ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

«Γραμμική Άλγεβρα» (ΗΥ119) – Χειμερινό Εξάμηνο 2009-2010
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

4^{o} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να επιλύσετε καθένα από τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων:

α) $\begin{cases} 2u-3v-z=5 \\ 4u+v-2w+3z=-1 \\ -2u+7v+w=3 \\ -u+v+3w-z=1 \end{cases}$, β) $\begin{cases} 2u+v+w=5 \\ 4u+2v+2w=6 \\ -2u+7v+2w=9 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} u+v+w=2 \\ 2u+3w=5 \\ 3u+v+4w=6 \end{cases}$, δ) $\begin{cases} u+v+w-2z=2 \\ 2u+3w-z=5 \\ -u+3v-w+z=-3 \\ 4u+8v+6w-4z=8 \end{cases}$

Άσκηση 2: Χρησιμοποιήστε απαλοιφή Gauss για να λύσετε τα ακόλουθα συστήματα:

α) $\begin{cases} u+4v+2w=-2 \\ -2u-8v+3w=32 \\ v+w=1 \end{cases}$, β) $\begin{cases} v+w=0 \\ u+v=0 \\ u+v+w=1 \end{cases}$

Άσκηση 3: Έστω το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} u+v+w&=-2 \\ 2u+2v-w&=5 \\ u-3v+2w&=-1 \end{aligned}$$

α) Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να το επιλύσετε.
β) Αλλάξτε το συντελεστή του v στην τρίτη εξίσωση, ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύση.
γ) Αλλάξτε τη σταθερά στο δεξί μέλος της νέας εξίσωσης, έτσι ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 4: Βρείτε την τάξη των ακόλουθων πινάκων, για τις διαφορετικές τιμές των πραγματικών αριθμών λ, α. Τι συμπέρασμα βγάζεται για τη λύση των ομογενών συστημάτων $A\vec{x}=\vec{0}$ και $B\vec{x}=\vec{0}$;
Βρείτε τις λύσεις τους για τις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων λ, α.

α) $A=\begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, β) $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+1 \\ 1 & \alpha-1 & 1 \\ 1+\alpha & -1 & \alpha^2+4\alpha+1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 5: Έστω $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

α) Χωρίς να υπολογίσετε οτιδήποτε, τι συμπέρασμα βγάζετε για τη λύση του συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$;
β) Ποια είναι η τάξη του A;
γ) Προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$ και βρείτε τη λύση του.
δ) Τι έχετε να παρατηρήσετε για το πλήθος λύσεων του μη-ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{b}$; Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{b}$, έτσι ώστε το $A\vec{x}=\vec{b}$ να έχει λύση (δηλαδή, να μην είναι αδύνατο);
ε) Αλλάξτε κατάλληλα το στοιχείο $(A)_{34}$ έτσι ώστε το $A\vec{x}=\vec{b}$ να έχει άπειρες λύσεις $\forall\, \vec{b}\in\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 6: Προσδιορίστε την κλιμακωτή μορφή U, τις βασικές μεταβλητές, τις ελεύθερες μεταβλητές και τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$, για

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 8 & 0\end{bmatrix}.$$

Ποια είναι η τάξη του πίνακα A; Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{b}$, έτσι ώστε το μη-ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ να έχει λύση. Σ' αυτήν την περίπτωση, γράψτε τη γενική λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$ ως άθροισμα μιας ειδικής του λύσης και της γενικής λύσης του ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$.

Άσκηση 7: Έστω οι πίνακες της άσκησης 1 του $2^{ου}$ φυλλαδίου: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\ 7 & -1 & -3 & 4\\ 6 & 5 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 1 & -4\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 11 & -2 & 1\end{bmatrix}$,

από τη λύση της οποίας ξέρουμε ότι $\det A=-56$, $\det B=0$, καθώς και τον A^{-1}.

α) Ποιο συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε άμεσα για την τάξη κάθε πίνακα, από τις τιμές των $\det A$ και $\det B$;

β) Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις λύσεις των ομογενών συστημάτων $A\vec{x}=\vec{0}$ και $B\vec{y}=\vec{0}$;

γ) Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις λύσεις των μη-ομογενών συστημάτων $A\vec{x}=\vec{b}$ και $B\vec{y}=\vec{b}$, με $\vec{b}\neq\vec{0}$;

δ) Ποια η λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$ για $\vec{b}=(1,2,0,-3)$;

Άσκηση 8: Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

α) Αν κάθε γραμμή του A έχει άθροισμα στοιχείων μηδέν, δείξτε ότι $\det A=0$.

β) Αν κάθε γραμμή του A έχει άθροισμα στοιχείων 1, δείξτε ότι $\det(A-I)=0$. Δείξτε με κάποιο παράδειγμα ότι αυτό <u>δεν</u> σημαίνει $\det A=1$.

Άσκηση 9: Βρείτε παραδείγματα πραγματικών πινάκων 2×2, τέτοιων ώστε:

α) $CD=-DC$, με $CD\neq O$,

β) $EF=O$, χωρίς κανένα στοιχείο των E & F να είναι 0.

Άσκηση 10: Επιλύστε τα παρακάτω συστήματα με αγνώστους $x,y,z\in\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Cramer: α) $\begin{cases}ax+by=1\\ cx+dy=0\end{cases}$, β) $\begin{cases}x+2y+z=3\\ 3x-2y-4z=-2\\ 2x+3y-z=-6\end{cases}$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 4

ΑΣΚΗΣΗ 1

α)

$$\left[A \mid \vec{b}\right] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 & | & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & | & -1 \\ -2 & 7 & 1 & 0 & | & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (-2) \quad 1 \quad 1/2 \quad (+) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 & | & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & | & -11 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & | & 8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & | & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \quad (-4/7) \quad 1/14 \quad (+) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 & | & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & | & -11 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{27}{7} & | & \frac{100}{7} \\ 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{8}{7} & | & \frac{19}{7} \end{bmatrix} \quad (-4/3) \quad (+) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 & | & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & | & -11 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{27}{7} & | & \frac{100}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{28}{7} & | & -\frac{343}{21} \end{bmatrix} = \left[U \mid \vec{d}\right]$$

Βασικές μεταβλητές: u, v, w, z
Ελεύθερες μεταβλητές: καμία

<u>Ανάδρομη Αντικατάσταση:</u>

4η Εξίσωση: $\frac{28}{7}z=-\frac{343}{21} \Rightarrow z=-\frac{49}{12}$

3η Εξίσωση: $\frac{15}{7}w-\frac{27}{7}z=\frac{100}{7} \Rightarrow 15w-27\left(-\frac{49}{12}\right)=100 \Rightarrow w=-\frac{41}{60}$

2η Εξίσωση: $7v-2w+5z=-11 \Rightarrow 7v-2\left(-\frac{41}{60}\right)+5\left(-\frac{49}{12}\right)=-11 \Rightarrow v=\frac{161}{140}$

1η Εξίσωση: $2u-3v-z=5 \Rightarrow 2u-3\frac{161}{140}-\left(-\frac{49}{12}\right)=5 \Rightarrow u=\frac{131}{60}$

Δηλαδή, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση: $(u,v,w,z)=\left(\frac{131}{60},\frac{161}{140},-\frac{41}{60},-\frac{49}{12}\right)$

β)

$$\left[A\,\middle|\,\vec{b}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right]\begin{array}{l}(-2)\quad 1\\ \leftarrow(+)\\ \leftarrow(+)\end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \text{εναλλαγή}\\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]=\left[U\,\middle|\,\vec{d}\right]$$

3η Εξίσωση: $0u+0v+0w=-4 \Rightarrow 0=-4 \longrightarrow$ **ΑΔΥΝΑΤΟ**

Άρα το σύστημα <u>δεν έχει λύση</u>

γ)

$$\left[A\,\middle|\,\vec{b}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{l}(-2)\quad(-3)\\ \leftarrow(+)\\ \leftarrow(+)\end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l}\\ (-1)\\ \leftarrow(+)\end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

3η εξίσωση: $0u + 0v + 0w = -1 \Rightarrow 0 = -1 \longrightarrow$ **ΑΔΥΝΑΤΟ**

Άρα το σύστημα <u>δεν έχει λύση</u>

δ)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 8 & 6 & -4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)\ (+),\quad 1\ (+),\quad (-4)\ (+)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{2\ (+),\quad 2\ (+)}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)\ (+)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[U \mid \vec{d}\right]$$

Βασικές μεταβλητές: u, v, w
Ελεύθερες μεταβλητές: z

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

4η εξίσωση: $0u + 0v + 0w + 0z = 0$ που ικανοποιείται $\forall (u,v,w,z) \in \mathbb{R}^4$

3η εξίσωση: $2w + 5z = 1 \Leftrightarrow w = \dfrac{1-5z}{2}$

2η εξίσωση: $-2v + w + 3z = 1 \Rightarrow v = \dfrac{z-1}{4}$

1η εξίσωση: $u + v + w - 2z = 2 \Rightarrow u = \dfrac{17z+7}{4}$

Δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\left(\frac{17z+7}{4},\ \frac{z-1}{4},\ \frac{1-5z}{2},\ z\right), \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

Οι οποίες, χωρίζοντας τους συντελεστές του z, μπορούν να γραφτούν και ως εξής:

$$\left(\frac{7}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 0\right) + z\left(\frac{17}{4},\ \frac{1}{4},\ -\frac{5}{2},\ 1\right), \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α)
$$\left[A \,|\, \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & -8 & 3 & 32 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2 \\ (+) \\ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{εναλλαγή} \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 28 \end{array}\right] = \left[U \,|\, \vec{d}\right]$$

Βασικές μεταβλητές: u, v, w
Ελεύθερες μεταβλητές: καμία

Ανάδρομη αντικατάσταση:

3η εξίσωση: $7w = 28 \Leftrightarrow w = 4$

2η εξίσωση: $v + w = 1 \Leftrightarrow v = 1 - w \Rightarrow v = -3$

1η εξίσωση: $u + 4v + 2w = -2 \Leftrightarrow u = -2 - 4v - 2w \Rightarrow u = 2$

Δηλαδή, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση: $(u, v, w) = (2, -3, 4)$

β)
$$\left[A \,|\, \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{εναλλαγή} \\ \\ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1) \\ \\ (+) \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[U \,|\, \vec{d}\right]$$

Βασικές μεταβλητές: u, v, w
Ελεύθερες μεταβλητές: καμία

Ανάδρομη αντικατάσταση:

3η εξίσωση: $w = 1$

2η εξίσωση: $v + w = 0 \Leftrightarrow v = -w \Rightarrow v = -1$

1η εξίσωση: $u + v = 0 \Leftrightarrow u = -v \Rightarrow u = 1$

Δηλαδή, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση: $(u, v, w) = (1, -1, 1)$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α)

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2)\ (-1) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{εναλλαγή}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right] = [U \mid \vec{d}]$$

Βασικές μεταβλητές: u, v, w
Ελεύθερες μεταβλητές: καμία

Ανάδρομη Αντικατάσταση:

3η εξίσωση: $-3w = 9 \iff w = -3$
2η εξίσωση: $-4v + w = 1 \Rightarrow v = -1$
1η εξίσωση: $u + v + w = -2 \Rightarrow u = 2$

δηλ. $(u, v, w) = (2, -1, -3)$ μοναδική λύση

β) Έστω λ ο συντελεστής του v στην 3η εξίσωση. Τότε:

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & \lambda & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2)\ (-1) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{εναλλαγή}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right]$$

Αν $\lambda - 1 \neq 0$ (δηλ. $\lambda \neq 1$) έχουμε $r(A) = 3$ [δηλ. $r(A) = n$] και άρα το εν λόγω **<u>τετραγωνικό σύστημα</u>** έχει μοναδική λύση. Από την άλλη, αν $\lambda = 1$, ο τελευταίος επαυξημένος πίνακας γίνεται:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 3 \\ (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right] = [U \mid \vec{d}]$$

3η εξίσωση: $0u + 0v + 0w = 12 \Rightarrow 0 = 12 \longrightarrow$ **ΑΔΥΝΑΤΟ**

και το σύστημα <u>δεν έχει λύση</u>

γ) Έστω b η σταθερά στο δεξί μέλος της 3ης εξίσωσης. Τότε:

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & b \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2)\ (-1) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & b+2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (1/3) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & b+5 \end{array}\right] = [U \mid \vec{d}]$$

Βασικές μεταβλητές: u, w
Ελεύθερες μεταβλητές: v

3η εξίσωση: $0u + 0v + 0w = b+5$. Άρα, υπάρχει λύση ανν b=-5

Σ' αυτήν την περίπτωση, έχουμε: 2η εξίσωση: $-3w = 9 \Leftrightarrow w=-3$

1η εξίσωση: $u+v+w=-2 \Rightarrow u=1-v$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: (1-v, v, -3), με $v \in \mathbb{R}$

Δηλ. $(1, 0, -3) + \underbrace{v(-1, 1, 0)}_{\text{γενική λύση του } A\vec{x}=\vec{0}}$, με $v \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Γενικά, η τάξη ενός μη-μηδενικού πίνακα (δηλ. $A \neq O$) μπορεί να είναι μεταξύ 1 και $\min(m,n)$, δηλαδή: $1 \leq r(A) \leq \min(m,n)$.

α) Ο πίνακας A είναι 2×2, άρα $1 \leq r(A) \leq 2$, δηλαδή είτε $r(A)=1$, είτε $r(A)=2$.
Όμως, για ένα **<u>τετραγωνικό πίνακα</u>**:

$$r(A)=n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \left\{\text{το σύστημα } A\vec{x}=\vec{0} \text{ έχει μοναδική λύση τη } \vec{x}=\vec{0}\right\}$$

και άρα,

$$r(A)<n \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \left\{\text{το σύστημα } A\vec{x}=\vec{0} \text{ έχει άπειρες λύσεις}\right\}$$

Επομένως, στο παράδειγμα μας: $r(A)=2 \Leftrightarrow \det A \neq 0$ και $r(A)=1 \Leftrightarrow \det A = 0$

Έχουμε: $\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 4\lambda - 12$, και άρα: $\det A = 0 \Leftrightarrow 4\lambda-12=0 \Leftrightarrow \lambda = 3$

Επομένως: $\begin{cases} r(A)=1, & \text{για } \lambda=3 \\ r(A)=2, & \text{για } \lambda\neq 3 \end{cases}$

Δηλαδή: $\begin{cases} \text{για } \lambda=3, \text{ το σύστημα } A\vec{x}=\vec{0} \text{ έχει άπειρες λύσεις} \\ \text{για } \lambda\neq 3, \text{ το σύστημα } A\vec{x}=\vec{0} \text{ έχει μοναδική λύση τη } \vec{x}=(0,0) \end{cases}$

Στην περίπτωση που $\lambda=3$, για να βρούμε τη μορφή των άπειρων λύσεων εφαρμόζουμε απαλοιφές στον A, δηλ.:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=U$$

Όμως, $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Βασική μεταβλητή: x_1
Ελεύθερη μεταβλητή: x_2

Άρα: $3x_1+2x_2=0 \Rightarrow x_1=-\dfrac{2}{3}x_2$

Συνεπώς, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\left(-\dfrac{2}{3}x_2, x_2\right)$ με $x_2\in\mathbb{R}$

δηλαδή της μορφής: $x_2\left(-\dfrac{2}{3}, 1\right)$ με $x_2\in\mathbb{R}$

β) Μετατρέπω τον B σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+1 \\ 1 & \alpha-1 & 1 \\ 1+\alpha & -1 & \alpha^2+4\alpha+1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \quad -(1+\alpha) \\ \leftarrow(+) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+1 \\ 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha^2+\alpha \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \leftarrow(+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+1 \\ 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha^2+3\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+1 \\ 0 & \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha(\alpha-3) \end{bmatrix} = U$$

$r(B) = \{\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U\} \Rightarrow r(B) = \begin{cases} 3, & \text{για } \alpha \in \mathbb{R} - \{0,3\} \\ 2, & \text{για } \alpha = 3 \\ 1, & \text{για } \alpha = 0 \end{cases}$

Δηλαδή: $\begin{cases} \text{για } \alpha \neq 0 \text{ και } \alpha \neq 3, \text{ το σύστημα } B\vec{x} = \vec{0} \text{ έχει μοναδική λύση τη } \vec{x} = (0,0,0) \\ \text{για } \alpha = 3 \text{ ή } \alpha = 0, \text{ το σύστημα } B\vec{x} = \vec{0} \text{ έχει άπειρες λύσεις} \end{cases}$

Για $\alpha = 3$ έχουμε: $B\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x, y

Ελεύθερη μεταβλητή: z

Ανάδρομη αντικατάσταση:

3^{η} εξίσωση: ικανοποιείται ταυτοτικά $\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

2^{η} εξίσωση: $3y - 6z = 0 \Leftrightarrow y = 2z$

1^{η} εξίσωση: $x - y + 7z = 0 \Rightarrow x - 2z + 7z = 0 \Leftrightarrow x = -5z$

δηλαδή, για $\alpha = 3$ το σύστημα $B\vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} \quad \text{δηλαδή,} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{με } z \in \mathbb{R}$$

Για $\alpha = 0$ έχουμε: $B\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασική μεταβλητή: x

Ελεύθερη μεταβλητές: y, z

2^{η} και 3^{η} εξίσωση: ικανοποιούνται ταυτοτικά $\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

1^{η} εξίσωση: $x - y + z = 0 \Leftrightarrow x = y - z$

δηλαδή, για $\alpha = 0$ το σύστημα $B\vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{δηλαδή,} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{με } y, z \in \mathbb{R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Επειδή το σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ είναι ομογενές, δεν γίνεται να είναι αδύνατο (καμία λύση). Επιπλέον, το σύστημα έχει λιγότερες εξισώσεις (3) από αγνώστους (4) και άρα δεν μπορεί να έχει ούτε μοναδική λύση. Επομένως, το $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει **<u>άπειρες λύσεις</u>**

β)
$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}(-1)\\ \\ (+)\end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

$r(A)=$ [πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U] $\Rightarrow r(A)=2$

γ)
$$A\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

βασικές μεταβλητές: u, v (αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς)
Ελεύθερες » : w, z (» σε » χωρίς »)

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

3^{η} εξίσωση: ικανοποιείται ταυτοτικά

2^{η} εξίσωση: $v+w=0\Leftrightarrow v=-w$

1^{η} εξίσωση: $u+2v+z=0\Leftrightarrow u=-2v-z\Rightarrow u=2w-z$

Άρα: $\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2w-z\\-w\\w\\z\end{bmatrix}$ δηλαδή $\begin{bmatrix}u\\v\\w\\z\end{bmatrix}=w\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ με $w, z\in\mathbb{R}$

δ) Το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει λιγότερες εξισώσεις (3) από αγνώστους (4) και άρα δεν γίνεται να έχει μοναδική λύση. Εξαρτάται από το $\vec{b}$ αν θα έχει **<u>άπειρες λύσεις</u>** ή **<u>καμία λύση</u>**

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από το γεγονός ότι
{πλήθος ελεύθερων μεταβλητών} $\neq 0$

Επειδή ήδη ξέρουμε τον U, για να βρούμε τη λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$ δεν χρειάζεται να σχηματίσουμε τον επαυξημένο πίνακα $\left[A\,|\,\vec{b}\right]$ και να κάνουμε απαλοιφή σ' αυτόν.

Αρκεί να εφαρμόσουμε τις ίδιες απαλοιφές μόνο στο $\vec{b}$, και θα φτάσουμε σε ένα διάνυσμα $\vec{d}$, τέτοιο ώστε: $A\vec{x}=\vec{b}\Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{d}$. Έτσι, έχουμε:

$$\vec{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \downarrow \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3-b_1 \end{bmatrix}=\vec{d}$$

Άρα: $U\vec{x}=\vec{d} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3-b_1 \end{bmatrix}$

Η 3^{η} εξίσωση δίνει: $0u+0v+0w+0z=b_3-b_1 \;\Rightarrow\; 0=b_3-b_1$
Άρα, για $b_3 \neq b_1$ το σύστημα είναι αδύνατο (καμία λύση),
ενώ αν $b_3=b_1$ το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις.

ε) Επειδή ο A έχει λιγότερες γραμμές από στήλες (δηλαδή $m<n$), το σύστημα έχει άπειρες λύσεις $\forall\, \vec{b}\in\mathbb{R}^3$ ανν $r(A)=m$ δηλαδή $r(A)=3$
Αυτό είναι αληθές αν ο U έχει 3 μη-μηδενικές γραμμές.
Έστω λοιπόν ότι $(A)_{34}=\lambda$, τότε έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \downarrow \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}=U$$

Άρα, αρκεί $\lambda \neq 0$ δηλαδή $(A)_{34}\neq 0$. Π.χ. $(A)_{34}=-2$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 6}}$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \downarrow(+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=U$$

Άρα: $A\vec{X}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{X}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1)

βασική μεταβλητή: v (αντιστοιχεί σε στήλη με οδηγό)
ελεύθερες μεταβλητές: u, w, z (αντιστοιχούν σε στήλες χωρίς οδηγό)

$(1) \Rightarrow v+4w=0 \Leftrightarrow v=-4w$

Άρα, γενική λύση του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -4w \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad \text{δηλ.} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = u\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{με } u,w,z \in \mathbb{R}$$

$r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] = 1$

Το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει λιγότερες εξισώσεις (2) από αγνώστους (4) και άρα δεν γίνεται να έχει μοναδική λύση. Εξαρτάται από το $\vec{b}$ αν θα έχει **<u>άπειρες λύσεις</u>** ή **<u>καμία λύση</u>**
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από το γεγονός ότι

$$\{\text{πλήθος ελεύθερων μεταβλητών}\} \neq 0$$

Επειδή ήδη ξέρουμε τον U, για να βρούμε τη λύση του $A\vec{x} = \vec{b}$ δεν χρειάζεται να σχηματίσουμε τον επαυξημένο πίνακα $\left[A|\vec{b}\right]$ και να κάνουμε απαλοιφή σ' αυτόν.

Αρκεί να εφαρμόσουμε τις ίδιες απαλοιφές μόνο στο $\vec{b}$, και θα φτάσουμε σε ένα διάνυσμα $\vec{d}$, τέτοιο ώστε: $A\vec{x} = \vec{b} \iff U\vec{x} = \vec{d}$. Έτσι, έχουμε:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{bmatrix} = \vec{d}$$

Άρα: $\quad U\vec{x} = \vec{d} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{bmatrix} \qquad (2)$

Η 2η εξίσωση δίνει: $0u + 0v + 0w + 0z = b_2 - 2b_1 \Rightarrow 0 = b_2 - 2b_1$
Άρα, για $b_2 \neq 2b_1$ το σύστημα είναι αδύνατο (καμία λύση),
ενώ αν $b_2 = 2b_1$ το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις. Σ' αυτήν την περίπτωση, το σύστημα (2) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff v + 4w = b_1 \iff v = b_1 - 4w$$

Άρα, για $\vec{b} = (b_1, 2b_1)$ το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει τη γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ b_1 - 4w \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad \text{δηλ.} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{ειδική λύση του μη-ομογενούς}} + \underbrace{u\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{γενική λύση του ομογενούς}} \quad \text{με } u,w,z \in \mathbb{R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ξέρουμε ότι για ένα $n \times n$ **τετραγωνικό πίνακα**:

$$r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \{\text{το σύστημα } A\vec{x} = \vec{0} \text{ έχει μοναδική λύση τη } \vec{x} = \vec{0}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\text{το σύστημα } A\vec{x} = \vec{b} \text{ έχει μοναδική λύση τη } \vec{x} = A^{-1}\vec{b}\}$$

και άρα,

$$r(A) < n \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \{\text{το σύστημα } A\vec{x} = \vec{0} \text{ έχει άπειρες λύσεις}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\text{το σύστημα } A\vec{x} = \vec{b} \text{ έχει είτε άπειρες λύσεις, είτε καμία λύση}\}$$

Επομένως, για τους 4×4 πίνακες A, B της άσκησης, έχουμε:

α) $\det A = -56 \neq 0$ και άρα, $r(A) = n$ δηλαδή $r(A) = 4$

$\det B = 0$ και άρα, $r(B) < n$ δηλαδή $r(B) < 4$

β) $\det A = -56 \neq 0$ και άρα, $\{\text{το } A\vec{x} = \vec{0} \text{ έχει μοναδική λύση τη } \vec{x} = (0,0,0,0)\}$

$\det B = 0$ και άρα, $\{\text{το } B\vec{y} = \vec{0}$ έχει τη λύση $\vec{y} = (0,0,0,0)$, καθώς και άπειρες μη-μηδενικές λύσεις στον $\mathbb{R}^4$ $\}$

γ) $\det A = -56 \neq 0$ και άρα, $\{\text{το } A\vec{x} = \vec{b} \text{ έχει μοναδική λύση τη } \vec{x} = A^{-1}\vec{b}\}$

$$\det B = 0 \text{ και άρα, } \left\{\begin{array}{l}\text{το σύστημα } B\vec{y} = \vec{b} \text{ έχει είτε άπειρες λύσεις,} \\ \text{είτε καμία λύση (εξαρτάται από ποιο είναι το } \vec{b})\end{array}\right\}$$

δ) $$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/56 & -5/56 & 7/8 & -39/28 \\ -5/28 & -1/28 & -1/4 & 3/14 \\ -15/56 & -3/56 & 1/8 & -1/28 \\ -17/14 & 5/14 & -3/2 & 18/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 255/56 \\ -61/28 \\ -15/56 \\ -115/14 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Έστω $A=[\alpha_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}=0 \quad \forall\ i=1,2,\ldots,n$

Δηλαδή: $$\left.\begin{array}{l}\alpha_{11}+\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{1n}=0\\ \alpha_{21}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{2n}=0\\ \vdots \\ \alpha_{n1}+\alpha_{n2}+\ldots+\alpha_{nn}=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$$

δηλ. το ομογενές $n\times n$ σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει και τη μη-μηδενική λύση $\vec{x}=(1,1,\ldots,1)$, εκτός από την $\vec{x}=(0,0,\ldots,0)$.
Άρα, έχει άπειρες λύσεις και επομένως $\det A=0$

β) Έστω $A=[\alpha_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}=1 \quad \forall\ i=1,2,\ldots,n$

Δηλαδή: $$\left.\begin{array}{l}\alpha_{11}+\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{1n}=1\\ \alpha_{21}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{2n}=1\\ \vdots \\ \alpha_{n1}+\alpha_{n2}+\ldots+\alpha_{nn}=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow A\vec{b}=\vec{b}$$

όπου $\vec{b}=(1,1,\ldots,1)$. Άρα: $A\vec{b}=\vec{b}\Leftrightarrow A\vec{b}=I\vec{b}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A-I)\vec{b}=\vec{0}$, δηλαδή το ομογενές $n\times n$ σύστημα $(A-I)\vec{x}=\vec{0}$ έχει και τη μη-μηδενική λύση $\vec{x}=\vec{b}$ εκτός από τη $\vec{x}=\vec{0}$. Άρα, έχει άπειρες λύσεις και επομένως $\det(A-I)=0$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1-\alpha_1 \\ \alpha_2 & 1-\alpha_2 \end{bmatrix}$, όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

και κάθε γραμμή του A έχει άθροισμα στοιχείων ίσο 1

Έχουμε: $A - I = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 & 1-\alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$,

και άρα: $\det(A-I) = (\alpha_1 - 1)(-\alpha_2) - \alpha_2(1-\alpha_1) = 0, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Αυτό όμως <u>δεν</u> σημαίνει ότι $\det A = 1$, αφού:

$\det A = \alpha_1(1-\alpha_2) - \alpha_2(1-\alpha_1) = \alpha_1 - \alpha_2$, το οποίο μπορεί να είναι και $\neq 1$,

μιας και τα α_1, α_2 είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί.

Π.χ. για $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 5$, έχουμε: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$,

όπου κάθε γραμμή έχει άθροισμα στοιχείων 1,

και $\det(A-I) = 0$, ενώ $\det A = -2 \neq 1$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α) Έστω $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$ με $u, v, w, z \in \mathbb{R}$ και $c_{ij} \in \mathbb{R}$ για $i = 1,2$, $j = 1,2$

$CD = -DC \Leftrightarrow CD + DC = O \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_{11}u + c_{12}w & c_{11}v + c_{12}z \\ c_{21}u + c_{22}w & c_{21}v + c_{22}z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}u + c_{21}v & c_{12}u + c_{22}v \\ c_{11}w + c_{21}z & c_{12}w + c_{22}z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2c_{11}u + c_{12}w + c_{21}v & (c_{11}+c_{22})v + c_{12}u + c_{12}z \\ c_{21}u + (c_{22}+c_{11})w + c_{21}z & 2c_{22}z + c_{21}v + c_{12}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2c_{11}u + c_{21}v + c_{12}w = 0 \\ c_{12}u + (c_{11}+c_{22})v + c_{12}z = 0 \\ c_{21}u + (c_{22}+c_{11})w + c_{21}z = 0 \\ c_{21}v + c_{12}w + 2c_{22}z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2c_{11} & c_{21} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11}+c_{22} & 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 & c_{11}+c_{22} & c_{21} \\ 0 & c_{21} & c_{12} & 2c_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{0}} \qquad (1)$$

Μια προφανής λύση του (1) είναι η $(u, v, w, z) = (0, 0, 0, 0)$, η οποία δίνει $D = O$. Όμως, θέλουμε $CD \neq O$. Άρα, η μηδενική λύση της (1) απορρίπτεται. Για να έχει και μη-μηδενικές λύσεις πρέπει $\det A = 0 \Rightarrow 4(c_{11}+c_{22})^2\left(c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(c_{11}+c_{22})^2 \det C = 0$

Δηλαδή, για κάθε μη-μηδενικό πίνακα $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $c_{11} = -c_{22}$ ή με $\det C = 0$, μπορούμε να βρούμε μη-μηδενικό πίνακα $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, τέτοιο ώστε: $CD = -DC$

Έστω $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, τότε η (1) δίνει:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{0}}$$

Μετατρέπουμε τον A σε κλιμακωτό πίνακα U:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{εναλλαγή} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ (+) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: u, v (αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς)
Ελεύθερες » : w, z (» σε » χωρίς »)

Ανάδρομη αντικατάσταση:

$3^η$ και $4^η$ εξίσωση: ικανοποιούνται ταυτοτικά

$2^η$ εξίσωση: $2v + w = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{1}{2}w$

$1^η$ εξίσωση: $u + z = 0 \Leftrightarrow u = -z$

Επομένως, $D=\begin{bmatrix} -z & -\frac{1}{2}w \\ w & z \end{bmatrix}$ με $(w,z)\in\left(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right)$

Επίσης, θέλουμε: $CD\neq O \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -z & -\frac{1}{2}w \\ w & z \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} w & z \\ -2z & -w \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} w\neq 0 \\ \text{ή/και} \\ z\neq 0 \end{cases}$$

π.χ. $D=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

β) Έστω: $E=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$ και $F=\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$

$$EF=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha u+bw & \alpha v+bz \\ cu+dw & cv+dz \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \alpha u+bw=0 \\ cu+dw=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \left.\begin{array}{l} \alpha v+bz=0 \\ cv+dz=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Αν $\det E\neq 0$ τα δύο τελευταία συστήματα έχουν μόνο μηδενικές λύσεις, δηλ. $(u,w)=(0,0)$ και $(v,z)=(0,0)$ αντίστοιχα. Η περίπτωση αυτή απορρίπτεται επειδή (απ' την εκφώνηση) θέλουμε όλα τα στοιχεία των E & F να είναι $\neq 0$. Θέλουμε δηλαδή το ομογενές σύστημα $E\vec{x}=\vec{0}$ να έχει και μη-μηδενικές λύσεις. Αυτό συμβαίνει ανν $\det E=0 \Leftrightarrow ad-cb=0$.

π.χ. $E=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε $U=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ και άρα:

$$E\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow 2u+w=0 \Leftrightarrow u=-\frac{1}{2}w$$

Ομοίως, $v=-\frac{1}{2}z$.

Άρα: $F=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}w & -\frac{1}{2}z\\ w & z\end{bmatrix}$ με $w\neq 0$ & $z\neq 0$. Π.χ. $F=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

Επαλήθευση: $EF=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(-1)+2 & 2(-3)+6\\ 4(-1)+2\cdot 2 & 4(-3)+2\cdot 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 10}}$

α) $$\left.\begin{aligned}\alpha x+by&=1\\ cx+dy&=0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{vmatrix}=\alpha d-cb$$

$$\det B_1=\begin{vmatrix}1 & b\\ 0 & d\end{vmatrix}=d \quad , \quad \det B_2=\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ c & 0\end{vmatrix}=-c$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \alpha d - cb \neq 0$

$$x = \frac{\det B_1}{\det A} = \frac{d}{\alpha d - cb} \quad , \quad y = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{-c}{\alpha d - bc}$$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-cb} \\ \dfrac{-c}{ad-cb} \end{bmatrix}$

2) $\det A = 0 \Leftrightarrow \alpha d - cb = 0$, τότε αν

i) $\det B_1 \neq 0$ ή/και $\det B_2 \neq 0$, δηλ. $d \neq 0$ ή/και $c \neq 0$

το σύστημα δεν έχει λύση

ii) $\det B_1 = \det B_2 = 0$ δηλ. αν $d = -c = 0$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Συγκεκριμένα, η 2η εξίσωση γίνεται τετριμμένη: $0x + 0y = 0$
και <u>το σύστημα εκφυλίζεται στην 1η εξίσωση</u>: $ax + by = 1$
δηλ. αν $a \neq 0$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-by}{a} \\ y \end{bmatrix} \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -(b/a) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με } y \in \mathbb{R}$$

αν $a = 0$ και $b \neq 0$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1/b \end{bmatrix} \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/b \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

<u>**Σημείωση:**</u> αν $a = b = 0$ φτάνουμε στην <u>ιδιαίτερη</u> περίπτωση που το αρχικό σύστημα έχει $A = O$, δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ που είναι αδύνατο (καμία λύση)

β) $\left.\begin{aligned} x+2y+z&=3\\ 3x-2y-4z&=-2\\ 2x+3y-z&=-6\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&1\\3&-2&-4\\2&3&-1\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\-6\end{bmatrix}$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&-2&-4\\2&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-4\\3&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&-4\\2&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-2\\2&3\end{vmatrix}=$$

$$=14-2(-3+8)+(9+4)=14-10+13=17\neq 0$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$\det B_1=\begin{vmatrix}3&2&1\\-2&-2&-4\\-6&3&-1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-2&-4\\3&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&-4\\-6&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&-2\\-6&3\end{vmatrix}=$$

$$=3(2+12)-2(2-24)+(-6-12)=42+44-18=68$$

$$\det B_2=\begin{vmatrix}1&3&1\\3&-2&-4\\2&-6&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-4\\-6&-1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3&-4\\2&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-2\\2&-6\end{vmatrix}=$$

$$=(2-24)-3(-3+8)+(-18+4)=-22-15-14=-51$$

$$\det B_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&-2&-2\\2&3&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-2\\3&-6\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&-2\\2&-6\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3&-2\\2&3\end{vmatrix}=$$

$$=(12+6)-2(-18+4)+3(9+4)=18+28+39=85$$

Άρα: $x=\dfrac{\det B_1}{\det A}=\dfrac{68}{17}=4$, $y=\dfrac{\det B_2}{\det A}=-\dfrac{51}{17}=-3$

$z=\dfrac{\det B_3}{\det A}=\dfrac{85}{17}=5$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση: $(x,y,z)=(4,-3,5)$