ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

«Γραμμική Άλγεβρα» (ΗΥ119) – Χειμερινό Εξάμηνο 2009-2010
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

7^ο^ ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του.

Άσκηση 2: Να αποδειχθούν οι επόμενες προτάσεις:

α) Οι πίνακες A, A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

β) Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $a\lambda_1, a\lambda_2, \ldots, a\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του aA, όπου a είναι τυχαίος αριθμός. Επίσης, για $a \neq 0$ ισχύει ότι $V_{a\lambda_i}(aA) = V_{\lambda_i}(A)$, $\forall \lambda_i$ με $i = 1, 2, \ldots, n$.

γ) Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές ενός μη-ιδιόμορφου πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_n}$ είναι οι ιδιοτιμές του A^{-1}, και $V_{1/\lambda_i}(A^{-1}) = V_{\lambda_i}(A)$, $\forall \lambda_i$ με $i = 1, 2, \ldots, n$.

δ) Οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού πίνακα είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του.

Άσκηση 3: Έστω δυο όμοιοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$. Δείξτε ότι: α) $\det A = \det B$, β) $B^k = P^{-1}A^kP$ με $k \in \mathbb{N}$, γ) $X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$.

Άσκηση 4: Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda - 4$.

α) Βρείτε το n.

β) Εξηγήστε γιατί ο πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$.

γ) Αν $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε ο $B = P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος, να υπολογιστεί η $\det B$.

Άσκηση 5: Να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$ και να υπολογιστεί ο A^{100}.

Άσκηση 6: α) Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με τι ισούται το $X_A(0)$;

β) Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα B είναι $X_B(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 25\lambda + 172$, να βρεθεί η ορίζουσα του.

Άσκηση 7: Για τις ακόλουθες περιπτώσεις βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του A. Κατόπιν βρείτε από μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A και εξετάστε αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Στην περίπτωση που ο A διαγωνιοποιείται, βρείτε πίνακα που να τον διαγωνιοποιεί και το διαγώνιο πίνακα που θα προκύψει.

α) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, β) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 7

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A μπορεί να γραφεί ως:

$$X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)$$

Για $\lambda = 0$ έχουμε: $X_A(0) = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) $\forall$ ιδιοτιμή λ του A έχουμε:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det\left[(A - \lambda I)^T\right] = 0 \iff \det(A^T - \lambda I) = 0$$

Επομένως: $\left.\begin{array}{l}\det(A - \lambda I) = 0 \\ \det(A^T - \lambda I) = 0\end{array}\right\}$ ίδιες ρίζες, άρα A, A^T έχουν ίδιες ιδιοτιμές.

β) $\forall$ ιδιοτιμή λ_i με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{X}_i$ του A έχουμε:

$$A\vec{X}_i = \lambda_i \vec{X}_i \iff (\alpha A)\vec{X}_i = (\alpha\lambda_i)\vec{X}_i \quad \text{για } \alpha \neq 0$$

δηλ. το $(\alpha\lambda_i)$ είναι ιδιοτιμή του (αA).

Άρα, $\forall$ ιδιοτιμή λ_i του A, το $\alpha\lambda_i$ είναι ιδιοτιμή του αA και αντίστροφα, κάθε ιδιοτιμή μ_i του (αA) γράφεται ως $\mu_i = \alpha\lambda_i$.

Επίσης, κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{X}_i$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i είναι επίσης, ιδιοδιάνυσμα του (αA) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\alpha\lambda_i$ και αντιστρόφως. Δηλ. $\vec{X}_i \in V_{\lambda_i}(A) \iff \vec{X}_i \in V_{\alpha\lambda_i}(\alpha A)$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

Άρα: $V_{\lambda_i}(A) = V_{\alpha\lambda_i}(\alpha A)$, $\forall\ \lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Όταν $\underline{\underline{\alpha = 0}}$ έχουμε:

$$A\vec{X}_i = \lambda\vec{X}_i \Rightarrow 0A\vec{X}_i = 0\lambda_i\vec{X} \Rightarrow \mathbf{O}\vec{X}_i = 0\vec{X}_i$$

Δηλ. πάλι, $\forall$ ιδιοτιμή λ_i του A, το $\alpha\lambda_i = 0\lambda_i = 0$ είναι ιδιοτιμή του $\alpha A = 0A = \mathbf{0}$, και αντιστρόφως, κάθε ιδιοτιμή $\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n=0$ του $\alpha A = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ γράφεται ως $\mu_i = 0 = 0\lambda_i = \alpha\lambda_i$

Επίσης, κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{X}_i$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i του A είναι και ιδιοδιάνυσμα του $\alpha A = \mathbf{0}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\alpha\lambda_i = 0$. Άρα $V_{\lambda_i}(A) \subseteq V_{0\lambda_i}(0A) = \mathbb{R}^n$

Το αντίστροφο όμως <u>δεν ισχύει</u>, δηλ. κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{X}$ του $\alpha A = \mathbf{0}$ (άρα κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$) δεν είναι απαραίτητα και ιδιοδιάνυσμα του A, αφού, $(0A)\vec{X} = (0\lambda)\vec{X}$ <u>δεν συνεπάγεται</u> $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$.

γ) $\forall$ ιδιοτιμή λ_i του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{X}_i$, έχουμε:

$$A\vec{X}_i = \lambda\vec{X}_i \iff \underbrace{A^{-1}A}_{I_n}\vec{X}_i = \lambda_i A^{-1}\vec{X}_i \iff \vec{X}_i = \lambda_i A^{-1}\vec{X}_i \iff A^{-1}\vec{X}_i = \frac{1}{\lambda_i}\vec{X}_i$$

Άρα, $\forall$ ιδιοτιμή λ_i του A, η $\frac{1}{\lambda_i}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}, δηλ. οι $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ είναι οι ιδιοτιμές του $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Επίσης, κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{X}_i$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^{-1} που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $1/\lambda_i$, και αντιστρόφως. Δηλαδή, $\vec{X}_i \in V_{\lambda_i}(A) \iff \vec{X}_i \in V_{1/\lambda_i}(A^{-1})$, $\forall\ i=1,2,\dots,n$

Άρα: $V_{\lambda_i}(A) = V_{1/\lambda_i}(A^{-1})$, $\forall\ \lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

δ) Αν $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι τριγωνικός, τότε και ο $(A-\lambda I)$ είναι τριγωνικός με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο τα $(\alpha_{11}-\lambda), (\alpha_{22}-\lambda), \dots, (\alpha_{nn}-\lambda)$. Επειδή η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του, θα έχουμε:

$$\det(A-\lambda I) = (\alpha_{11}-\lambda)(\alpha_{22}-\lambda)\cdots(\alpha_{nn}-\lambda)$$

Επομένως: $\det(A-\lambda I) = 0 \iff (\alpha_{11}-\lambda)(\alpha_{22}-\lambda)\cdots(\alpha_{nn}-\lambda) = 0$

η οποία έχει τις ρίζες:

$$\left.\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_{11} \\ \lambda_2 = \alpha_{22} \\ \vdots \\ \lambda_n = \alpha_{nn} \end{cases}\right\}$$ δηλ. τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του τριγωνικού πίνακα A είναι οι ιδιοτιμές του.

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) $$\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = \underbrace{(\det P^{-1})(\det P)}_{1}(\det A) = \det A$$

β) $$B^\kappa = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{\kappa\text{-φορές}} =$$

$$= P^{-1}A\underbrace{(PP^{-1})}_{I_n}A\underbrace{(PP^{-1})}_{I_n}A\ldots\underbrace{(PP^{-1})}_{I_n}AP =$$

$$= P^{-1}\underbrace{AAA\ldots A}_{\kappa\text{-φορές}}P = P^{-1}A^\kappa P$$

γ) $$X_B(\lambda) = \det(B-\lambda I) = \det(P^{-1}AP-\lambda I) = \det(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P) =$$

$$= \det\left[P^{-1}(A-\lambda I)P\right] = (\det P^{-1})\left[\det(A-\lambda I)\right](\det P) =$$

$$= \underbrace{(\det P^{-1})(\det P)}_{1}\left[\det(A-\lambda I)\right] = \det(A-\lambda I) = X_A(\lambda)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού ως προς λ. Άρα $n=3$. Δηλαδή ο A είναι 3×3

β) $X_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+5\lambda-4=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+\lambda+4\lambda-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2-1)+4(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)\left[-\lambda(\lambda+1)+4\right]=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)=0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(\lambda+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ \lambda_3=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right\}$ δηλ. ο A έχει $n=3$ διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές και άρα διαγωνιοποιείται στο $\mathbb{R}$

γ) Οι A, B είναι όμοιοι. Άρα: $\det B=\det A \Rightarrow \det B = X_A(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det B=-4$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -6-\lambda \end{bmatrix}$,

$X_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(5-\lambda)(-6-\lambda)+24=\lambda^2+\lambda-6$

$X_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow \lambda=\frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=2 \\ \lambda_2=-3 \end{array}\right\}$ ιδιοτιμές του A

δηλ. ο A έχει $n=2$ διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές και άρα διαγωνιοποιείται στο $\mathbb{R}$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχουμε:

$$(A-2I)\vec{X}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $3X_1 - 4X_2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = \frac{4}{3}X_2$

Δηλ. $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 \in \mathbb{R}$

Επομένως: $\{\text{μια βάση του } V_2(A)\} = \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda = -3$, έχουμε:

$$(A+3I)\vec{X}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $8X_1 - 4X_2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = \frac{1}{2}X_2$

Δηλ. $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 \in \mathbb{R}$

Επομένως: $\{\text{μια βάση του } V_{-3}(A)\} = \mathbb{B}_{-3} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, με στήλες τα διανύσματα του $\mathbb{B} = \mathbb{B}_2 \cup \mathbb{B}_{-3}$, διαγωνιοποιεί τον A. Ο διαγώνιος που προκύπτει είναι ο $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

δηλ. ο 2x2 διαγώνιος πίνακας με τις αντίστοιχες (ως προς τις στήλες του P) ιδιοτιμές του A στην κύρια διαγώνιο. Άρα:

$P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1} \quad (k \in \mathbb{N})$

Άρα: $A^{100} = PD^{100}P^{-1}$

όπου $D^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & (-3)^{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix}$

και $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 6/5 & -3/5 \\ -6/5 & 8/5 \end{bmatrix}$

$$\text{Άρα: } A^{100} = \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/5 & -3/5 \\ -6/5 & 8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2^{103}-3^{101}}{5} & \frac{4}{5}(3^{100}-2^{100}) \\ \frac{6}{5}(2^{100}-3^{100}) & \frac{8\cdot 3^{100}-3\cdot 2^{100}}{5} \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) $X_A(\lambda) \equiv \det(A-\lambda I_n) \;\Rightarrow\; X_A(0) \equiv \det A$

β) $\det B = X_B(0) \;\Rightarrow\; \det B = 172$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) $A-\lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$X_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(3-\lambda)+2(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda)+2\right] = (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4$$

$$X_A(\lambda)=0 \;\Leftrightarrow\; (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) \;\Leftrightarrow\; -(\lambda-2)^2(\lambda-1) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \;\; (\text{διπλή}) \end{cases}$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι: $\lambda_1 = 1$ & $\lambda_2 = 2$ (διπλή)

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, έχουμε:

$$A-\lambda_1 I_3 = A - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

Άρα: $(A-\lambda_1 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x, y

Ελεύθερη μεταβλητή: z

2^{η} εξίσωση: $y-z=0 \Rightarrow y=z$

1^{η} εξίσωση: $-x-2z=0 \Rightarrow x=-2z$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_1(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix}$

δηλ. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=z\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z\in\mathbb{R}$

και $\quad \mathbb{B}_1=\{\text{μια βάση του } V_1(A)\}=\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=2$, έχουμε:

$$A-\lambda_2 I_3=A-2I_3=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1/2 \quad 1/2 \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=U_2$$

Άρα: $(A-\lambda_2 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_2\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασική μεταβλητή: x

Ελεύθερες μεταβλητές: y, z

1^{η} εξίσωση: $-2x-2z=0 \Rightarrow x=-z$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_2(A)$ έχει διανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix}$

δηλ. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y,z\in\mathbb{R}$

και $\quad \mathbb{B}_2=\{\text{μια βάση του } V_2(A)\}=\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Έστω το σύνολο $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Το $\mathbb{B}$ έχει 3 διανύσματα, και άρα ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, το οποίο επειδή $3 = n$ συνεπάγεται ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Ένας πίνακας που διαγωνιοποιεί τον A είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα του } \mathbb{B}\text{)}$$

και αντίστοιχος διαγώνιος που είναι όμοιος με τον A μέσω της σχέσης $A = PDP^{-1}$ είναι ο $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο τοποθετημένες με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P)

β) Ο A είναι κάτω τριγωνικός. Άρα οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου, δηλαδή οι: $\lambda_1 = 3$ & $\lambda_2 = 2$ (διπλή)

Επίσης, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$, έχουμε:

$$A - \lambda_1 I_3 = A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\,(+)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

Άρα: $(A - \lambda_1 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_1 \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: y, z

Ελεύθερη μεταβλητή: x

$2^η$ εξίσωση: $-z = 0 \Rightarrow z = 0$

$1^η$ εξίσωση: $y - z = 0 \Rightarrow y = 0$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_3(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

δηλ. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$

και $\quad \mathbb{B}_3 = \{$μια βάση του $V_3(A)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$, έχουμε:

$$A - \lambda_2 I_3 = A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

Άρα: $(A - \lambda_2 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_2 \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x, y

Ελεύθερη μεταβλητή: z

2^{η} εξίσωση: $y = 0$

1^{η} εξίσωση: $x = 0$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_2(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$

δηλ. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$

και $\mathbb{B}_2 = \{$μια βάση του $V_2(A)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Έστω το σύνολο $\mathbb{B} = \mathbb{B}_3 \cup \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Το $\mathbb{B}$ έχει 2 διανύσματα, και άρα ο A έχει 2 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, το οποίο επειδή $n = 3$ συνεπάγεται ότι ο A **δεν** είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Σημείωση: στο ίδιο συμπέρασμα μπορούσαμε να καταλήξουμε χωρίς να υπολογίσουμε τις βάσεις $\mathbb{B}_3, \mathbb{B}_2$. Συγκεκριμένα:

$\dim V_3(A) = \dim \mathcal{N}(A - 3I_3) = n - r(U_1) = 3 - 2 = 1$

$\dim V_2(A) = \dim \mathcal{N}(A - 2I_3) = n - r(U_2) = 3 - 2 = 1$

Δηλ. $\dim V_3(A) + \dim V_2(A) = 2 \neq n = 3$, και άρα ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.