ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

«Γραμμική Άλγεβρα» (ΗΥ119) – Χειμερινό Εξάμηνο 2009-2010
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

6^{o} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Δείξτε ότι η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(2x,y)$ είναι γραμμική απεικόνιση και βρείτε τον $\ker f$. Είναι η f "1-1";

Άσκηση 2: Δείξτε ότι η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y,z)=(2x,y^3)$ δεν είναι γραμμική.

Άσκηση 3: Βρείτε πίνακα A στον οποίο αντιστοιχεί η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y)=(2x+y,3y,x-y)$. Επίσης:
α) Εξετάστε αν η απεικόνιση είναι «1-1» ή «επί».
β) Βρείτε τη διάσταση του πυρήνα και τη διάσταση της εικόνας της απεικόνισης, καθώς και βάσεις τους.

Άσκηση 4: Εξηγήστε γιατί μια γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ δεν μπορεί να είναι "επί".

Άσκηση 5: Έστω *V*, *W* πραγματικοί διανυσματικοί χώροι και $f:V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Αν $\dim V = \dim W$, τότε δείξτε ότι η f είναι "1-1" αν και μόνο αν η f είναι "επί".

Άσκηση 6: Βρείτε τον πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση η οποία απεικονίζει τα διανύσματα $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$ στα διανύσματα $(1,5,2,9)$, $(2,6,4,7)$, $(3,3,7,1)$, αντίστοιχα. Επίσης:
α) Εξετάστε αν η απεικόνιση είναι «1-1» ή «επί».
β) Βρείτε τη διάσταση του πυρήνα και τη διάσταση της εικόνας της απεικόνισης, καθώς και βάσεις τους.

Άσκηση 7: Έστω *V*, *W* πραγματικοί διανυσματικοί χώροι και οι διατεταγμένες βάσεις τους $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_4\right\}$, $\mathbb{B}'=\left\{\vec{b}'_1,\vec{b}'_2,\vec{b}'_3\right\}$ αντίστοιχα. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:V \to W$ με:

$$f\left(\vec{b}_1\right)=\vec{b}'_1+\vec{b}'_2, \quad f\left(\vec{b}_2\right)=2\vec{b}'_1+\vec{b}'_3, \quad f\left(\vec{b}_3\right)=3\vec{b}'_1+\vec{b}'_2+\vec{b}'_3, \quad f\left(\vec{b}_4\right)=2\vec{b}'_2-\vec{b}'_3$$

α) Εξετάστε αν η απεικόνιση είναι «1-1» ή «επί».
β) Να βρεθούν οι διαστάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.
γ) Να βρεθούν βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.

Άσκηση 8: Έστω *V* ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right\}$ μια διατεταγμένη βάση του. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:V \to V$ με: $f\left(\vec{b}_1\right)=2\vec{b}_1+4\vec{b}_2+\vec{b}_3$, $f\left(\vec{b}_2\right)=3\vec{b}_1+\vec{b}_2-\vec{b}_3$, $f\left(\vec{b}_3\right)=-\vec{b}_1+2\vec{b}_2+\vec{b}_3$.
α) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς τη $\mathbb{B}$
β) Εξετάστε αν η απεικόνιση είναι «1-1» ή «επί».
γ) Να βρεθούν οι διαστάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.
δ) Να βρεθούν βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.

Άσκηση 9: Έστω η γραμμική απεικόνιση $L_A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τον πίνακα $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.
α) Δείξτε ότι η απεικόνιση είναι «επί».
β) Βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $L_A(\vec{v})=(-2,5)$
γ) Βρείτε τον πυρήνα $\ker(L_A)$.

Άσκηση 10: Δίνεται ο υπόχωρος $W=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus x-2y=0\right\}$ του $\mathbb{R}^2$.

α) Βρείτε μια βάση του W και τη διάσταση του.

β) Βρείτε πίνακα $A\in\mathbb{R}^{1\times 2}$ έτσι ώστε $W=\mathcal{N}(A)$.

γ) Βρείτε πίνακα $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ έτσι ώστε $W=\mathcal{N}(B)$.

δ) Βρείτε γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε $W=\ker f$.

Άσκηση 11: Έστω η διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right\}$ με $\vec{b}_1=(1,1,1)$, $\vec{b}_2=(0,1,-1)$, $\vec{b}_3=(1,2,1)$. Επίσης, έστω μια γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με $f(1,1,1)=(1,0,1)$, $f(0,1,-1)=(2,1,3)$, $f(1,2,1)=(1,1,2)$.

α) Βρείτε τον πίνακα A της απεικόνισης, ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

β) Δείξτε ότι η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.

γ) Βρείτε τον πυρήνα της f

δ) Βρείτε έναν υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2 τέτοιο ώστε $f(V)=\operatorname{Im} f$.

ε) Βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $f(\vec{v})=(6,-1,5)$.

στ) Βρείτε έναν υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2 τέτοιο ώστε η εικόνα $f(W)$ να είναι η ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από το διάνυσμα $(6,-1,5)$.

Άσκηση 12: Εξετάστε αν οι απεικονίσεις που ορίζουν οι παρακάτω πίνακες είναι “1-1” ή “επί” και βρείτε τη διάσταση του πυρήνα και τη διάσταση της εικόνας της κάθε απεικόνισης.

α) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, β) $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, γ) $C=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\end{bmatrix}$, δ) $D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 6

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ και $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ του $\mathbb{R}^2$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f(\lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f\left((\lambda x_1, \lambda y_1) + (x_2, y_2)\right) = f(\lambda x_1 + x_2,\ \lambda y_1 + y_2) = \left(2(\lambda x_1 + x_2),\ \lambda y_1 + y_2\right) =$$
$$= \left(2\lambda x_1 + 2x_2,\ \lambda y_1 + y_2\right) = \left(2\lambda x_1,\ \lambda y_1\right) + \left(2x_2,\ y_2\right) = \lambda\left(2x_1,\ y_1\right) + \left(2x_2,\ y_2\right) =$$
$$= \lambda f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = \lambda f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$$

δηλαδή: $f(\lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$, $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ & $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Άρα, η f είναι γραμμική απεικόνιση

Επίσης, εξ' ορισμού, έχουμε $\ker f = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\vec{v}) = \vec{0}\right\}$

Όμως, $f(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow f(x, y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x, y) = (0,0) \Leftrightarrow (x, y) = (0,0) \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \in \mathbb{R}^2$

Άρα: $\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$, το οποίο επίσης σημαίνει ότι η f είναι «1-1».

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για κάθε $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε: $f(\lambda\vec{v}) = f\left(\lambda(x, y, z)\right) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x, \lambda^3 y^3)$

ενώ $\lambda f(\vec{v}) = \lambda f(x, y, z) = \lambda(2x, y^3) = (2\lambda x, \lambda y^3)$

δηλαδή, γενικά: $f(\lambda\vec{v}) \neq \lambda f(\vec{v})$

Άρα, η f δεν είναι γραμμική απεικόνιση

ΑΣΚΗΣΗ 3

Η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι η $\mathbb{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ με $\vec{e}_1=(1,0)$ & $\vec{e}_2=(0,1)$, και η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι η $\mathbb{E}'=\left\{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'\right\}$ με $\vec{e}_1{}'=(1,0,0)$, $\vec{e}_2{}'=(0,1,0)$ & $\vec{e}_3{}'=(0,0,1)$.

Έχουμε: $f(\vec{e}_1)=f\left((1,0)\right)=(2,0,1)=2\vec{e}_1{}'+0\vec{e}_2{}'+1\vec{e}_3{}'$

$f(\vec{e}_2)=f\left((0,1)\right)=(1,3,-1)=1\vec{e}_1{}'+3\vec{e}_2{}'-1\vec{e}_3{}'$

Άρα, $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$

<u>2ος Τρόπος:</u> $f\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y\\ 3y\\ x-y\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

α) Επειδή ο A είναι 3×2 η τάξη $r(A)$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 2, άρα $r(A)\neq m=3$ και η απεικόνιση δεν είναι «επί». Επίσης,

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-1/2)R_1}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 0 & -3/2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(1/2)R_2}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}=U$$

$r(A)=\{$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U\}=2$

Δηλαδή, $r(A)=n$ και άρα η f είναι «1-1».

β) Για τη διάσταση του πυρήνα έχουμε: $\dim(\ker f)=n-r(A)=0$

ενώ για τη διάσταση της εικόνας: $\dim(\operatorname{Im} f)=r(A)=2$

Επίσης, $\dim(\ker f)=0 \Leftrightarrow \ker f=\left\{\vec{0}\right\}$ και άρα, ο $\ker f$ δεν έχει βάση

Και {μια βάση του $\operatorname{Im} f$} = {οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς} = {1^{η} & 2^{η} στήλη του A}

Δηλ. {μια βάση του $\operatorname{Im} f$} $=\left\{\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -1\end{bmatrix}\right\}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Γενικά, ξέρουμε ότι:

{η $f: V \to W$ είναι «επί»} $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W \underset{\operatorname{Im} f \subseteq W}{\Leftrightarrow} \dim(\operatorname{Im} f) = \dim W \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = m$

Άρα, {η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι «επί»} $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 3$, το οποίο είναι αδύνατο γιατί:

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim V, \quad \text{δηλ.} \quad \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim \mathbb{R}^2$$

που σημαίνει: $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = 2$, δηλ. $\dim(\operatorname{Im} f) \leq 2$

$2^{ος}$ Τρόπος: Γενικά, ξέρουμε ότι:

{η $f: V \to W$ με πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι «επί»} ανν $r(A) = m$

Δηλαδή, {μια $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (που θα έχει πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$) είναι «επί»} ανν $r(A) = 3$, το οποίο είναι αδύνατο γιατί ο A είναι 3×2 και άρα $r(A) \leq 2$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω $f: V \to W$ με $\dim V = \dim W$

{η $f: V \to W$ είναι «1-1»} $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{\vec{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\ker f) = 0$ $\Leftrightarrow$

$$\underset{\dim(\operatorname{Im} f)+\dim(\ker f)=\dim V}{\Leftrightarrow} \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V \underset{\dim V = \dim W}{\Leftrightarrow} \dim(\operatorname{Im} f) = \dim W \underset{\operatorname{Im} f \subseteq W}{\Leftrightarrow} \operatorname{Im} f = W \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ {η $f: V \to W$ είναι «επί»}

$2^{ος}$ Τρόπος: Αν $\dim V = \dim W$ τότε η $f: V \to W$ έχει πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (δηλ. $m = n$)

Όμως: {η f είναι «επί»} $\Leftrightarrow$ $r(A) = m$ $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$ $\Leftrightarrow$ {η f είναι «1-1»}

ΑΣΚΗΣΗ 6

Τα διανύσματα $(1,0,0)=\vec{e}_1$, $(0,1,0)=\vec{e}_2$ & $(0,0,1)=\vec{e}_3$ αποτελούν την κανονική βάση $\mathbb{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ τα οποία απεικονίζονται σε διανύσματα του $\mathbb{R}^4$. Άρα, έχουμε: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ με

$$f(\vec{e}_1)=(1,5,2,9),\qquad f(\vec{e}_2)=(2,6,4,7),\qquad f(\vec{e}_3)=(3,3,7,1)$$

Άρα, $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&6&3\\2&4&7\\9&7&1\end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4$

α) Επειδή ο A είναι 4×3 η τάξη $r(A)$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 3, άρα $r(A)\neq m=4$ και η απεικόνιση δεν είναι «επί». Επίσης,

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&6&3\\2&4&7\\9&7&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-5)\ (-2)\ (-9)\\ (+)\\ (+)\\ (+)\end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-4&-12\\0&0&1\\0&-11&-26\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ (-11/4)\\ \\ (+)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-4&-12\\0&0&1\\0&0&7\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ (-7)\\ (+)\end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-4&-12\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=U$$

$r(A)=$ {πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U }= 3

Δηλαδή, $r(A)=n$ και άρα η f είναι «1-1».

β) Για τη διάσταση του πυρήνα έχουμε: $\dim(\ker f)=n-r(A)=0$

ενώ για τη διάσταση της εικόνας: $\dim(\operatorname{Im} f)=r(A)=3$

Επίσης, $\dim(\ker f)=0 \Leftrightarrow \ker f=\{\vec{0}\}$ και άρα, ο $\ker f$ δεν έχει βάση

Και {μια βάση του $\operatorname{Im} f$ } = {οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς} = {1η, 2η & 3η στήλη του A }

Δηλ. {μια βάση του $\operatorname{Im} f$ } $=\left\{\begin{bmatrix}1\\5\\2\\9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\6\\4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\7\\1\end{bmatrix}\right\}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Καταρχάς, βρίσκουμε τον πίνακα της f ως προς τις βάσεις $\mathbb{B},\mathbb{B}'$ των V και W, αντίστοιχα. Ο πίνακας αυτός σχηματίζεται χρησιμοποιώντας ως στήλες τις συνιστώσες των $f\left(\vec{b}_1\right), f\left(\vec{b}_2\right), f\left(\vec{b}_3\right), f\left(\vec{b}_4\right)$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}'=\left\{\vec{b}_1',\vec{b}_2',\vec{b}_3'\right\}$. Άρα, είναι ο

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

α) Επειδή ο A είναι 3×4 η τάξη $r(A)$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 3, άρα $r(A)\neq n=4$ και η απεικόνιση δεν είναι «1-1». Επίσης,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\\ \hookleftarrow_{(+)}\\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ 1/2\\ \hookleftarrow_{(+)}\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=U$$

$r(A)=\{$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U\}=2$

Δηλαδή, $r(A)\neq m=3$ και άρα η f δεν είναι ούτε «επί».

β) $\dim(\ker f)=n-r(A)=4-2=2$

$\dim(\operatorname{Im} f)=r(A)=2$

γ) {μια βάση του $\operatorname{Im} f$ } = {οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς} = {1^{η} & 2^{η} στήλη του $A\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}'=\left\{\vec{b}_1',\vec{b}_2',\vec{b}_3'\right\}$

Δηλ. {μια βάση του $\operatorname{Im} f$ } $=\left\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\right\}$ με $\vec{w}_1=\vec{b}_1'+\vec{b}_2'$, $\vec{w}_2=2\vec{b}_1'+\vec{b}_3'$

Για τον πυρήνα έχουμε: $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x_1,x_2, Ελεύθερες μεταβλητές: x_3,x_4

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

2^{η} εξίσωση: $-2x_2-2x_3+2x_4=0 \Rightarrow x_2=-x_3+x_4$

1^{η} εξίσωση: $x_1+2x_2+3x_3=0 \Rightarrow x_1+2(-x_3+x_4)+3x_3=0 \Rightarrow x_1=-x_3-2x_4$

Άρα: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ -x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ δηλ. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

Επομένως:

{μια βάση του $\ker f$ } $= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, με $\vec{v}_1 = -\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$ & $\vec{v}_2 = -2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_4$

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Ο πίνακας της f ως προς τη βάση $\mathbb{B}$ σχηματίζεται χρησιμοποιώντας ως στήλες τις συνιστώσες των $f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), f(\vec{b}_3)$ ως προς τη βάση $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$. Άρα, είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Επειδή ο A είναι τετραγωνικός, η f είναι «1-1» ανν είναι «επί», το οποίο συμβαίνει ανν $\det A \neq 0$

Έχουμε: $\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 7 = 5 \neq 0$, και άρα η f είναι «1-1» & «επί».

γ) Έχουμε: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = m = n$. Άρα, $r(A) = 3$ και

$\dim(\ker f) = n - r(A) = 0$

$\dim(\operatorname{Im} f) = r(A) = 3$

δ) $\dim(\ker f) = 0 \Leftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$ και άρα, ο $\ker f$ δεν έχει βάση

Επίσης, επειδή η $f : V \to V$ είναι «επί», έχουμε: $\operatorname{Im} f = V$.

Άρα {μια βάση του $\operatorname{Im} f$ } = $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α) Έχουμε: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{matrix}(-2)\\ \hookleftarrow (+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=U$

$r(A)=\{$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U\}=2$

δηλαδή $r(A)=m$, και άρα η L_A είναι «επί»

β) Έστω $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, τότε: $L_A(\vec{v})=(-2,5) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}}_{\vec{v}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$

Επειδή, έχουμε ήδη κάνει τη διαδικασία $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$, δεν χρειάζεται να κάνουμε όλη τη διαδικασία απαλοιφής Gauss $\left[A\,|\,\vec{b}\right] \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} \left[U\,|\,\vec{d}\right]$. Αρκεί να εφαρμόσουμε στο $\vec{b}$ τα ίδια στάδια απαλοιφής που εφαρμόσαμε στη διαδικασία $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$.

Έχουμε: $\vec{b}=\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}\begin{matrix}(-2)\\ \hookleftarrow (+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-2\\ 9\end{bmatrix}=\vec{d}$

Άρα: $A\vec{v}=\vec{b} \Leftrightarrow U\vec{v}=\vec{d} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 9\end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x, y
Ελεύθερη μεταβλητή: z
<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>
2^{η} εξίσωση: $y+z=9 \Rightarrow y=9-z$
1^{η} εξίσωση: $x+z=-2 \Rightarrow x=-2-z$

Επομένως: $\vec{v}=\begin{bmatrix}-2-z\\ 9-z\\ z\end{bmatrix}$ δηλ. $\vec{v}=\begin{bmatrix}-2\\ 9\\ 0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$ (1)

δηλ. υπάρχουν άπειρα διανύσματα $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ με $L_A(\vec{v})=(-2,5)$.

π.χ. Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $\vec{v}=(-2,9,0)$ (για $z=0$),

ενώ ένα άλλο είναι το $\vec{v}=(-3,8,1)$ (για $z=1$)

γ) Από τη γενική λύση (1) του $A\vec{v}=\vec{b}$ προκύπτει ότι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$ είναι η: $\vec{x}=z\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$

Άρα, {μια βάση του $\ker(L_A)$ } $=\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

δηλαδή ο $\ker(L_A)$ παριστάνει την ευθεία του διανύσματος $(-1,-1,1)$ του $\mathbb{R}^3$

[δηλ. την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (0,0,0) και το σημείο $(-1,-1,1)$]

ΑΣΚΗΣΗ 10

α) Για κάθε $\vec{w}=(x,y)\in W$ έχουμε:

$$\vec{w}=(x,y)=(2y,y)=y(2,1) \text{ με } y\in\mathbb{R}$$

Άρα, {μια βάση του W } $=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$ και επομένως: $\dim W=1$

Σημείωση: ο W παριστάνει την ευθεία του διανύσματος $(2,1)$ του $\mathbb{R}^2$

(δηλ. την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (0,0) και το σημείο $(2,1)$ και η οποία έχει εξίσωση $x-2y=0$)

β) Για κάθε $\vec{w}=(x,y)\in W$ ισχύει: $x-2y=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=[0]$.

Δηλαδή: $W=\mathcal{N}(A)$, όπου $A=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}$

γ) Θέλουμε $\mathcal{N}(B)=\mathcal{N}(A)$, δηλαδή το 2×2 σύστημα $B\vec{x}=\vec{0}$ να έχει τις ίδιες λύσεις με το 1×2 σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει οι γραμμές του B να είναι πολλαπλάσια της γραμμής του A. Δηλαδή κάθε γραμμή του B είναι της μορφής $\begin{bmatrix}a & -2a\end{bmatrix}$ με $a\neq 0$. Έτσι, π.χ.

$$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\-3 & 6\end{bmatrix}$$

δ) Επειδή $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ο πίνακας G της απεικόνισης ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}$ θα είναι 1×2 και $\ker f=\mathcal{N}(G)$.

Όμως, θέλουμε: $\ker f=W$, δηλ. $\mathcal{N}(G)=W \Rightarrow \mathcal{N}(G)=\mathcal{N}(A)$

Ο A είναι 1×2, οπότε μπορούμε να πάρουμε $G=A$ δηλαδή: $G=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}$, και άρα η f θα έχει τη μορφή: $f(x,y)=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ δηλαδή: $f(x,y)=x-2y$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Μια σύντομη παρατήρηση πριν ξεκινήσουμε να βρούμε τον A:

Η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι η $\mathbb{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ με $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$ & $\vec{e}_3=(0,0,1)$. Για τα διανύσματα της βάσης $\mathbb{B}=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ έχουμε:

$$f\left(\vec{b}_1\right)=(1,0,1)=\vec{e}_1+\vec{e}_3$$

$$f\left(\vec{b}_2\right)=(2,1,3)=2\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3$$

$$f\left(\vec{b}_3\right)=(1,1,2)=\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3$$

Ο πίνακας με στήλες τις συνιστώσες των $f\left(\vec{b}_1\right), f\left(\vec{b}_2\right), f\left(\vec{b}_3\right)$ ως προς τη βάση $\mathbb{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ είναι ο: $A'=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&3&2\end{bmatrix}$

Ο A' είναι ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathbb{B}$ & $\mathbb{E}$ του $\mathbb{R}^3$. Δηλαδή $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^3$ έχουμε $f(\vec{x})=A'\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, όπου (x_1,x_2,x_3) οι συνιστώσες του $\vec{x}$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}$ και το $f(\vec{x})$ που προκύπτει θα είναι διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ εκφρασμένο ως προς τη βάση $\mathbb{E}$. Γενικά, επειδή η f είναι απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^3$ **πάλι στον** $\mathbb{R}^3$, «είναι προτιμότερο» να έχουμε τον πίνακα της f όχι ως προς δύο βάσεις του $\mathbb{R}^3$, αλλά ως προς **μία βάση**.

Για παράδειγμα, αν A είναι ο πίνακας της f ως προς τη βάση $\mathbb{E}$, τότε $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^3$ έχουμε $f(\vec{x})=A\vec{x}$, όπου τόσο το $\vec{x}$ όσο και το $f(\vec{x})$ που προκύπτει είναι εκφρασμένα ως προς τη βάση $\mathbb{E}$.

α) Ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση $\mathbb{E}$ σχηματίζεται χρησιμοποιώντας ως στήλες τις συνιστώσες των $f\left(\vec{e}_1\right), f\left(\vec{e}_2\right), f\left(\vec{e}_3\right)$ ως προς τη βάση $\mathbb{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Εμείς ξέρουμε τα $f\left(\vec{b}_1\right), f\left(\vec{b}_2\right), f\left(\vec{b}_3\right)$, αλλά όχι τα $f\left(\vec{e}_1\right), f\left(\vec{e}_2\right), f\left(\vec{e}_3\right)$. Όμως:

$$\begin{aligned} f(1,1,1)=(1,0,1) &\Rightarrow f(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)=\vec{e}_1+\vec{e}_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\vec{e}_1)+f(\vec{e}_2)+f(\vec{e}_3)=\vec{e}_1+\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f(0,1,-1)=(2,1,3) &\Rightarrow f(\vec{e}_2-\vec{e}_3)=2\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\vec{e}_2)-f(\vec{e}_3)=2\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{2}$$

$$f(1,2,1)=(1,1,2) \;\Rightarrow\; f(\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3)=\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(\vec{e}_1)+2f(\vec{e}_2)+f(\vec{e}_3)=\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3 \qquad (3)$$

Δηλαδή, έχουμε να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) με αγνώστους τα διανύσματα $f\left(\vec{e}_1\right), f\left(\vec{e}_2\right), f\left(\vec{e}_3\right)$. Το σύστημα αυτό γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f\left(\vec{e}_1\right) \\ f\left(\vec{e}_2\right) \\ f\left(\vec{e}_3\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \vec{e}_1+\vec{e}_3 \\ 2\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f\left(\vec{e}_1\right) \\ f\left(\vec{e}_2\right) \\ f\left(\vec{e}_3\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \vec{e}_1+\vec{e}_3 \\ 2\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss-Jordan (άσκηση για σπίτι) βρίσκουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα: $$\begin{bmatrix} f\left(\vec{e}_1\right) \\ f\left(\vec{e}_2\right) \\ f\left(\vec{e}_3\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{e}_1+\vec{e}_3 \\ 2\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f\left(\vec{e}_1\right) \\ f\left(\vec{e}_2\right) \\ f\left(\vec{e}_3\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2+\vec{e}_3 \\ -2\vec{e}_1-2\vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση $\mathbb{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ είναι ο:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

β) Έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=U$$

$r(A)=\{$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U\}=2$

Άρα: $\dim(\operatorname{Im} f)=r(A)=2$

Δηλαδή το $\operatorname{Im} f$ που είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ έχει διάσταση 2. Άρα παριστάνει ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που περνά από το (0,0,0).

γ) Έχουμε: $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2, Ελεύθερη μεταβλητή: x_3

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

2^{η} εξίσωση: $x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_3$

1^{η} εξίσωση: $3x_1 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}x_3$

Άρα: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$, δηλ. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $x_3 \in \mathbb{R}$

Επομένως: $\{$μια βάση του $\ker f\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

δηλαδή ο $\ker f$ παριστάνει την ευθεία του διανύσματος $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ του $\mathbb{R}^3$

[δηλ. την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (0,0,0) και το σημείο $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$]

δ) Από το (β) προκύπτει ότι {μια βάση του $\operatorname{Im} f$} = {οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς} = {1^{η} & 2^{η} στήλη του A}

Δηλ. {μια βάση του $\operatorname{Im} f$} $= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Άρα, $\forall \vec{w} \in \operatorname{Im} f$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\vec{w} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{w} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{w} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{w} = A \underbrace{\left(\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{w} = A\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} = f(\vec{v})$$

δηλαδή $\forall \vec{w} \in \operatorname{Im} f$, $\exists \vec{v} \in \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ (δηλ. $\vec{v} \in \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$) τέτοιο ώστε $\vec{w} = f(\vec{v})$

Επίσης, $\dim\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 2$ διότι τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως, ο ζητούμενος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $V = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, δηλαδή το επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

ε) $f(\vec v) = (6,-1,5) \Leftrightarrow A\vec v = \underbrace{\begin{bmatrix}6\\-1\\5\end{bmatrix}}_{\vec b}$

Επειδή, έχουμε ήδη κάνει τη διαδικασία $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$, δεν χρειάζεται να κάνουμε όλη τη διαδικασία απαλοιφής Gauss $\left[A \mid \vec b\right] \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} \left[U \mid \vec d\right]$. Αρκεί να εφαρμόσουμε στο $\vec b$ τα ίδια στάδια απαλοιφής που εφαρμόσαμε στη διαδικασία $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$.

Έχουμε: $\vec b = \begin{bmatrix}6\\-1\\5\end{bmatrix} \xrightarrow{1/3\,(+),\ (-2/3)\,(+)} \begin{bmatrix}6\\1\\1\end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\,(+)} \begin{bmatrix}6\\1\\0\end{bmatrix} = \vec d$

Άρα: $A\vec v = \vec b \Leftrightarrow U\vec v = \vec d \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\0 & 1 & -2/3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\1\\0\end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x, y

Ελεύθερη μεταβλητή: z

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

2^{η} εξίσωση: $y - \frac{2}{3}z = 1 \Rightarrow y = 1 + \frac{2}{3}z$

1^{η} εξίσωση: $3x - 2z = 6 \Rightarrow x = 2 + \frac{2}{3}z$

Επομένως: $\vec v = \begin{bmatrix}2 + \frac{2}{3}z\\1 + \frac{2}{3}z\\z\end{bmatrix}$ δηλ. $\vec v = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1\end{bmatrix}$, με $z \in \mathbb{R}$

δηλ. υπάρχουν άπειρα διανύσματα $\vec v \in \mathbb{R}^3$ με $f(\vec v) = (6,-1,5)$.

π.χ. ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $\vec v = (2,1,0)$ (για $z = 0$),

ενώ ένα άλλο είναι το $\vec v = (0,-1,-3)$ (για $z = -3$)

στ) Θέλουμε $\forall \vec w \in W$ να υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$f(\vec w) = \lambda\begin{bmatrix}6\\-1\\5\end{bmatrix} \Leftrightarrow A\vec w = \lambda\vec b$$

Όμως, στο (ε) είδαμε ότι το σύστημα $A\vec v = \vec b$ έχει τη γενική λύση:

$$\vec v = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1\end{bmatrix}, \text{ με } z \in \mathbb{R}$$

Άρα, το $A\vec{w}=\lambda\vec{b}$ έχει τη λύση: $\vec{w}=\lambda\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1\end{bmatrix}$, με $\lambda,z\in\mathbb{R}$

Δηλαδή $W=\left\langle (2,1,0),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)\right\rangle$

Επίσης, $\dim W=2$ διότι τα $\vec{w}_1=(2,1,0)$, $\vec{w}_2=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (μη-συνευθειακά). Επομένως, ο ζητούμενος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $W=\langle\vec{w}_1,\vec{w}_2\rangle$, δηλαδή το επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{w}_1,\vec{w}_2$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

α) Επειδή ο A είναι τετραγωνικός, η απεικόνιση $L_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ είναι «1-1» ανν είναι «επί», το οποίο συμβαίνει ανν $\det A\neq 0$.

Έχουμε: $\det A=1\cdot 4-2\cdot 2=0$, και άρα η L_A δεν είναι «1-1», ούτε «επί».

Επίσης, επειδή ο A είναι μη-μηδενικός 2×2 και $\det A=0$ συνεπάγεται ότι $r(A)=1$. Άρα:

$\dim(\ker L_A)=n-r(A)=2-1=1$

$\dim(\operatorname{Im} L_A)=r(A)=1$

β) Επειδή ο B είναι τετραγωνικός, η απεικόνιση $L_B:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ είναι «1-1» ανν είναι «επί», το οποίο συμβαίνει ανν $\det B\neq 0$.

Έχουμε: $\det B=0\cdot 1-3\cdot 2=-6\neq 0$, και άρα η L_B είναι «1-1» & «επί».

Επίσης, επειδή η L_B είναι «1-1», θα έχουμε: $\dim(\ker L_B)=0$

Επιπλέον: $\dim(\ker L_B)+\dim(\operatorname{Im} L_B)=\dim\mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} L_B)=2$

γ) Έχουμε: $r(C)=1=m<3=n$, και άρα η απεικόνιση $L_C:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ είναι «επί», αλλά όχι «1-1». Επίσης:

$\dim(\operatorname{Im} L_C)=r(C)=1$

$\dim(\ker L_C)=n-r(C)=3-1=2$

δ) Έχουμε:

$$D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}(+)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & -2/3 \end{bmatrix} = U$$

Άρα: $r(D)=2=m<4=n$, και επομένως, η απεικόνιση $L_D:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ είναι «επί», αλλά όχι «1-1». Επίσης:

$\dim(\operatorname{Im} L_D)=r(D)=2$

$\dim(\ker L_D)=n-r(D)=4-2=2$