^8\det\left[(A^{-1})^T\right]\det\left[(B^{-1})^3\right]=$$

$$=(-2)^8\det(A^{-1})\left[\det(B^{-1})\right]^3=(-2)^8\frac{1}{\det A}\left(\frac{1}{\det B}\right)^3=(-2)^8\frac{1}{-5}\frac{1}{2^3}=-\frac{32}{5}$$

Θέμα 2. (μονάδες 1.0)

Εξετάστε αν υπάρχουν οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων και βρείτε τους, εφόσον υπάρχουν:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -5 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ 4 & -8\end{bmatrix}$$

Λύση

$\det A=(-3)4-(-5)2=-2\neq 0$ και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Από το γεγονός ότι ένας 2×2 πίνακας της μορφής $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ με $\det A\neq 0$ έχει αντίστροφο τον $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ συμπεραίνουμε ότι $A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 5 & -3\end{bmatrix}$ δηλ. $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -5/2 & 3/2\end{bmatrix}$

Για τον πίνακα B έχουμε: $\det B=(-3)(-8)-(4)6=0$ και άρα δεν υπάρχει ο B^{-1}

Θέμα 3. (μονάδες 1.0)

Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας A για τον οποίο ισχύει ότι $A^3-6A^2+4A+2I=O$. Δείξτε ότι υπάρχει ο A^{-1} και γράψτε τον ως συνάρτηση του A και του I.

Λύση

Έχουμε:

$$A^3-6A^2+4A+2I=O \Leftrightarrow A^3-6A^2+4A=-2I \Leftrightarrow -\frac{1}{2}A^3+3A^2-2A=I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\left(-\frac{1}{2}A^2+3A-2I\right)=I \\ \text{αλλά και} \\ \left(-\frac{1}{2}A^2+3A-2I\right)A=I \end{cases}$$

δηλαδή, ο πίνακας $B=-\frac{1}{2}A^2+3A-2I$ ικανοποιεί τις σχέσεις: $AB=BA=I$. Άρα, από τον ορισμό του αντιστρόφου, προκύπτει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=B$, δηλαδή: $A^{-1}=-\frac{1}{2}A^2+3A-2I$

Θέμα 4. (μονάδες 3.8)

α) [*μονάδες: 0.5*] Υπολογίστε την ορίζουσα του παρακάτω πίνακα συναρτήσει της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

β) [*μονάδες: 0.3*] Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος;

γ) [*μονάδες: 1.0*] Επιλέξτε στην τύχη μια από τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), και υπολογίστε τον αντίστροφο του A γι' αυτήν την τιμή.

δ) [*μονάδες: 0.5*] Χρησιμοποιήστε την τιμή του λ που επιλέξατε στο ερώτημα (γ) και βρείτε τη λύση του συστήματος $A\vec{x}=\vec{b}$, όπου $\vec{b}=(3,-2,5)$.

ε) [*μονάδες: 1.2*] Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss για να λύσετε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$, όπου $\vec{b}=(3,-2,5)$, για τις τιμές (ή τιμή) του λ για τις οποίες (ή οποία) ο A είναι μη-αντιστρέψιμος. (*Σημείωση: να διακρίνετε τις βασικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές πριν κάνετε ανάδρομη αντικατάσταση*). Ποια είναι η λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$;

Λύση

α) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -9 & -3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ -9 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(-9+9\lambda) - 2(6-5\lambda) =$

$$= 9 - 9\lambda - 12 + 10\lambda = \lambda - 3$$

β) Ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$ δηλ. ανν $\lambda \neq 3$

γ) Επιλέγω στην τύχη ένα πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 3$. Έστω $\lambda = 1$
Εφαρμόζοντας τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan έχουμε:

$$\left[A \mid I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -9 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{εναλλαγή} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ \\ (+) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-1/3) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{cc} & (+) \\ (+) & \\ (-3/2) & (-3) \end{array} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 3/2 & -3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (+) \\ (-5/3) \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & 0 & 3/2 & -3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot 1/3 \\ \cdot 3/2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3 & 3/2 \end{array}\right] = \left[I_3 \mid A^{-1}\right]$$

Επομένως: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 & 3/2 \end{bmatrix}$

δ) Αφού $\det A \neq 0$, το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ θα έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, δηλαδή

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} - \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} - 6 + \frac{15}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ε) Για $\lambda=3$, έχουμε: $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -9 & -3 \end{bmatrix}$. Για να βρούμε τη λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$ εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss:

$$\left[A\,|\,\vec{b}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & -2 \\ -2 & -9 & -3 & 5 \end{array}\right] \text{εναλλαγή} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -9 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{matrix} 2 \\ \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1/3) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]=\left[U\,|\,\vec{d}\right]$$

$$A\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{d} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: x, y (αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς)

Ελεύθερη μεταβλητή: z (αντιστοιχούν στις στήλες του U που δεν έχουν οδηγούς)

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

3η εξίσωση: $0x+0y+0z=0$ που ισχύει $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

2η εξίσωση: $3y+3z=3 \Rightarrow y=1-z$

1η εξίσωση: $x+5y+2z=-2 \Rightarrow x+5(1-z)+2z=-2 \Rightarrow x=-7+3z$

Άρα, το $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\vec{x}=\begin{bmatrix} -7+3z \\ 1-z \\ z \end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$, η οποία γράφεται και ως: $\vec{x}=\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\underbrace{z\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{γενική λύση του } A\vec{x}=\vec{0}}$, με $z\in\mathbb{R}$

Από τη μορφή αυτή προκύπτει ότι το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\vec{x}=z\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$

Θέμα 5. (μονάδες 2.0)

Η ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ είναι $\det A = -17$. Απαντήστε στα παρακάτω αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) [*μονάδες: 0.4*] Ποια είναι η τάξη του πίνακα;

β) [*μονάδες: 0.4*] Πόσες μη-μηδενικές γραμμές θα έχει ο κλιμακωτός πίνακας U που προκύπτει από τον A κάνοντας απαλοιφές μεταξύ γραμμών;

γ) [*μονάδες: 0.4*] Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχετε σε ένα τυχαίο συγκεκριμένο σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$;

δ) [*μονάδες: 0.4*] Πόσες λύσεις θα έχει ένα τυχαίο συγκεκριμένο σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$, με $\vec{b} \neq \vec{0}$;

ε) [*μονάδες: 0.4*] Να λυθεί το ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$

Λύση

α) Επειδή ο A είναι τετραγωνικός, έχουμε: $\det A \neq 0$ ανν $r(A) = n$ (όπου n το πλήθος στηλών του A). Άρα: $r(A) = 8$

β) Επειδή $r(A) =$ [πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U], ο U θα έχει 8 μη-μηδενικές γραμμές

γ) Έχουμε: [πλήθος βασικών μεταβλητών] $= r(A)$ και
[πλήθος ελεύθερων μεταβλητών] $= n - r(A)$
Άρα, 8 βασικές μεταβλητές και καμία ελεύθερη μεταβλητή

δ) Επειδή ο A είναι τετραγωνικός, έχουμε: $\det A \neq 0$ ανν $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει μοναδική λύση. Άρα, το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$, με $\vec{b} \neq \vec{0}$ θα έχει μία και μοναδική λύση.

ε) Επειδή ο A είναι τετραγωνικός, έχουμε: $\det A \neq 0$ ανν $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$. Άρα, το σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ θα έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = (0,0,0,0,0,0,0,0)$

<u>Θέμα 6. (μονάδες 1.2)</u>

Η τάξη ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{5\times 8}$ είναι $r(A)=5$. Απαντήστε στα παρακάτω αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) [*μονάδες: 0.4*] Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχετε σε ένα τυχαίο συγκεκριμένο σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$;

β) [*μονάδες: 0.4*] Πόσες λύσεις θα έχει ένα τυχαίο συγκεκριμένο σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$, με $\vec{b}\neq\vec{0}$;

γ) [*μονάδες: 0.4*] Πόσες λύσεις θα έχει το ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$;

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε: [πλήθος βασικών μεταβλητών] $=r(A)$ και
[πλήθος ελεύθερων μεταβλητών] $=n-r(A)$
Άρα, 5 βασικές μεταβλητές και 8-5=3 ελεύθερες μεταβλητές

β) Επειδή το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει λιγότερες εξισώσεις (δηλ. 5) από αγνώστους (δηλ. 8), δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση. Επιπλέον, επειδή $r(A)=5=m$ (όπου m το πλήθος γραμμών του A) ο U δεν έχει καμία μηδενική γραμμή. Άρα, το σύστημα δεν μπορεί να είναι ούτε αδύνατο. Επομένως, θα έχει άπειρες λύσεις.

γ) Γενικά ξέρουμε ότι: το $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x}=\vec{0}$ ανν $r(A)=n$. Εδώ έχουμε $r(A)=5<8=n$. Άρα, το σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ θα έχει άπειρες λύσεις.
<u>Άλλη εξήγηση:</u> το $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x}=\vec{0}$ ανν [πλήθος ελεύθερων μεταβλητών = 0]. Εδώ έχουμε τρεις ελεύθερες μεταβλητές. Άρα, το σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ θα έχει άπειρες λύσεις.