# **ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -** Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**«Γραμμική Άλγεβρα» (ΗΥ119) – Χειμερινό Εξάμηνο 2009-2010**
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

***<u>3<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>***

**Άσκηση 1:** Έστω το σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \ \backslash \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

**Άσκηση 2:** Δείξτε ότι το σύνολο $C_{[a,b]} = \{ f \ \backslash \ f:[a,b] \to \mathbb{R}, \ f \text{ συνεχής} \}$, δηλαδή όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων από ένα διάστημα $[a,b]$ στο $\mathbb{R}$, είναι πραγματικός γραμμικός χώρος.

**Άσκηση 3:** α) Δείξτε ότι το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων $2 \times 2$ δεν είναι διανυσματικός χώρος.
β) Δείξτε ότι το σύνολο των μη-αντιστρέψιμων πινάκων $2 \times 2$ δεν είναι διανυσματικός χώρος.

**Άσκηση 4:** Σχεδιάστε τις ευθείες

$$u - v = -3$$
$$u + 3v = 1$$

α) Βρείτε από το σχήμα τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.
β) Αλλάξτε το συντελεστή του *u* στη δεύτερη εξίσωση, έτσι ώστε οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες.
γ) Αλλάξτε το σταθερό όρο της νέας εξίσωσης έτσι ώστε οι δύο ευθείες να συμπίπτουν.

**Άσκηση 5:** Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα προσδιορίστε τη σχετική μεταξύ των επιπέδων θέση στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ και την ύπαρξη λύσης του συστήματος βάσει αυτής της θέσης.

$$\text{α)} \begin{cases} 2u + v + w = 5 \\ 4u + 2v + 2w = 6 \\ -2u + 7v + 2w = 9 \end{cases}, \quad \text{β)} \begin{cases} u + v + w = 2 \\ 2u + 3w = 5 \\ 3u + v + 4w = 6 \end{cases}, \quad \text{γ)} \begin{cases} u + v + w = 2 \\ 2u + 3w = 5 \\ 3u + v + 4w = 7 \end{cases}$$

**Άσκηση 6:** Σχεδιάστε τις ευθείες

$$x + 2y = 2$$
$$x - y = 2$$
$$y = 1$$

α) Μπορούν να λυθούν ταυτόχρονα οι τρεις εξισώσεις; β) Τι συμβαίνει στο σχήμα όταν όλες οι δεξιές πλευρές είναι μηδέν; γ) Υπάρχει μη-μηδενική επιλογή των δεξιών πλευρών που επιτρέπει στις τρεις ευθείες να τέμνονται στο ίδιο σημείο, δηλ. στις τρεις εξισώσεις να έχουν μια λύση;

**Άσκηση 7:** Βρείτε τα σημεία τομής των τριών υπερεπιπέδων $t = 0$, $z = 0$, και $x + y + z + t = 1$ στον τετραδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^4$.

**Άσκηση 8:** Οι εξισώσεις

$$ax + 2y = 0$$
$$2x + ay = 0$$

έχουν σίγουρα τη λύση $x = y = 0$. Για ποιες τιμές του *a* υπάρχει ολόκληρη ευθεία λύσεων;

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

## *ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 3*

## ΑΣΚΗΣΗ 1

Το $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \setminus x,y \in \mathbb{R}\}$ είναι εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη πρόσθεσης $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, η οποία ορίζεται ως:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\forall \ \vec{v}_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \ \text{και} \ \vec{v}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{με } x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

Η πρόσθεση έχει τις ιδιότητες:

(i) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ (αντιμετάθεση)
$\forall \ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) =$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$ (προσεταιριστικότ.)
$\forall \ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^2$

(iii) $\exists$ το στοιχείο $\vec{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, τ.ω.
$\vec{v}_1 + \vec{0} = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1) = \vec{v}_1, \quad \forall \ \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$

(iv) $\forall \ \vec{v}_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, \ \exists \ (-x_1, -y_1) = -\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$, τ.ω. $\vec{v}_1 + (-\vec{v}_1) = \vec{0}$

Επίσης ορίζεται μια εξωτερική πράξη πολλ/σμού των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}$ πάνω στο $\mathbb{R}^2$ δηλ. $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε:

$$\lambda \vec{v}_1 = \lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \ \lambda \in \mathbb{R} \ \text{και} \ \forall \ \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$$

Ο βαθμωτός πολλ/σμός έχει τις ιδιότητες:

(i) $(\lambda + \mu)\vec{v}_1 = (\lambda + \mu)(x_1, y_1) = [(\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)y_1] = (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda y_1 + \mu y_1) =$
$= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_1, \mu y_1) = \lambda (x_1, y_1) + \mu (x_1, y_1) = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_1$
$\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\forall \ \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\lambda(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=\lambda(x_1+x_2,\,y_1+y_2)=(\lambda x_1+\lambda x_2,\,\lambda y_1+\lambda y_2)=$
$=(\lambda x_1,\lambda y_1)+(\lambda x_2,\lambda y_2)=\lambda\vec{v}_1+\lambda\vec{v}_2$ , $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$ και $\forall\,\vec{v}_1,\vec{v}_2\in\mathbb{R}^2$

(iii) $\lambda(\mu\vec{v}_1)=\lambda(\mu x_1,\mu y_1)=(\lambda\mu x_1,\lambda\mu y_1)=(\lambda\mu)(x_1,y_1)=(\lambda\mu)\vec{v}_1$
$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $\forall\,\vec{v}_1\in\mathbb{R}^2$

(iv) $1\vec{v}_1=1(x_1,y_1)=(1x_1,1y_1)=(x_1,y_1)=\vec{v}_1$ , $\forall\,\vec{v}_1\in\mathbb{R}^2$

Άρα το $\mathbb{R}^2$, με πράξεις την πρόσθεση και τον πολ/σμό με πραγματικό αριθμό, είναι διανυσματικός χώρος.

## ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν $f,g\in C_{[\alpha,b]}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, ορίζουμε:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ , $x\in[\alpha,b]$

$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ , $x\in[\alpha,b]$

δηλ. $f+g\in C_{[\alpha,b]}$ $\forall\,f,g\in C_{[\alpha,b]}$

και $\lambda f\in C_{[\alpha,b]}$ , $\forall\,f\in C_{[\alpha,b]}$ και $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$

Ιδιότητες πρόσθεσης:

i) $f+g=g+f$ , $\forall\,f,g\in C_{[\alpha,b]}$

ii) $(f+g)+h=f+(g+h)$ , $\forall\,f,g,h\in C_{[\alpha,b]}$

iii) $\exists$ μηδενική συνάρτηση $f_0(x)=0$ $\forall\,x\in[\alpha,b]$
δηλ. $f+f_0=f$ $\forall\,f\in C_{[\alpha,b]}$ όπου $f_0\in C_{[\alpha,b]}$

iv) $\forall\,f\in C_{[\alpha,b]}$ , $\exists\,(-f)(x)=-f(x)\in C_{[\alpha,b]}$ , τ.ω.
$f+(-f)=f_0$

Ιδιότητες πολλ/σμού:

i) $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$, $\forall f \in C_{[\alpha,b]}$ και $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

ii) $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$, $\forall f,g \in C_{[\alpha,b]}$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$, $\forall f \in C_{[\alpha,b]}$ και $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

iv) $1f = f$, $\forall f \in C_{[\alpha,b]}$

Άρα $C_{[\alpha,b]}$ είναι πραγματικός γραμμικός χώρος

## ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Το σύνολο των 2 επί 2 αντιστρέψιμων πινάκων δεν είναι διανυσματικός χώρος γιατί η πρόσθεση δύο αντιστρέψιμων πινάκων δεν είναι αναγκαστικά αντιστρέψιμος πίνακας. Δηλαδή,

$\exists A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ αντιστρέψιμοι τ.ω. ο $A+B$ να είναι μη-αντιστρέψιμος

[βλ. φυλλάδιο 1, Άσκηση 21(α)]

Δηλ. το σύνολο των 2Χ2 αντιστρέψιμων πινάκων δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και επομένως, δεν είναι διανυσματικός χώρος.

β) Το σύνολο των 2 επί 2 μη-αντιστρέψιμων πινάκων δεν είναι διανυσματικός χώρος, γιατί η πρόσθεση δύο μη-αντιστρέψιμων πινάκων δεν είναι αναγκαστικά μη-αντιστρέψιμος πίνακας. Δηλαδή,

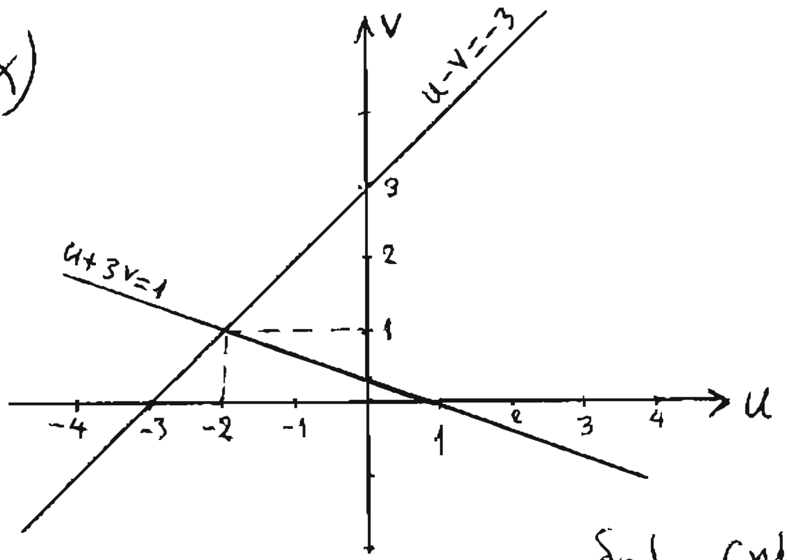
$\exists A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ μη-αντιστρέψιμοι τ.ω. ο $A+B$ να είναι αντιστρέψιμος

[βλ. φυλλάδιο 1, Άσκηση 21(β)]

Δηλ. το σύνολο των 2Χ2 μη-αντιστρέψιμων πινάκων δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και επομένως, δεν είναι διανυσματικός χώρος.

# ΑΣΚΗΣΗ 4

α)




δηλ. σημείο τομής στο $(u,v)=(-2,1)$

β) $\left.\begin{array}{l} u - v = -3 \\ au + 3v = 1 \end{array}\right\}$ παράλληλες όταν $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για

για τους συντελεστές των αγνώστων να ισχύει: $(a, 3) = \lambda\,(1, -1)$

ενώ για τους σταθερούς όρους στα δεξιά μέλη να έχουμε: $1 \neq \lambda(-3)$

Από τη σχέση $(a, 3) = \lambda\,(1, -1) \Rightarrow (a, 3) = (\lambda, -\lambda) \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a = \lambda \\ \text{και} \\ 3 = -\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ \text{και} \\ \lambda = -3 \end{array}\right.$$ ενώ $\lambda(-3) = 9 \neq 1$

άρα: $\left\{\begin{array}{l} u - v = -3 \\ -3u + 3v = 1 \end{array}\right.$

γ) $\left.\begin{array}{l} u - v = -3 \\ -3u + 3v = \beta \end{array}\right\}$ Εκτός από τη σχέση $(-3, 3) = -3(1, -1)$ που ισχύει για τους

συντελεστές των αγνώστων, θα πρέπει και $\beta = -3(-3) \Rightarrow \beta = 9$

άρα: $\left\{\begin{array}{l} u - v = -3 \\ -3u + 3v = 9 \end{array}\right.$

## ΑΣΚΗΣΗ 5

Κάθε σύστημα έχει τη γενική μορφή:

$$\left.\begin{array}{ll} E_1: & \alpha_1 u+\beta_1 v+\gamma_1 w=\delta_1 \\ E_2: & \alpha_2 u+\beta_2 v+\gamma_2 w=\delta_2 \\ E_3: & \alpha_3 u+\beta_3 v+\gamma_3 w=\delta_3 \end{array}\right\}$$

όπου $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ οι συντελεστές των αγνώστων, και $\delta_i$ οι σταθεροί όροι

α) Παρατηρούμε ότι

$$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)=2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \text{ ενώ } \delta_2 \neq 2\delta_1$$

Άρα, $E_1 // E_2$ και διαφορετικά μεταξύ τους

Επίσης, $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}=\dfrac{-2}{4} \neq \dfrac{\beta_3}{\beta_2}=\dfrac{7}{2}$ που σημαίνει ότι $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)=\lambda(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

Άρα, το $E_3$ τέμνει τα παράλληλα $E_1$ & $E_2$ σε 2 παράλληλες ευθείες, και συνεπώς το σύστημα δεν έχει λύση

β) Παρατηρούμε ότι

$$(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)=1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)+1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \text{ ενώ } \delta_3 \neq 1\delta_1+1\delta_2$$

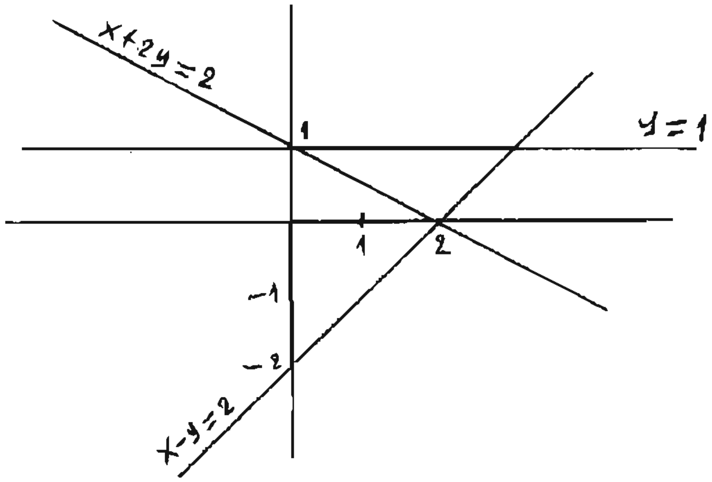
Άρα, τα $E_1, E_2, E_3$ τέμνονται ανά δύο σε 3 παράλληλες ευθείες, και συνεπώς το σύστημα δεν έχει λύση

γ) Παρατηρούμε ότι $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3)=1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)+1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$

Άρα, τα $E_1, E_2, E_3$ τέμνονται σε μια κοινή ευθεία, οπότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων

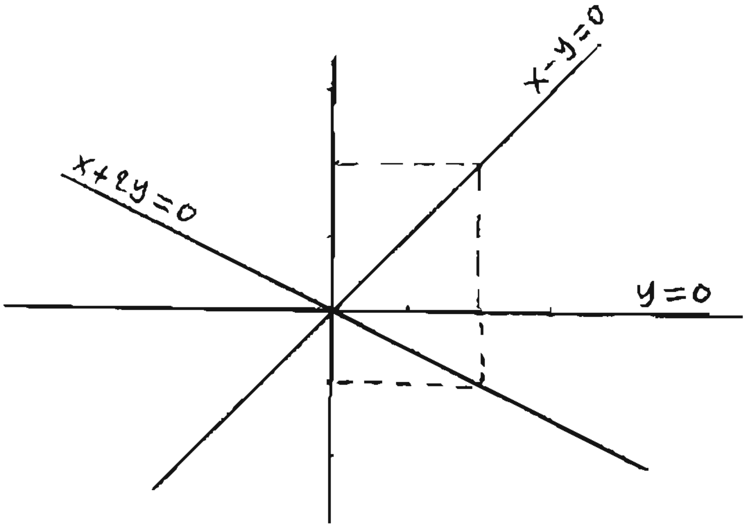
# ΑΣΚΗΣΗ 6

α)



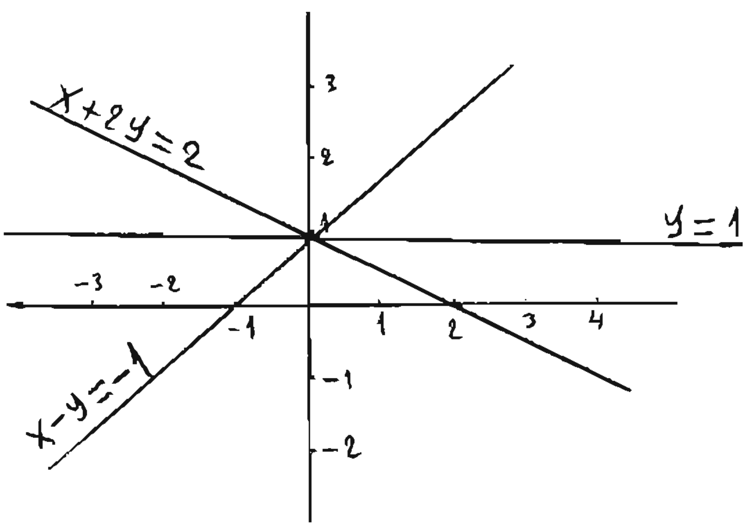

Οι 3 εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν ταυτόχρονα γιατί δεν υπάρχει σημείο που να ανήκει και στις τρεις ευθείες

β)




Υπάρχει μοναδική λύση στο $(x,y)=(0,0)$ (δηλ. το σημείο τομής των τριών ευθειών)

γ) Υπάρχει. Π.χ. μπορεί στο αρχικό σύστημα, να μετακινηθεί η 2η ευθεία παράλληλα (αλλάζοντας την τιμή του σταθερού όρου) έτσι ώστε να περνά από το $(0,1)$




$$\begin{aligned} x+2y &= 2 \\ x-y &= -1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 7

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ t=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y=1 \\ t=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-y \\ t=0 \\ z=0 \end{array}\right.$$

δηλ. Τα ζητούμενα σημεία θα έχουν τη μορφή:

$(1-y, y, 0, 0)$ με $y \in \mathbb{R}$

## ΑΣΚΗΣΗ 8

Ολόκληρη ευθεία λύσεων υπάρχει όταν οι δύο ευθείες συμπίπτουν δηλ. όταν $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $(2,\alpha,0)=\lambda(\alpha,2,0)$

από το οποίο προκύπτει:

$$(2,\alpha,0)=(\lambda\alpha,2\lambda,0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2=\lambda\alpha \\ \alpha=2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2=2\lambda^2 \Rightarrow \lambda=\pm 1 \\ \alpha=2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=1 \quad \text{και} \quad \alpha=2 \\ \text{ή} \\ \lambda=-1 \quad \text{και} \quad \alpha=-2 \end{array}\right.$$

Άρα: $\alpha=2$ ή $\alpha=-2$