# **ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -** Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**«Γραμμική Άλγεβρα» (ΗΥ119) – Χειμερινό Εξάμηνο 2009-2010**
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

## ***5$^{o}$ ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ***

**Άσκηση 1:** Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα αποτελούν διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$.

α) $V=\{(x,y)\ \backslash\ 3x+y=0,\ x,y\in\mathbb{R}\}$, β) $V=\{(x,y)\ \backslash\ 3(x+2)=5y,\ x,y\in\mathbb{R}\}$,

γ) $V=\{(x,y)\ \backslash\ 3(x+2)-5y=6,\ x,y\in\mathbb{R}\}$, δ) $V=\left\{(x,y)\ \backslash\ x^2+y^2=0,\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

**Άσκηση 2:** Εξετάστε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τα διανύσματα:

α) $(0,1)$, $(1,1)$, β) $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$, γ) $(1,0,0)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$

**Άσκηση 3:** Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τα διανύσματα:

α) $(0,1)$, $(1,1)$, β) $(1,1)$, $(-1,-1)$, γ) $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$

**Άσκηση 4:** Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι και ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν.

**Άσκηση 5:** Έστω $V$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Εξετάστε αν είναι αληθές ότι και τα διανύσματα $\vec{w}_1=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, $\vec{w}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_3$, $\vec{w}_3=\vec{v}_2+\vec{v}_3$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

**Άσκηση 6:** Γράψτε το παρακάτω σύστημα σε μορφή διανυσματικής εξίσωσης.

$$\begin{aligned}&u+v+w=b_1\\&u+2v+3w=b_2\\&v+2w=b_3\end{aligned}$$

Δείξτε ότι τα διανύσματα στο αριστερό μέλος της προκύπτουσας διανυσματικής εξίσωσης είναι συνεπίπεδα, εκφράζοντας το τρίτο διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των δύο άλλων. Ποια μορφή πρέπει να έχει το διάνυσμα $(b_1,b_2,b_3)$ ώστε το σύστημα να έχει λύση; Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα γι' αυτήν την περίπτωση. Είναι αυτή η λύση μοναδική;

**Άσκηση 7:** Έστω το σύνολο $V=\{(x,y,z)\ \backslash\ x=2y=3z,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

α) Δείξτε ότι το $V$ είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
β) Βρείτε μια βάση του $V$ και τη διάσταση του.
γ) Βρείτε μια βάση του υποχώρου του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $V$.

**Άσκηση 8:** Έστω το σύνολο $V=\{(x,y,z)\ \backslash\ 2x+y+z=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι το $V$ είναι πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και βρείτε τρεις διαφορετικές βάσεις του και τη διάσταση του.

**Άσκηση 9:** Εξετάστε αν είναι αληθείς ή ψευδείς οι προτάσεις: α) Ένας $5\times 8$ πίνακας δεν έχει ποτέ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες.
β) Αν οι στήλες ενός $m\times n$ πίνακα $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει μια ακριβώς λύση $\forall\,\vec{b}\in\mathbb{R}^m$.

**Άσκηση 10:** Έστω εννέα διανύσματα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_9\in\mathbb{R}^7$. Επιλέξτε μια από τις εκφράσεις στις παρενθέσεις για να είναι αληθής καθεμία από τις επόμενες προτάσεις, αιτιολογώντας κάθε φορά την επιλογή σας:

α) Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_9$ (είναι) (δεν είναι) (μπορεί να είναι) γραμμικώς ανεξάρτητα.

β) Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_9$ (παράγουν) (δεν παράγουν) (μπορεί να παράγουν) τον $\mathbb{R}^7$.

γ) Εάν τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_9$ είναι στήλες ενός πίνακα *A*, τότε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ (έχει) (δεν έχει) (μπορεί να μην έχει) λύση.

**Άσκηση 11:** Βρείτε την τάξη των επόμενων πινάκων, καθώς και τη διάσταση και μια βάση του χώρου στηλών τους και τη διάσταση και μια βάση του μηδενόχωρου τους

$$\text{α)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{β)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{γ)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{δ)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 12:** Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του χώρου στηλών, χώρου γραμμών, μηδενόχωρου και αριστερού μηδενόχωρου για κάθε ένα από τους πίνακες:

$$\text{α)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{β)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{γ)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{δ)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 13:** Αν το γινόμενο δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας, δηλ. $AB = O$, δείξτε ότι α) ο χώρος στηλών του *B* περιέχεται στο μηδενόχωρο του *A*, και β) ο χώρος γραμμών του A περιέχεται στον αριστερό μηδενόχωρο του B.

**Άσκηση 14:** Βρείτε έναν $1 \times 3$ πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος αποτελείται από όλα τα διανύσματα $(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$ για τα οποία $x + 2y + 4z = 0$. Βρείτε έναν $3 \times 3$ πίνακα με τον ίδιο μηδενόχωρο.

**Άσκηση 15:** Αν το $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει πάντοτε μια τουλάχιστον λύση, δείξτε ότι η μόνη λύση του $A^T \vec{y} = \vec{0}$ είναι η $\vec{y} = \vec{0}$.

**Άσκηση 16:** Αν *V* είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βρείτε:
α) τη διάσταση και μια βάση του *V*,
β) έναν πίνακα *B* που έχει τον *V* ως χώρο γραμμών,
γ) έναν πίνακα *Γ* που έχει τον *V* ως μηδενόχωρο.

**Άσκηση 17:** Δίνονται οι πραγματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$: $W_1 = \langle (1,-1,-1), (1,2,3) \rangle$, και $W_2 = \langle (5,1,3) \rangle$.

α) Βρείτε βάσεις των $W_1$ και $W_2$.

β) Δείξτε ότι $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$ και ότι $W_1 \cap W_2 = W_2$.

γ) Βρείτε μια βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $W_1$.

**Άσκηση 18:** Έστω *V* ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του *V*. Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ με: $\vec{v}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3$, $\vec{v}_3 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$. Να βρεθεί μια βάση του χώρου $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$.

**Άσκηση 19:** Έστω $V$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right\}$ μια διατεταγμένη βάση του $V$. Έστω $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in V$ με: $\vec{v}_1=\vec{b}_1+\vec{b}_3$, $\vec{v}_2=2\vec{b}_1+\vec{b}_2$, $\vec{v}_3=3\vec{b}_1+2\vec{b}_2+3\vec{b}_3$. Δείξτε ότι το $\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\right\}$ αποτελεί βάση του $V$.

**Άσκηση 20:** Έστω $V$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right\}$ μια διατεταγμένη βάση του $V$. Έστω $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in V$ με: $\vec{v}_1=\vec{b}_1+\vec{b}_2+2\vec{b}_3$, $\vec{v}_2=\vec{b}_1+\vec{b}_3$, $\vec{v}_3=2\vec{b}_1+\vec{b}_2+3\vec{b}_3$. Έστω επίσης: $\vec{w}_1=\vec{v}_1-\vec{v}_3$, $\vec{w}_2=\vec{v}_2-\vec{v}_1+\vec{v}_3$, $\vec{w}_3=\vec{v}_1$. Δείξτε ότι $\left\langle\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\right\rangle=\left\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\right\rangle$.

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

## *ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 5*

### ΑΣΚΗΣΗ 1

Διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι: 1) όλο το $\mathbb{R}^2$, 2) κάθε ευθεία που περνά από το $(0,0)$, και 3) το μονοσύνολο $\{(0,0)\}$

α) Ο $V$ αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $3x+y=0$ που περνά από το $(0,0)$ και άρα είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

2ος Τρόπος: έστω $\vec{v}_1=(x_1,y_1)$, $\vec{v}_2=(x_2,y_2)$ οποιαδήποτε $\vec{v}_1,\vec{v}_2 \in V$.

τότε $\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ με $3(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=$

$=(3x_1+y_1)+(3x_2+y_2)=0+0=0$ και άρα $\vec{v}_1+\vec{v}_2 \in V$

Επίσης, $\forall\ \vec{v}_1 \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε: $\lambda\vec{v}_1=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$

με $3(\lambda x_1)+(\lambda y_1)=\lambda(3x_1+y_1)=\lambda 0=0$ και άρα $\lambda\vec{v}_1 \in V$

Άρα $V \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό ως προς πρόσθεση & βαθμωτό πολ/σμό $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $V$ διανυσμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

β) Ο $V$ αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $3(x+2)=5y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+6=5y$ η οποία δεν περνά από το $(0,0)$ και άρα ο $V$ δεν είναι διανυσμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

2ος Τρόπος: $\forall\ \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in V$ έχουμε:

$\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ και $3\left[(x_1+x_2)+2\right]=3\left[(x_1+2)+x_2\right]=$

$=3(x_1+2)+3x_2=5y_1+5y_2-6=5(y_1+y_2)-6 \neq 5(y_1+y_2)$

και άρα $\vec{v}_1+\vec{v}_2 \notin V$

οπότε $V$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

γ) Ο V αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $3(x+2)-5y=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+6-5y=6 \Leftrightarrow 3x=5y$ που περνά από το $(0,0)$
και επομένως το V είναι διανυσμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
(2ος Τρόπος: όπως ερώτημα (α))

δ) $x^2+y^2=0 \underset{x,y\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} (x,y)=(0,0)$

Άρα $V=\{(0,0)\}$ δηλ. ο τετριμμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

## ΑΣΚΗΣΗ 2

α) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{(-1),(+)} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=U$, άρα $r(A)=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim N(A)=n-r(A)=0$

άρα μοναδική λύση του $A\vec{c}=\vec{0}$ είναι $\vec{c}=\vec{0}$
και επομένως τα διανύσματα γρ. ανεξάρτητα

β) $(1,1),(0,1),(1,0)\in\mathbb{R}^2$
Όμως $\dim\mathbb{R}^2=2=$ μέγιστο πλήθος γρ. ανεξάρτ. διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$
άρα $(1,1),(0,1),(1,0)$ είναι γρ. εξαρτημένα

γ) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{(-1),(+)} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=U$

άρα: $r(A)=2 \Rightarrow \dim N(A)=n-r(A)=3-2=1\neq 0$
άρα $\exists$ μη-μηδενικές λύσεις $(\vec{c}\neq\vec{0})$ για το σύστημα $A\vec{c}=\vec{0}$
και επομένως τα τρία διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα.

# ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Από την άσκηση 12(α) έχουμε ότι $(0,1)$, $(1,1)$ είναι γρ. ανεξάρτητα.

Όμως, επειδή $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, οποιαδήποτε 2 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ αποτελούν βάση του.

Άρα, το σύνολο $\{(0,1),(1,1)\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$

Επομένως, $\langle (0,1),(1,1) \rangle = \mathbb{R}^2$

β) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$, άρα $r(A) = 1$

και $\dim N(A) = n - r(A) = 2 - 1 = 1 \neq 0$, άρα το σύστημα $A\vec{c} = \vec{0}$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $(\vec{c} \neq \vec{0})$, οπότε τα $(-1,-1)$ και $(1,1)$ είναι γρ. εξαρτημένα

Επίσης, $\langle (1,1),(-1,-1) \rangle = \mathcal{R}(A)$ και άρα, {μια βάση του $\mathcal{R}(A)$} = {στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ που έχουν τους οδηγούς} = $\{(1,1)\}$

Επομένως $\langle (1,1),(-1,-1) \rangle = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (x,y) = \lambda(1,1) \} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle (1,1),(-1,-1) \rangle = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x = y \}$$

Δηλαδή, ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1), (-1,-1)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x$

γ) $(0,1), (1,0), (1,1) \in \mathbb{R}^2$ (3 διανύσματα του $\mathbb{R}^2$) άρα γρ. εξαρτημένα (αφού $\dim \mathbb{R}^2 = 2$)

Όμως $\{(0,1),(1,0)\}$ = κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, άρα

$$\langle (1,1),(0,1),(1,0) \rangle = \mathbb{R}^2$$

# ΑΣΚΗΣΗ 4

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-1)\\(+)\\ \\ \\ \end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ 1\\(+)\\ \\ \end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\(-1)\\(+)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

, άρα $r(A)=$ [πλήθος μη-μηδεν. γραμμών του $U$]

$\Rightarrow r(A)=3$

και $\dim N(A)=n-r(A)=4-3=1\neq 0$

άρα $\exists\ \vec{c}\neq\vec{0}$ τ.ω. $A\vec{c}=\vec{0}$ και τα διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα

Το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν ανν $\exists$ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Επειδή, έχουμε ήδη κάνει τη διαδικασία $A\underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow}U$, δεν χρειάζεται να κάνουμε όλη τη διαδικασία απαλοιφής Gauss $\left[A\,|\,\vec{b}\right]\underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow}\left[U\,|\,\vec{d}\right]$. Αρκεί να εφαρμόσουμε στο $\vec{b}$ τα ίδια στάδια απαλοιφής που εφαρμόσαμε στη διαδικασία $A\underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow}U$. Όμως, επειδή το $\vec{b}$ έχει τις 3 πρώτες συνιστώσες του ίσες με 0, αυτή η διαδικασία θα καταλήξει σε $\vec{d}=\vec{b}$. Άρα,

$$A\vec{x}=\vec{b}\Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{d}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

η τελευταία γραμμή δίνει $0\lambda_1+0\lambda_2+0\lambda_3+0\lambda_4=1$ που είναι αδύνατο.

Άρα, $(0,0,0,1)\notin\langle(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)\rangle$

## ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω $\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \lambda_3 \vec{w}_3 = \vec{0}$ , με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \lambda_2(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + \lambda_3(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_1\vec{v}_2 + \lambda_2\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_3 + \lambda_3\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v}_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\vec{v}_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)\vec{v}_3 = \vec{0}$$

η οποία, αφού $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γρ. ανεξάρτητα, δίνει:

$$\left.\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (+) \\ \phantom{0} \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ 1 \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$

Άρα $r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] = 3$

και $\dim N(A) = n - r(A) = 3 - 3 = 0$

Άρα $N(A) = \{(0,0,0)\}$ δηλ. μοναδική λύση της (1) είναι η $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$ και επομένως τα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ είναι γρ. ανεξάρτητα.

## ΑΣΚΗΣΗ 6

$$\left.\begin{aligned} u + v + w &= b_1 \\ u + 2v + 3w &= b_2 \\ v + 2w &= b_3 \end{aligned}\right\} \longrightarrow u\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Τα 3 διανύσματα στην αριστερή πλευρά είναι συνεπίπεδα
ανν τουλάχιστον ένα μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο

Εξετάζουμε αν το τρίτο μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων, δηλ. αν $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&2&3\\0&1&2\end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\,(+)} \left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&2\\0&1&2\end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\,(+)} \left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{array}\right]$$

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

$3^{\eta}$ εξίσωση: $0\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0$ που ικανοποιείται $\forall\, (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

$2^{\eta}$ εξίσωση: $\alpha_2 = 2$

$1^{\eta}$ εξίσωση: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 + 2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = -1$

Άρα: $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ και τα 3 διανύσματα είναι συνεπίπεδα

Το σύστημα έχει λύση ανν το $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ανήκει στο χώρο που παράγουν τα διανύσματα $(1,1,0)$, $(1,2,1)$ και $(1,3,2)$. Δηλαδή, ανν το $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα $(1,1,0)$, $(1,2,1)$ και περνά από το $(0,0,0)$. Δηλαδή όταν $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$ δηλαδή το $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1 + c_2\\c_1 + 2c_2\\c_2\end{bmatrix}, \quad \text{με } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

π.χ. για $c_1 = 1$ και $c_2 = -3$ έχουμε: $(b_1, b_2, b_3) = (-2, -5, -3)$

Το σύστημα γράφεται ως: $\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&1&2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-2\\-5\\-3\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$

Επειδή τα διανύσματα $(1,1,0)$, $(1,2,1)$ και $(1,3,2)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα η τάξη του $A$ είναι $r(A) < n$ και άρα το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις.

# ΑΣΚΗΣΗ 7

α) **$1^{ος}$ τρόπος:** Το $V$ περιέχει όλες τις 3άδες πραγματικών αριθμών $(x,y,z)$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις: $x=2y=3z$, δηλαδή: $x=2y$ & $x=3z$ ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \tag{1}$$

δηλαδή, είναι η τομή δύο επιπέδων που περνούν από το $(0,0,0)$. Άρα, το $V$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

**$2^{ος}$ τρόπος:**

Προφανώς $V \subseteq \mathbb{R}^3$ (εφόσον περιέχει 3άδες πραγματικών αριθμών)
και $V \neq \emptyset$ (ένα προφανές διάνυσμα του $V$ είναι το $(0,0,0)$)
Επιπλέον $\forall\ \vec{V}_1, \vec{V}_2 \in V$ με $\vec{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$
έχουμε: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$

$$\left.\begin{matrix} \text{με } x_1+x_2 = 2y_1+2y_2 = 2(y_1+y_2) \text{ και} \\ x_1+x_2 = 3z_1+3z_2 = 3(z_1+z_2) \end{matrix}\right\} \text{δηλ. } \vec{V}_1+\vec{V}_2 \in V$$

Άρα το $V$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Επίσης, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ και $\forall\ \vec{V}_1 \in V$ έχουμε:

$\lambda \vec{V}_1 = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

με $\lambda x_1 = \lambda(2y_1) = 2(\lambda y_1)$ και $\lambda x_1 = \lambda(3z_1) = 3(\lambda z_1)$, δηλ. $\lambda \vec{V}_1 \in V$

Άρα το $V$ είναι κλειστό και ως προς τον πολ/σμό με πραγματικό αριθμό και επομένως, είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

β) Αφού, ο $V$ περιέχει εκείνα τα διανύσματα $(x,y,z)$ τα οποία ικανοποιούν το σύστημα (1), συνεπάγεται ότι $V = \mathcal{N}(A)$ όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = U$$

Βασικές μεταβλητές: $x, y$
Ελεύθερη μεταβλητή: $z$

Ανάδρομη Αντικατάσταση:

$2^{\eta}$ εξίσωση: $2y-3z=0 \Rightarrow y=\dfrac{3}{2}z$

$1^{\eta}$ εξίσωση: $x-2y=0 \Rightarrow x-2\dfrac{3}{2}z=0 \Rightarrow x=3z$

δηλ. τα διανύσματα $\vec{v}\in V$ είναι της μορφής: $\vec{v}=\begin{bmatrix} 3z \\ \dfrac{3}{2}z \\ z \end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$.

δηλ. $\vec{v}=z\begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$

Επομένως, μια βάση του $V$ είναι το μονοσύνολο $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Άρα, κάθε βάση του $V$ έχει 1 διάνυσμα. Άρα, $\dim V=1$

γ) Επειδή $V=\mathcal{N}(A)$, ο συμπληρωματικός του $V$ στον $\mathbb{R}^3$ είναι ο χώρος γραμμών του $A$, δηλαδή ο $\mathcal{R}(A^T)$. Μια βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ είναι οι μη-μηδενικές γραμμές του $U$, δηλαδή {μια βάση του $\mathcal{R}(A^T)$} = $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$.

# ΑΣΚΗΣΗ 8

**$1^{ος}$ τρόπος:** Το $V$ περιέχει όλες τις 3άδες πραγματικών αριθμών $(x,y,z)$ που ικανοποιούν την εξίσωση: $2x+y+z=0$
δηλαδή, το $V$ είναι ένα επίπεδο που περνά από το $(0,0,0)$. Άρα, το $V$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

**$2^{ος}$ τρόπος:**

Προφανώς $V\subseteq\mathbb{R}^3$ και $V\neq\emptyset$.

Επίσης, $\forall\ \vec{V}_1,\vec{V}_2\in V$ με $\vec{V}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $V_2=(x_2,y_2,z_2)$

έχουμε: $\vec{V}_1+\vec{V}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$

και $2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=(2x_1+y_1+z_1)+(2x_2+y_2+z_2)=$
$=0+0=0$. Δηλ. $\vec{V}_1+\vec{V}_2 \in V$

Άρα, το $V$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Επίσης, $\forall\ \vec{V}_1=(x_1,y_1,z_1)\in V$ και $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$\lambda\vec{V}_1=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$ με $2(\lambda x_1)+(\lambda y_1)+\lambda z_1=\lambda(2x_1+y_1+z_1)=$
$=\lambda 0=0$. Δηλ. $\lambda\vec{V}_1\in V$

Άρα, το $V$ είναι κλειστό και ως προς τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό.
Επομένως, το $V$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Ο $V$ περιέχει εκείνα τα διανύσματα $(x,y,z)$ τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:
$2x+y+z=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z$

δηλ. τα διανύσματα $\vec{v}\in V$ είναι της μορφής: $\vec{v}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z\\ y\\ z\end{bmatrix}$, με $y,z\in\mathbb{R}$.

δηλ. $\vec{v}=y\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1/2\\0\\1\end{bmatrix}$, με $y,z\in\mathbb{R}$

Επιπλέον, τα $(-1/2,1,0)$ και $(-1/2,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Επομένως, μια βάση του $V$ είναι η $\left\{\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1/2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Άρα, κάθε βάση του $V$ έχει 2 διανύσματα. Άρα, $\dim V=2$

Μια άλλη βάση μπορούμε να πάρουμε αν αντικαταστήσουμε το $(-1/2,1,0)$ με ένα διάνυσμα της μορφής: $\vec{u}=\lambda_1\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-1/2\\0\\1\end{bmatrix}$, όπου $\lambda_1\neq 0$

π.χ. $\vec{u}=\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1/2\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow \vec{u}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

δηλαδή μια άλλη βάση του $V$ είναι η $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1/2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

Επίσης, σε αυτήν τη βάση, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $(-1/2,0,1)$ με ένα διάνυσμα της μορφής: $\vec{w} = \mu_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, όπου $\mu_2 \neq 0$.

π.χ. $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

δηλαδή μια άλλη βάση του $V$ είναι η $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

# ΑΣΚΗΣΗ 9

α) Έχουμε 8 στήλες $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_8 \in \mathbb{R}^5$. Όμως $\dim \mathbb{R}^5 = 5 =$
$=$ μέγιστο πλήθος γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^5$.
Άρα 8 στήλες ενός 5Χ8 πίνακα είναι πάντα γρ. εξαρτημένες, και η πρόταση είναι <u>αληθής</u>

β) {n γρ. ανεξάρτητες στήλες} $\Rightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow r(A) = n \Rightarrow$
$\Rightarrow$ [πλήθος ελεύθερων μεταβλητών] $= 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{μοναδική λύση αν } \vec{b} \in R(A) \\ \text{καμμία λύση αν } \vec{b} \notin R(A) \end{cases}$
Άρα, το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει μία ακριβώς λύση αν $\vec{b} \in R(A)$.
Για να ισχύει αυτό $\forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι $R(A) = \mathbb{R}^m$, άρα $\dim R(A) = m$, άρα $m = n$.
Δηλ. η πρόταση είναι αληθής $\forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ μόνο όταν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ δηλ. $m = n$ (τετραγωνικός πίνακας).

# ΑΣΚΗΣΗ 10

α) Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9$ δεν είναι γρ. ανεξάρτητα, γιατί $\dim \mathbb{R}^7 = 7 =$ = μέγιστο πλήθος γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^7$.

β) Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9 \in \mathbb{R}^7$ μπορεί να παράγουν τον $\mathbb{R}^7$, ανν 7 από αυτά είναι γρ. ανεξάρτητα.

Αν $<\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9> = V \subseteq \mathbb{R}^7$ ο χώρος που παράγουν τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9$, τότε $\dim V \leq 7$. Αν $\dim V = 7$ τότε $V = \mathbb{R}^7$ ενώ αν $\dim V < 7$ τότε $V \subset \mathbb{R}^7$ και τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_9$ δεν θα παράγουν τον $\mathbb{R}^7$

γ) Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{7\times 9}$ και επομένως $r(A) \leq 7$. Άρα

$\dim R(A) \leq 7$

$\{A\vec{x} = \vec{b}$ έχει λύση$\}$ ανν $\{\vec{b} \in R(A) \subseteq \mathbb{R}^7\}$

Αν $\dim R(A) = 7$ τότε $R(A) = \mathbb{R}^7$ και το $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει λύση $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^7$.

Αν $\dim R(A) < 7$, τότε $R(A) \subset \mathbb{R}^7$ οπότε $\exists \vec{b} \in \mathbb{R}^7$ για τα οποία το $A\vec{x} = \vec{b}$ δεν έχει λύση, και $\vec{b} \in \mathbb{R}^7$ για τα οποία το $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει λύση.

Άρα, γενικά, το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ μπορεί να μην έχει λύση

# ΑΣΚΗΣΗ 11

α) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 1$

Άρα $\dim R(A) = r(A) \Rightarrow \dim R(A) = 1$

$\{$Βάση του $R(A)\} = \{$στήλες του $A$ που αντιστοιχούν σε στήλες του $U$ με οδηγούς$\} = \{1^{\eta}$ στήλη του $A\} = \{(2,-1)\}$

Επίσης, $\dim N(A) = n - r(A) = 2-1 = 1$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

δηλ. τα διανύσματα του $N(A)$ είναι της μορφής: $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, με $y \in \mathbb{R}$

δηλ. της μορφής: $y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $y \in \mathbb{R}$

Επομένως, μια βάση του $N(A)$ είναι το μονοσύνολο $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Β) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$, άρα $r(A) = 1$

Επομένως $\dim R(A) = r(A) = 1$ και $\dim N(A) = n - r(A) = 2-1 = 1$

$\{$Βάση του $R(A)\} = \{$στήλες του $A$ που αντιστοιχούν σε στήλες του $U$ με οδηγούς$\} = \{(1,0)\}$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

δηλ. τα διανύσματα του $N(A)$ είναι της μορφής: $\begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$, με $y \in \mathbb{R}$

δηλ. της μορφής: $y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $y \in \mathbb{R}$

Επομένως, $\{$μια βάση του $N(A)\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

γ) $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=U$, άρα $r(A)=0$, $\mathcal{R}(A)=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$\dim \mathcal{R}(A)=r(A)=0$ και $\nexists$ βάση του $\mathcal{R}(A)$

$\dim \mathcal{N}(A)=n-r(A)=3-0=3$

Άρα $\left.\begin{cases}\mathcal{N}(A)\subseteq \mathbb{R}^3\\ \dim\mathcal{N}(A)=\dim\mathbb{R}^3\end{cases}\right\} \Rightarrow \mathcal{N}(A)=\mathbb{R}^3$

Άρα, {μια βάση του $\mathcal{N}(A)$} = {μια βάση του $\mathbb{R}^3$} = {οποιαδήποτε 3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$}

π.χ. {μια βάση του $\mathcal{N}(A)$} $=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

δ) $A=\begin{bmatrix}-1&1&4&3\\0&2&8&1\\-1&3&6&2\end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\cdot r_1 + r_3} \begin{bmatrix}-1&1&4&3\\0&2&8&1\\0&2&2&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\cdot r_2 + r_3}$

$\rightarrow \begin{bmatrix}-1&1&4&3\\0&2&8&1\\0&0&-6&-2\end{bmatrix}=U$, άρα $r(A)=3$

$\dim R(A)=r(A)=3$, $\dim \mathcal{N}(A)=n-r(A)=4-3=1$

{Βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς} = {1η, 2η, 3η στήλη του A}

$=\{(-1,0,-1),(1,2,3),(4,8,6)\}$

$$A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1&1&4&3\\0&2&8&1\\0&0&-6&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-6w-2z=0 \Leftrightarrow w=-\frac{1}{3}z\\ 2v+8w-z=0 \Rightarrow 2v=z-8w \Rightarrow v=\frac{1}{2}\left(z+\frac{8}{3}z\right) \Rightarrow v=\frac{11}{6}z\\ -u+v+4w+3z=0 \Rightarrow u=\frac{11}{6}z+4\left(-\frac{1}{3}\right)z+3z \Rightarrow u=\frac{7}{2}z\end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 7/2 \\ 11/6 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$, δηλ. $\{$βάση του $N(A)\} = \left\{\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{6}, -\frac{1}{3}, 1\right)\right\}$

# ΑΣΚΗΣΗ 12

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2)\ (-1) \\ (+) \\ \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ (+) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] \Rightarrow r(A) = 2$

Άρα: $\dim R(A) = \dim R(A^T) = r(A) = 2$

και $\dim N(A) = n - r(A) = 3 - 2 = 1$

$\dim N(A^T) = m - r(A) = 4 - 2 = 2$

όπου $\begin{cases} R(A) = \text{χώρος στηλών του } A \\ R(A^T) = \text{χώρος γραμμών του } A \\ N(A) = \text{μηδενόχωρος του } A \\ N(A^T) = \text{αριστερός μηδενόχωρος του } A \end{cases}$

$\{$μία βάση του $R(A)\} = \{$στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με τους οδηγούς$\} = \{$1η, 2η στήλη του $A\} = \{(1,2,0,1), (0,1,1,0)\}$

$\{$μία βάση του $R(A^T)\} = \{$οι μη-μηδενικές γραμμές του $U\} = \{$1η, 2η γραμμή του $U\}$

$= \{(1,0,1), (0,1,0)\}$

$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u + w = 0 \Leftrightarrow u = -w \\ w \in \mathbb{R} \end{cases}$

δηλ. $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w \in \mathbb{R}$

δηλ. $\{$μία βάση του $N(A)\} = \{(-1,0,1)\}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U'$$

$$A^T\vec{X} = 0 \Leftrightarrow U'\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v + w = 0 \Leftrightarrow v = -w \\ u + 2v + z = 0 \Leftrightarrow u = -2v - z \Rightarrow u = 2w - z \\ w, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα: $$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w - z \\ -w \\ w \\ z \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w, z \in \mathbb{R}$$

Δηλ. $\{$μία βάση του $N(A^T)\} = \{(2,-1,1,0), (-1,0,0,1)\}$

β)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 1$

$\dim R(A) = \dim R(A^T) = r(A) = 1$

$\dim N(A) = n - r(A) = 4 - 1 = 3$

$\dim N(A^T) = m - r(A) = 2 - 1 = 1$

$\{$μία βάση του $R(A)\} = \{$στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με οδηγούς$\} =$

$= \{2$η στήλη του $A\} = \{(2,6)\}$

$\{$μία βάση του $R(A^T)\} = \{$οι μη-μηδενικές γραμμές του $U\} = \{1$η γραμμή του $U\} =$

$= \{(0,2,3,0)\}$

$$A\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v + 3w = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{3}{2}w \\ u, w, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

δηλ. $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -3/2\, w \\ w \\ z \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad u, w, z \in \mathbb{R}$

Άρα, $\{$Βάση του $\mathcal{N}(A)\} = \{(1,0,0,0), (0,-\tfrac{3}{2},1,0), (0,0,0,1)\}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \\ 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3/2)\,(+)} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U'$$

$$A^T\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U'\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x + 6y = 0 \Rightarrow x = -3y$$

δηλ. τα διανύσματα του $\mathcal{N}(A^T)$ είναι της μορφής: $\begin{bmatrix} -3y \\ y \end{bmatrix}$, με $y \in \mathbb{R}$

δηλ. της μορφής: $y\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $y \in \mathbb{R}$

Άρα, $\{$μια βάση του $\mathcal{N}(A^T)\} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

γ) $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\,(+),\ 2\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/2)\,(+)}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = U$$

$r(A) = [$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U] = 3$

Άρα: $\dim R(A) = \dim R(A^T) = r(A) = 3$

$\dim \mathcal{N}(A) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$

$\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r(A) = 3 - 3 = 0$ και επομένως $\mathcal{N}(A^T) = \{(0,0,0)\}$

(δηλ. $A^T\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $(0,0,0)$) και $\nexists$ βάση του $\mathcal{N}(A^T)$

$\{$μια βάση του $\mathcal{R}(A)\} = \{$στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με τους οδηγούς$\}$

$= \{1$η, $2$η, $3$η στήλη του $A\} = \{(1,0,0), (-2,-6,0), (0,4,1)\}$

**Σημείωση:** επειδή $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ και $\dim \mathcal{R}(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, συνεπάγεται ότι $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^3$

Άρα, μια βάση του $\mathcal{R}(A)$ είναι οποιαδήποτε βάση του $\mathbb{R}^3$, π.χ. η κανονική βάση:
$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

$\{$μια βάση του $\mathcal{R}(A^T)\} = \{$οι μη-μηδενικές γραμμές του $U\} = \{$όλες οι γραμμές του $U\}$

$= \{(1,-2,0,0), (0,-6,4,6), (0,0,1,-3)\}$

$$A\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: $u, v, w$
Ελεύθερη μεταβλητή: $z$
<u>Ανάδρομη Αντικατάσταση:</u>

$w - 3z = 0 \Leftrightarrow w = 3z$

$-6v + 4w + 6z = 0 \Leftrightarrow v = \frac{2}{3}w + z \Rightarrow v = 3z$

$u - 2v = 0 \Leftrightarrow u = 2v \Rightarrow u = 6z$

$$\text{Άρα: } \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6z \\ 3z \\ 3z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

και $\{$μια βάση του $\mathcal{N}(A)\} = \{(6,3,3,1)\}$

δ)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/4)\ (+)} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 9/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{εναλλαγή } 2,4}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}4&3&2\\0&-7/4&9/2\\0&0&3\\0&0&4\end{bmatrix} \underset{(+)}{\overset{(-4/3)}{\longleftarrow}} \quad \longrightarrow \begin{bmatrix}4&3&2\\0&-7/4&9/2\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix} = U$$

$r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] = 3$

$\dim R(A) = \dim R(A^T) = r(A) = 3$

$\dim N(A) = n - r(A) = 3-3=0$, άρα $N(A) = \{(0,0,0)\}$

(δηλ. $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει μόνο τη μηδενική λύση $\vec{x}=(0,0,0)$) και $\nexists$ βάση του $N(A)$

$\dim N(A^T) = m - r(A) = 4-3 = 1$

{μία βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με τους οδηγούς} = {1η, 2η, 3η στήλη του A} =

$= \{(0,0,4,1), (0,0,3,-1), (3,4,2,5)\}$

[Εναλλακτικά, αφού $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει <u>μόνο</u> τη λύση $\vec{x}=(0,0,0)$, οι στήλες του A είναι γρ. ανεξάρτητες και άρα αποτελούν βάση του $R(A)$.]

{μία βάση του $R(A^T)$} = {οι μη-μηδενικές γραμμές του U} =

$= \{(4,3,2), (0,-\frac{7}{4}, 9/2), (0,0,3)\}$

$$A^T = \begin{bmatrix}0&0&4&1\\0&0&3&-1\\3&4&2&5\end{bmatrix} \text{εναλλαγή} \longrightarrow \begin{bmatrix}3&4&2&5\\0&0&3&-1\\0&0&4&1\end{bmatrix} \underset{(+)}{\overset{(-4/3)}{\longleftarrow}} \longrightarrow \begin{bmatrix}3&4&2&5\\0&0&3&-1\\0&0&0&7/3\end{bmatrix} = U'$$

$$A^T\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U'\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3&4&2&5\\0&0&3&-1\\0&0&0&7/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: $x, z, w$

Ελεύθερη μεταβλητή: $y$

<u>Ανάδρομη Αντικατάσταση:</u>

3η εξίσωση: $\frac{7}{3}w = 0 \Rightarrow w = 0$

2η εξίσωση: $3z - w = 0 \Rightarrow z = 0$

1η εξίσωση: $3x + 4y + 2z + 5w = 0 \Rightarrow 3x + 4y = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}y$

δηλ. τα διανύσματα του $\mathcal{N}(A^T)$ είναι της μορφής: $\left(-\frac{4}{3}y, y, 0, 0\right)$, με $y \in \mathbb{R}$

δηλ. της μορφής: $y\left(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0\right)$, με $y \in \mathbb{R}$

Άρα, {μια βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ } $= \left\{ \begin{bmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

# ΑΣΚΗΣΗ 13

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

α) $AB = O \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}}_{n \times p} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{m \times p}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{ A\vec{b}_1 = \vec{0}, \ A\vec{b}_2 = \vec{0}, \dots, A\vec{b}_p = \vec{0} \}$, δηλαδή κάθε στήλη $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p$ του $B$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος $A\vec{X} = \vec{0}$ και επομένως $R(B) \subseteq N(A)$ (1)

B) $AB=0 \Rightarrow (AB)^T=0 \Rightarrow B^TA^T=0$, οπότε σύμφωνα με τη σχέση (1), $R(A^T)\subseteq N(B^T)$ δηλ. το ζητούμενο.

# ΑΣΚΗΣΗ 14

Για κάθε διάνυσμα $(x,y,z)$ το οποίο ικανοποιεί τη σχέση: $x+2y+4z=0$, έχουμε:

$$x+2y+4z=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

δηλαδή, αν $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ τότε ο $N(A)$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα $(x,y,z)$ για τα οποία $x+2y+4z=0$.

Ένας πίνακας 3x3 με γραμμές πολλαπλάσια του $[1 \;\; 2 \;\; 4]$ έχει τον ίδιο μηδενόχωρο (αφού σ' αυτήν την περίπτωση οι 3 εξισώσεις του συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$ έχουν τις ίδιες λύσεις, οπότε το σύνολο λύσεων καθεμίας ταυτίζεται με το σύνολο λύσεων του συστήματος)

π.χ. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 8\\ 3 & 6 & 12\end{bmatrix}$

# ΑΣΚΗΣΗ 15

Έστω $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$\{A\vec{x}=\vec{b}$ έχει πάντοτε μια λύση τουλάχιστον$\}$

ανν $\{A\vec{x}=\vec{b}$ έχει λύση (μοναδική ή άπειρες) $\forall\, \vec{b}\in\mathbb{R}^m\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{R(A)=\mathbb{R}^m\} \Leftrightarrow \{\dim R(A)=m\} \Leftrightarrow r(A)=m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\dim N(A^T)}_{m-r(A)}=0 \Leftrightarrow N(A^T)=\{(0,0,\ldots,0)\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{A^T\vec{y}=\vec{0}$ έχει τη μοναδική λύση $\vec{y}=(0,0,\ldots,0)\}$

# ΑΣΚΗΣΗ 16

α) Έστω ο πίνακας $A$ με στήλες τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Δηλαδή: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

και άρα $V \equiv \mathcal{R}(A)$

Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-1) \\ \leftarrow (+) \\ \phantom{0} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

οπότε: $\dim V = \dim \mathcal{R}(A) = r(A) =$ [πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών του $U$] $= 2$

{μια βάση του $V$} = {μια βάση του $\mathcal{R}(A)$} = {οι στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με οδηγούς} = {$1^η$, $2^η$ στήλη του $A$} $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

β) Θέλουμε $\mathcal{R}(B^T) \equiv V$, δηλαδή οι γραμμές του $B$ να είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

Παράδειγμα: $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \leftarrow 2\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 \\ \leftarrow 0\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 \end{array}$

γ) Ψάχνουμε πίνακα $\Gamma$ τ.ω. $\mathcal{N}(\Gamma) \equiv V$ δηλαδή, $\mathcal{N}(\Gamma) \equiv \mathcal{R}(B^T)$

Όμως, ο συμπληρωματικός του $\mathcal{N}(\Gamma)$ είναι ο $\mathcal{R}(\Gamma^T)$

& ο συμπληρωματικός του $\mathcal{R}(B^T)$ είναι ο $\mathcal{N}(B)$. Άρα θα πρέπει $\mathcal{R}(\Gamma^T) \equiv \mathcal{N}(B)$

Έτσι, για τον παραπάνω πίνακα $B$ έχουμε:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-1) \quad (-2) \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \phantom{0} \\ 2 \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_B$$

Άρα: $B\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_B \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: $x, y$

Ελεύθερη μεταβλητή: $z$

<u>Ανάδρομη Αντικατάσταση:</u>
$2^{\eta}$ εξίσωση: $-y=0 \Rightarrow y=0$
$1^{\eta}$ εξίσωση: $2x+3y=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

δηλ. τα διανύσματα του $\mathcal{N}(B)$ [και άρα και του $\mathcal{R}(\Gamma^T)$] είναι της μορφής: $(0,0,z)$, με $z \in \mathbb{R}$

Επομένως, ο $\Gamma$ θα έχει γραμμές της μορφής $\begin{bmatrix} 0 & 0 & z \end{bmatrix}$

$$\text{π.χ.} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

# ΑΣΚΗΣΗ 17

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ δηλ. $W_1 = R(A)$

έχουμε: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\,(+),\ 1\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-4/3)\,(+)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

Άρα: $\dim W_1 = \dim R(A) = r(A) = 2$

{βάση του $W_1$} = {βάση του $R(A)$} = {στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με οδηγούς} = {όλες οι στήλες του $A$} = $\{(1,-1,-1), (1,2,3)\}$

Το μη-μηδενικό διάνυσμα $(5,1,3)$ που παράγει το $W_2$ είναι γρ. ανεξάρτητο (όπως κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα μόνο του) και άρα {βάση του $W_2$} = $\{(5,1,3)\}$

β) Έστω $\vec{v}_1 = (1,-1,-1)$, $\vec{v}_2 = (1,2,3)$, $\vec{v}_3 = (5,1,3)$

Ο $W_1 \cap W_2$ περιέχει όλα εκείνα τα διανύσματα $\vec{v}$ του $\mathbb{R}^3$ για τα οποία $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ <u>και ταυτόχρονα</u> $\vec{v} = \lambda_3 \vec{v}_3$.

Άρα $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$ ανν $\exists \lambda_3 \neq 0$ τ.ω. $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_3 \vec{v}_3$, δηλ. $\vec{v}_3 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\vec{v}_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\vec{v}_2$

δηλ. $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$ ανν $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ γρ. εξαρτημένα$\}$

Σχηματίζουμε τον πίνακα $B$ με στήλες τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, και έχουμε:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1\ 1 \\ (+) \\ (+) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-4/3) \\ (+) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_B$$

$\dim \mathcal{N}(B) = n - r(B) = 3 - 2 = 1 \neq 0$

Άρα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ γρ. εξαρτημένα και άρα $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$

Έχουμε επίσης ότι $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ γρ. ανεξάρτητα, ενώ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ γρ. εξαρτημένα, άρα $\vec{v}_3 \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \Rightarrow \vec{v}_3 \in W_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (βάση του $W_2$) $\in W_1 \underset{W_2 \neq W_1}{\Rightarrow} W_2 \subset W_1 \Longrightarrow W_1 \cap W_2 = W_2$

γ) Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι $W_1 \equiv \mathcal{R}(A)$. Άρα ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $W_1$ είναι ο $\mathcal{N}(A^T)$.

Έχουμε:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (+) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = U'$$

$$A^T \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U' \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

Βασικές μεταβλητές: $u, v$

Ελεύθερη μεταβλητή: $w$

<u>Ανάδρομη Αντικατάσταση:</u>

$2^η$ εξίσωση: $3v + 4w = 0 \Rightarrow v = -\frac{4}{3}w$

$1^η$ εξίσωση: $u - v - w = 0 \Rightarrow u + \frac{4}{3}w - w = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{3}w$

δηλ. τα διανύσματα του $\mathcal{N}(A^T)$ είναι της μορφής: $\left(-\frac{1}{3}w, -\frac{4}{3}w, w\right)$, με $w \in \mathbb{R}$

δηλ. της μορφής: $w\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3},1\right)$, με $w\in\mathbb{R}$

Άρα, {μια βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ } = $\left\{\begin{bmatrix}-1/3\\-4/3\\1\end{bmatrix}\right\}$

# ΑΣΚΗΣΗ 18

Οι συνιστώσες των $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}$ είναι $(1,1,2)$, $(1,0,1)$ και $(2,1,3)$. Σχηματίζουμε τον πίνακα $A$ με στήλες αυτές τις συνιστώσες, δηλαδή:

$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&1\\2&1&3\end{bmatrix}$ και ο $\mathcal{R}(A)$ ταυτίζεται με τον $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\rangle$ με την επισήμανση ότι οι στήλες του $A$ είναι γραμμένες ως προς τη βάση $\mathbb{B}=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$.

Έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&1\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\ (-2)\\ (+)\\ (+)\end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\(-1)\\(+)\end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=U$$

{μια βάση του $\mathcal{R}(A)$ } = {οι στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ με οδηγούς} = { $1^η$ , $2^η$ στήλη του $A$ } = $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

Επομένως: {μια βάση του $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\rangle$} = $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$

# ΑΣΚΗΣΗ 19

Η βάση $\mathbb{B}$ αποτελείται από 3 διανύσματα, και άρα: $\dim V=3$

Επομένως, οποιαδήποτε 3άδα γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $V$ είναι βάση του. Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&0&3\end{bmatrix}$ ο πίνακας με στήλες τις συνιστώσες των $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ ως προς $\mathbb{B}$

Έχουμε: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$

Άρα, τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και το $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ είναι μια βάση του $V$

## ΑΣΚΗΣΗ 20

Τα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ και άρα ο $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$. Σε αυτήν την περίπτωση, $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ ανν $\dim \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle = \dim \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$. Δηλαδή, <u>αρκεί να δείξουμε ότι έχουν την ίδια διάσταση.</u>

Σχηματίζουμε τον πίνακα $A$ με στήλες τις συνιστώσες των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}$, δηλαδή: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και ο $\mathcal{R}(A)$ ταυτίζεται με τον $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ με την επισήμανση ότι οι στήλες του $A$ είναι γραμμένες ως προς τη βάση $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \quad (-2) \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα: $\dim \mathcal{R}(A) = r(A) = 2$, δηλ. $\dim \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = 2$

Επίσης: $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 - 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3 = -\vec{b}_1 - \vec{b}_3$

$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3 - \vec{b}_1 - \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3 + 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_3$

$\vec{w}_3 = \vec{v}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$

Σχηματίζουμε τον πίνακα $B$ με στήλες τις συνιστώσες των $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}$, δηλαδή: $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ και ο $\mathcal{R}(B)$ ταυτίζεται με τον $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle$ με την επισήμανση ότι οι στήλες του $B$ είναι γραμμένες ως προς τη βάση $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

Έχουμε:

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix} \begin{matrix}(-1)\\ \\ (+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{matrix}\\ (-1)\\ (+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=U_B$$

Άρα: $\dim \mathcal{R}(B)=r(B)=2$, δηλ. $\dim\left\langle \vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\right\rangle=2$

Συνεπώς, $\dim\left\langle \vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\right\rangle=\dim\left\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\right\rangle$