ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

«Γραμμική Άλγεβρα» (ΗΥ119) – Χειμερινό Εξάμηνο 2009-2010
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

2^{o} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Έστω οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\ 7 & -1 & -3 & 4\\ 6 & 5 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 1 & -4\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 11 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

α) Υπολογίστε την ορίζουσα κάθε πίνακα αφού εφαρμόσετε απαλοιφές μεταξύ γραμμών για να τους φέρετε σε άνω τριγωνική μορφή.
β) Υπολογίστε τους συμπαράγοντες όλων των στοιχείων των A και B, και σχηματίστε τους συζυγείς $\operatorname{adj}(A)$ και $\operatorname{adj}(B)$
γ) Υπολογίστε τους αντιστρόφους των A και B εφόσον υπάρχουν, καθώς και τις ορίζουσες τους.

Άσκηση 2: Υπολογίστε τις ορίζουσες των επόμενων πινάκων χρησιμοποιώντας: α) το ανάπτυγμα με συμπαράγοντες ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη, β) απαλοιφές μεταξύ γραμμών για να φέρετε τους πίνακες σε τριγωνική μορφή, γ) τον κανόνα του Sarrus.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & 5\\ -2 & 0 & 6\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}8 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 4\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 7 & 9 & -25\\ 2 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

Άσκηση 3: Ποιες είναι οι ορίζουσες των πινάκων: $-A, 2A, A^2, A^{20}, AB, BA, ABC, CAB, B^TB$, και $B^{100}(C^T)^{16}$, για τους πίνακες της άσκησης 2.

Άσκηση 4: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να δειχθούν τα εξής:

α) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ yz & zx & xy\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)$, β) $\begin{vmatrix}1+\alpha^2 & \alpha & 1\\ 1+\beta^2 & \beta & 1\\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1\end{vmatrix}=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$,

γ) $\begin{vmatrix}\alpha_1x^3+\beta_1x^2+\gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2x^3+\beta_2x^2+\gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3x^3+\beta_3x^2+\gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}$, δ) $\begin{vmatrix}y+z & x & x^3\\ z+x & y & y^3\\ x+y & z & z^3\end{vmatrix}=(x+y+z)^2(x-y)(y-z)(z-x)$

Άσκηση 5: Δείξτε ότι η 4 επί 4 «ορίζουσα Vandermonde» $\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3\\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3\\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3\\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3\end{vmatrix}$ ισούται με:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_4)=\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)$$

Άσκηση 6: Να λυθεί η αλγεβρική εξίσωση: $\begin{vmatrix}x^3-1 & x^2-1 & x-1\\ x^3-8 & x^2-4 & x-2\\ x^3-27 & x^2-9 & x-3\end{vmatrix}=0$, ως προς $x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 7: Δίνεται ο 2×2 πίνακας A για τον οποίο ισχύει ότι $A^2-5A+6I=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ο A^{-1} και γράψτε τον ως συνάρτηση του A.

Άσκηση 8: Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός αντισυμμετρικού πίνακα $K\in\mathbb{R}^{n\times n}$ είναι μηδέν όταν n είναι περιττός, ενώ όταν n είναι άρτιος δεν μπορούμε να βγάλουμε σχετικό συμπέρασμα. Δώστε ένα 4×4 παράδειγμα αντισυμμετρικού πίνακα K με $\det(K)\neq 0$.

Άσκηση 9: Έστω $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $AB=-BA$ και βρείτε το λάθος στον επόμενο συλλογισμό: Παίρνοντας τις ορίζουσες, έχουμε $(\det A)(\det B)=-(\det B)(\det A)\Rightarrow 2(\det B)(\det A)=0$, άρα ένας τουλάχιστον εκ των A και B έχει μηδενική ορίζουσα. Συνεπώς, η εξίσωση $AB=-BA$ είναι δυνατή μόνον όταν ο A ή ο B είναι μη-αντιστρέψιμος.

Άσκηση 10: Βρείτε τις ορίζουσες των επόμενων πινάκων: α) $U=\begin{bmatrix}3&3&6&6\\0&1&-2&-2\\0&0&2&6\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$, β) U^T, γ) U^{-1},

δ) $M=\begin{bmatrix}0&0&0&-3\\0&0&2&6\\0&1&-2&-2\\3&3&6&6\end{bmatrix}$, ε) $A=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-1&2\end{bmatrix}$.

Άσκηση 11: α) Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα 4 επί 4, του οποίου τα στοιχεία είναι: a_{ij} = το μικρότερο από τα i και j.
β) Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα 4 επί 4, του οποίου τα στοιχεία είναι a_{ij} = το μικρότερο από τα n_i και n_j, για $n_1=2$, $n_2=6$, $n_3=8$, $n_4=10$. Μπορείτε να βρείτε ένα γενικό κανόνα για κάθε $n_1\le n_2\le n_3\le n_4$;

Άσκηση 12: Δυο πίνακες $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ λέγονται *όμοιοι* αν και μόνο αν υπάρχει μη-ιδιόμορφος πίνακας $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $B=M^{-1}AM$. Δείξτε ότι $\det B=\det A$ και ότι όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, ισχύει: $\det(A^{-1}B)=1$.

Άσκηση 13: Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Αν $\det(A-I_n)=0$, αυτό δεν συνεπάγεται ότι $\det A=1$. Δώστε ένα σχετικό 2×2 παράδειγμα

Άσκηση 14: Χρησιμοποιήστε συζυγείς πίνακες για να αντιστρέψετε τους:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 2

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 7 & -1 & -3 & 4 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-7)\ (-6)\ (-3) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 18 & 4 \\ 0 & -7 & 18 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-7/15)\ (-2/15) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 48/5 & 2/15 \\ 0 & 0 & 28/5 & 7/15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (-7/12) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 48/5 & 2/15 \\ 0 & 0 & 0 & 7/18 \end{bmatrix} = U_A$$

$$\det A = (-1)^{\kappa} \det U_A = \det U_A = 1 \cdot (-15) \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{7}{18} = -56$$

(όπου $\kappa = 0$ το πλήθος εναλλαγών γραμμών που χρησιμοποιήσαμε)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 11 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-2)\ (-3)\ 1 \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1/3)\ (-11/3) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -14 & 49 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 7 \\ (+) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_B$$

$$\det U_B = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \det B = 0$$

β) $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, ἄρα:

$$C_{11} = \det A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(-3+4) - 2(1+12) = -5-26 = -31$$

$$C_{12} = (-1) \det A_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +6 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(-3+4) + 2(-7+9) = 6+4 = 10$$

$$C_{13} = \det A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(5-8) - 6(-1-16) + 3(-2-20) = 15$$

$$C_{14} = (-1) \det A_{14} = (-1) \begin{vmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 + 41 = 68$$

$$C_{21} = (-1) \det A_{21} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 15 = 5$$

$$C_{22} = \det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 8 + 18 = 2$$

$$C_{23} = (-1) \det A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2(-2) + 7 = 3$$

$$C_{24} = \det A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-3)9 - (-7) = -20$$

Ομοίως, βρίσκουμε: $C_{31}=-49$, $C_{32}=14$, $C_{33}=-7$, $C_{34}=84$,

$C_{41}=78$, $C_{42}=-36$, $C_{43}=2$, $C_{44}=-144$

Ο συζυγής (adjoint) του A είναι ο πίνακας:

$$adj(A)=C^T=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -31 & 10 & 15 & 68 \\ 5 & 2 & 3 & -20 \\ -49 & 14 & -7 & 84 \\ 78 & -36 & 2 & -144\end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} -31 & 5 & -49 & 78 \\ 10 & 2 & 14 & -36 \\ 15 & 3 & -7 & 2 \\ 68 & -20 & 84 & -144\end{bmatrix}$$

Ανάλογα, για τους συμπαράγοντες των στοιχείων του B, έχουμε:

$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det B_{ij}$ όπου B_{ij} ο ελάσσων πίνακας του b_{ij} στοιχείου του B.

άρα: $$C_{11}=\det B_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 11 & -2 & 1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 11 & -2\end{vmatrix} = 7-(-17)=24$$

Ομοίως βρίσκουμε: $C_{12}=-24$, $C_{13}=-168$, $C_{14}=-48$, $C_{21}=18$, $C_{22}=-18$,

$C_{23}=-126$, $C_{24}=-36$, $C_{31}=-21$, $C_{32}=21$, $C_{33}=147$, $C_{34}=42$,

$C_{41}=-3$, $C_{42}=3$, $C_{43}=21$, $C_{44}=6$

Επομένως:

$$adj(B)=\begin{bmatrix} 24 & 18 & -21 & -3 \\ -24 & -18 & 21 & 3 \\ -168 & -126 & 147 & 21 \\ -48 & -36 & 42 & 6\end{bmatrix}$$

γ) $\det A=-56\neq 0$ και άρα $\exists\, A^{-1}$. Συγκεκριμένα: $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,adj(A) \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-56)} \begin{bmatrix} -31 & 5 & -49 & 78 \\ 10 & 2 & 14 & -36 \\ 15 & 3 & -7 & 2 \\ 68 & -20 & 84 & -144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/56 & -5/56 & 7/8 & -39/28 \\ -5/28 & -1/28 & -1/4 & 9/14 \\ -15/56 & -3/56 & 1/8 & -1/28 \\ -17/14 & 5/14 & -3/2 & 18/7 \end{bmatrix}$$

με $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = -\frac{1}{56}$

Επειδή $\det B = 0$, ο B είναι μη-αντιστρέψιμος, δηλ. $\nexists\, B^{-1}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) Μας διευκολύνει να υπολογίσουμε την ορίζουσα ως προς γραμμή ή στήλη με όσο το δυνατό περισσότερα μηδενικά. Ως εκ τούτου, υπολογίζουμε την ορίζουσα του A ως προς την 3η γραμμή:

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{3j} (-1)^{3+j} \det A_{3j} = -2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2(10+12) +$$

$$+ 6(4) = -20$$

Υπολογίζουμε την $\det B$ ως προς την 2η γραμμή:

$$\det B = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4(8+9) = -68$$

Υπολογίζουμε την $\det C$ ως προς την 1η γραμμή:

$$\det C = 2\begin{vmatrix} 9 & -25 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & -25 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-36+75) - 3(-28+50) + 4(21-18) = 24$$

β)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & 5\\ -2 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{matrix}2\\ \\ (+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix} \\ (-1)\\ (+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}=U_A$$

$$\det A=(-1)^0\det U_A=1\cdot 4\cdot(-5)=-20$$

$$B=\begin{bmatrix}8 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 4\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}3/8\\ \\ (+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}8 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 17/8 & 3/4\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}8 & 3 & 2\\ 0 & 17/8 & 3/4\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=U_B$$

$$\det B=(-1)^1\det U_B=(-1)\cdot 8\cdot\frac{17}{8}\cdot 4=-68$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 7 & 9 & -25\\ 2 & 3 & -4\end{bmatrix}\begin{matrix}(-7/2)\ (-1)\\ (+)\\ (+)\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -3/2 & -39\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}=U_C$$

$$\det C=(-1)^0\det U_C=2\left(-\frac{3}{2}\right)(-8)=24$$

γ)

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 5 & 0 & 4\\ -2 & 0 & 6 & -2 & 0\\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det A=1\cdot4\cdot6+2\cdot5\cdot(-2)+(-3)\cdot0\cdot0-(-2)4(-3)-0\cdot5\cdot1-6\cdot0\cdot2=$$
$$=24-20-24=-20$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 8 & 3 & 2 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & -3 & 1\\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det B=3\cdot4\cdot(-3)-1\cdot4\cdot8=-36-32=-68$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3\\ 7 & 9 & -25 & 7 & 9\\ 2 & 3 & -4 & 2 & 3\\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det C=2\cdot9\cdot(-4)+3\cdot(-25)\cdot2+4\cdot7\cdot3-2\cdot9\cdot4-$$
$$-3(-25)2-(-4)\cdot7\cdot3=-72-150+84-$$
$$-72+150+84=24$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$\det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^3 \det A = -\det A = 20$$

$$\det(2A) = 2^3 \det A = 8(-20) = -160$$

$$\det(A^2) = \det(AA) = (\det A)(\det A) = (\det A)^2 = 400$$

$$\det(A^{20}) = \det(AA\ldots A) = (\det A)^{20} = (-20)^{20} = 1.04857 \cdot 10^{26}$$

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = (-20)(-68) = 1360$$

$$\det(BA) = (\det B)(\det A) = \det(AB) = 1360$$

$$\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C) = (-20)(-68)24 = 32640$$

$$\det(CAB) = \det(ABC) = 32640$$

$$\det(B^T B) = \det(B^T)(\det B) = (\det B)^2 = (-68)^2 = 4624$$

$$\det\left(B^{100}(C^T)^{16}\right) = (\det B)^{100}(\det C)^{16} = (-68)^{100}(24)^{16}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-z & y-z & z \\ yz-xy & zx-xy & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-z & y-z & z \\ (x-z)(-y) & -x(y-z) & xy \end{vmatrix} =$$

(+) (+) (-1) (-1)

$$= (x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & z \\ -y & -x & xy \end{vmatrix} = (x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -y & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-z)(y-z)(-x+y) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

β) $$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1+\beta^2 & \beta & 1 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2-\gamma^2 & \alpha-\gamma & 0 \\ \beta^2-\gamma^2 & \beta-\gamma & 0 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix} \alpha+\gamma & 1 & 0 \\ \beta+\gamma & 1 & 0 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix} \alpha+\gamma & 1 \\ \beta+\gamma & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta) =$$

$$= -(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

γ) $$\begin{vmatrix} \alpha_1X^3+\beta_1X^2+\gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2X^3+\beta_2X^2+\gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3X^3+\beta_3X^2+\gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1X^3 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2X^3 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3X^3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1X^2 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2X^2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_3X^2 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = X^3\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + X^2\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = X^3\cdot 0 + X^2\cdot 0 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

δ) $$\begin{vmatrix} y+z & x & x^3 \\ z+x & y & y^3 \\ x+y & z & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & x & x^3 \\ x+y+z & y & y^3 \\ x+y+z & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^3-z^3 \\ 0 & y-z & y^3-z^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & 1 & y^2+yz+z^2 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 1 & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix}\begin{matrix}(-1)\\(+)\end{matrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & y^2-x^2+yz-xz \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & (y-x)(y+x)+(y-x)z \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)(y-x)\begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & y+x+z \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)(y-x)(y+x+z) =$$

$$= (x+y+z)^2(x-y)(y-z)(z-x)$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 5}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3 \end{vmatrix}\begin{matrix}(+) & & \\ (-1) & (+) & \\ & (-1) & (+) \\ & & (-1)\end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_1^2-\alpha_2^2 & \alpha_1^3-\alpha_2^3 \\ 0 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_2^2-\alpha_3^2 & \alpha_2^3-\alpha_3^3 \\ 0 & \alpha_3-\alpha_4 & \alpha_3^2-\alpha_4^2 & \alpha_3^3-\alpha_4^3 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)\begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2 \\ 0 & 1 & \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2 \\ 0 & 1 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_3^2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4^2 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(-1)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2 \\ 1 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_3^2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4^2 \end{vmatrix}\begin{matrix}(+) & \\ (-1) & (+) \\ & (-1)\end{matrix} =$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(-1)\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1-\alpha_3 & \alpha_1^2-\alpha_3^2+\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3) \\ 0 & \alpha_2-\alpha_4 & \alpha_2^2-\alpha_4^2+\alpha_3(\alpha_2-\alpha_4) \\ 1 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_3^2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\begin{vmatrix} 0 & 1 & (\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_2 \\ 0 & 1 & (\alpha_2+\alpha_4)+\alpha_3 \\ 1 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_3^2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1+\alpha_3+\alpha_2 \\ 1 & \alpha_2+\alpha_4+\alpha_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_1) =$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_4) = \prod_{1\le i<j\le 4}(\alpha_i-\alpha_j)$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 6}}$

$$\begin{vmatrix} x^3-1 & x^2-1 & x-1 \\ x^3-8 & x^2-4 & x-2 \\ x^3-27 & x^2-9 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-1)(x^2+x+1) & (x-1)(x+1) & x-1 \\ (x-2)(x^2+2x+4) & (x-2)(x+2) & x-2 \\ (x-3)(x^2+3x+9) & (x-3)(x+3) & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 & 1 \\ x^2+2x+4 & x+2 & 1 \\ x^2+3x+9 & x+3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 & 1 \\ x+3 & 1 & 0 \\ 2x+8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ 2x+8 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)(2x+6-2x-8) = -2(x-1)(x-2)(x-3)$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x=1$, $x=2$ και $x=3$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$A^2 - 5A + 6I = 0 \Rightarrow A^2 - 5A = -6I \Rightarrow A(A-5I) = -6I \Rightarrow$

$\Rightarrow (\det A)\left[\det(A-5I)\right] = (-6)^2 \Rightarrow (\det A)\left[\det(A-5I)\right] \neq 0$

$\Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος (δηλ. $\exists\, A^{-1}$)

Από την παραπάνω σχέση: $A(A-5I) = -6I \Rightarrow A - 5I = -6A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{5}{6} I - \frac{1}{6} A$

ΑΣΚΗΣΗ 8

{K αντισυμμετρικός} $\Leftrightarrow K = -K^T \Rightarrow \det K = \det(-K^T) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det K = (-1)^n \det K^T \Rightarrow \det K = (-1)^n \det K \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[1-(-1)^n\right] \det K = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot \det K = 0 & \text{για } n \text{ άρτιο (που ισχύει ακόμα και αν } \det K \neq 0) \\ 2 \det K = 0 \Rightarrow \det K = 0 & \text{για } n \text{ περιττό} \end{cases}$$

Έστω $K = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & b & c \\ -\alpha & 0 & d & f \\ -b & -d & 0 & h \\ -c & -f & -h & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det K = (\alpha h - bf + cd)^2$

Δηλ. αρκεί να βρούμε $\alpha, h, b, f, c, d \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\alpha h - bf + cd \neq 0$
Αν π.χ. $h \neq 0$ τότε $\alpha \neq \frac{bf - cd}{h}$, οπότε αρκεί να δώσουμε τιμές στα b, f, c, d, και h και να πάρουμε $\alpha \neq (bf-cd)/h$. Για παράδειγμα, έστω $b=1$, $f=2$, $c=3$, $d=4$, $h=5$ οπότε αρκεί

$\alpha \neq \frac{1\cdot 2 - 3\cdot 4}{5} = -2$, π.χ. $\alpha = -1$

Επομένως, ένα παράδειγμα ενός 4x4 αντισυμμετρικού πίνακα K με $\det K \neq 0$ είναι:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & 5 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{με } \det K = 25$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

$$AB = -BA \Rightarrow \det(AB) = \det(-BA) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det A)(\det B) = [\det(-B)](\det A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det A)(\det B) = [\det((-1)B)](\det A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det A)(\det B) = (-1)^n (\det B)(\det A) \qquad (1)$$

Το οποίο δίνει $(\det A)(\det B) = -(\det B)(\det A)$ μόνο όταν n περιττός. Δηλαδή, ο συλλογισμός της εκφώνησης είναι σωστός μόνο για $n \times n$ πίνακες με n περιττό. Γενικά η (1) δίνει:

$[1-(-1)^n](\det B)(\det A) = 0$, η οποία, για n άρτιο, ισχύει ακόμα και αν $\det A \neq 0$ και $\det B \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

α) Τριγωνικός πίνακας. Άρα $\det U =$ (γινόμενο στοιχείων της κύριας διαγωνίου) $\Rightarrow \det U = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -18$

β) $\det U^T = \det U \Rightarrow \det U^T = -18$

γ) $\det(U^{-1}) = \dfrac{1}{\det U} \Rightarrow \det(U^{-1}) = -\dfrac{1}{18}$

δ) Ο M προκύπτει με εναλλαγή της 1ης με την 4η γραμμή και της 2ης με την 3η γραμμή του U. Άρα $\det M = (-1)^k \det U \Rightarrow$

$\Rightarrow \det M = (-1)^2 \det U \Rightarrow \det M = \det U \Rightarrow \det M = -18$

όπου $\kappa = 2$ πλήθος των εναλλαγών γραμμών

ε) Ο πίνακας A είναι γινόμενο ενός διανύσματος-στήλη με ένα διάνυσμα-γραμμή, και επομένως, οι γραμμές του A είναι πολλαπλάσια του διανύσματος γραμμή [4 -1 2]. Άρα: $\det A = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 11

α) Έστω $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\alpha_{ij} =$ το μικρότερο από τα i και j. Άρα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Άρα, $\det A = (-1)^0 \det U = \det U = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$

β) Έστω $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\alpha_{ij} = \min\{n_i, n_j\}$ για $n_1 = 2$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$, $n_4 = 10$. Άρα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{την απαλοιφή}]{\text{Εκτελέστε μόνοι σας}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

Άρα, $\det A = (-1)^0 \det U \Rightarrow \det A = 2\cdot 4\cdot 2\cdot 2 = 32$

Για κάθε $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} n_1 & n_1 & n_1 & n_1 \\ n_1 & n_2 & n_2 & n_2 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} n_1 & n_1 & n_1 & n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_2-n_1 & n_2-n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_3-n_1 & n_3-n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_3-n_1 & n_4-n_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} n_1 & n_1 & n_1 & n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_2-n_1 & n_2-n_1 \\ 0 & 0 & n_3-n_2 & n_3-n_2 \\ 0 & 0 & n_3-n_2 & n_4-n_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} n_1 & n_1 & n_1 & n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_2-n_1 & n_2-n_1 \\ 0 & 0 & n_3-n_2 & n_3-n_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_4-n_3 \end{bmatrix} = U$$

Άρα $\det A = (-1)^0 \det U \Rightarrow \det A = n_1(n_2-n_1)(n_3-n_2)(n_4-n_3)$

ΑΣΚΗΣΗ 12

$$B = M^{-1} A M \Rightarrow \det B = \det(M^{-1} A M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B = (\det M^{-1})(\det A)(\det M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B = (\det A)\underbrace{(\det M^{-1})(\det M)}_{1} \Rightarrow \det B = \det A$$

Επίσης, $\det(A^{-1}B) = [\det(A^{-1})][\det B] = (\det A^{-1})(\det A) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$ με $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

και με $\det A \neq 1 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_4 - \alpha_3\alpha_2 \neq 1$

Επίσης, θέλουμε $\det(A-I)=0 \iff \begin{vmatrix} \alpha_1-1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4-1 \end{vmatrix}=0 \iff$

$\iff (\alpha_1-1)(\alpha_4-1)=\alpha_2\alpha_3 \iff \alpha_1\alpha_4-\alpha_4-\alpha_1+1=\alpha_2\alpha_3 \iff$

$\iff \alpha_1\alpha_4-\alpha_3\alpha_2=\alpha_1+\alpha_4-1$

Επομένως: $\left.\begin{cases} \det A\neq 1 \\ \det(A-I)=0 \end{cases}\right\} \iff \left.\begin{cases} \alpha_1\alpha_4-\alpha_3\alpha_2\neq 1 \\ \alpha_1\alpha_4-\alpha_3\alpha_2=\alpha_1+\alpha_4-1 \end{cases}\right\} \iff$

$\iff \left.\begin{cases} \alpha_1+\alpha_4-1\neq 1 \\ \alpha_2\alpha_3=(\alpha_1-1)(\alpha_4-1) \end{cases}\right\}$ δηλ. $\begin{cases} \alpha_4+\alpha_1\neq 2 \\ \alpha_2\alpha_3=(\alpha_1-1)(\alpha_4-1) \end{cases}$

Π.χ. για $\alpha_4=3$, $\alpha_1=2$, $\alpha_3=1$ βρίσκουμε $\alpha_2=2$

δηλ. $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ έχει $\det A=4\neq 1$

ενώ $\det(A-I)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$

ΑΣΚΗΣΗ 14

$\det A = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-1)+(-2)=4\neq 0$

άρα ο A αντιστρέφεται.

Επίσης, αφού $A=A^T \Rightarrow A^{-1}=(A^{-1})^T$ (δηλ. και A^{-1} συμμετρικός)

Έχουμε: $C_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ με $C_{ij}=C_{ji}$ (λόγω της συμμετρίας)

$C_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3$, $C_{12}=(-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2$, $C_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1$

$C_{21}=C_{12}=2$, $C_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4$, $C_{23}=(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=2$

$C_{31}=C_{13}=1$, $C_{32}=C_{23}=2$, $C_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3$

Άρα: $\alpha dj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Άρα: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \alpha dj(A) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2 - 1 + 0 = 1 \neq 0$ άρα ο B αντιστρέφεται.

Επίσης $B = B^T$ (συμμετρικός) άρα και B^{-1} συμμετρικός και επειδή $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \alpha dj(B)$ συνεπάγεται ότι και $\alpha dj(B)$ συμμετρικός.

Άρα $C_{ij} = C_{ji}$ $\forall$ $i,j \in \{1,2,3\}$ με $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det B_{ij}$

$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$, $C_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$C_{21} = C_{12} = -1$, $C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$, $C_{23} = C_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$C_{31} = C_{13} = 0$, $C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

Άρα: $\alpha dj(B) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Άρα: $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \alpha dj(B) = \alpha dj(B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$