ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

«Γραμμική Άλγεβρα» (ΗΥ119) – Χειμερινό Εξάμηνο 2009-2010
Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

<u>1^ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>

Άσκηση 1: Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων:

α) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3.1 \\ 3 & 1 & -0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}$, β) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1.3 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6\cos(\pi/6) & 7 & 2\sin(\pi/4) \\ \tan(\pi/4) & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

γ) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -\pi & 1/3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3 & -2 \\ \sqrt{\pi} & 4 \end{bmatrix}$, δ) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, ε) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

Άσκηση 2: Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες $A=\left(a_{ij}\right)$ και $B=\left(b_{ij}\right)$ με στοιχεία $a_{ij}=i+j$ και $b_{ij}=(-1)^{i+j}$.

Άσκηση 3: Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες $A=\left(a_{ij}\right)$ και $B=\left(b_{ij}\right)$ με στοιχεία $a_{ij}=i^2-j$, $b_{ij}=j^2$, και υπολογίστε τα γινόμενα *AB*, *BA* και $(-2)A^2$, και το άθροισμα $AB+BA$.

Άσκηση 4: Πόσοι μεμονωμένοι πολλαπλασιασμοί χρειάζονται όταν ένας $m\times n$ πίνακας *A* πολλαπλασιάζεται με ένα $n\times p$ πίνακα *B*;

Άσκηση 5: Ένας άλλος τρόπος να δούμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων, ως στήλες επί γραμμές. Συγκεκριμένα, αν οι στήλες του *A* είναι $c_1,...,c_n$ και οι γραμμές του *B* είναι τα διανύσματα-γραμμές $r_1,...,r_n$, τότε $c_1 r_1$ είναι ένας πίνακας και $AB=c_1r_1+c_2r_2+...+c_nr_n$

α) Δώστε ένα παράδειγμα 2 επί 2 αυτού του κανόνα πολλαπλασιασμού.

β) Εξηγήστε γιατί η δεξιά πλευρά δίνει τη σωστή τιμή $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ για το στοιχείο $(AB)_{ij}$.

Άσκηση 6: Δώστε παραδείγματα 4×4 και υπολογίστε το ίχνος κάθε πίνακα για τις περιπτώσεις:
α) διαγώνιου πίνακα, β) άνω τριγωνικού πίνακα, γ) κάτω τριγωνικού πίνακα

Άσκηση 7: Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι πάλι κάτω τριγωνικός. Δώστε ένα παράδειγμα 3×3 και εξηγήστε πως αυτό έπεται από τους νόμους του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Άσκηση 8: Βρείτε παραδείγματα πραγματικών πινάκων 2×2, τέτοιων ώστε: α) $A^2=-I$, β) $B^2=O$, με $B\neq O$.

Άσκηση 9: Αν για κάθε τετραγωνικό πίνακα $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, ισχύει $AB=BA$ με $A\neq 0$, τότε ο *A* είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού (μοναδιαίου) πίνακα. Αποδείξτε αυτήν την πρόταση για την περίπτωση που $n=2$.

Άσκηση 10: Ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι ίσοι με $(A+B)^2$, για κάθε $A, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$;

α) $(B+A)^2$, β) $(A+B)(B+A)$, γ) $A(A+B)+B(A+B)$, δ) $A^2+AB+BA+B^2$, ε) $A^2+2AB+B^2$

Άσκηση 11: Αν $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ με $ad-cb\neq 0$ δείξτε ότι $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, και βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν: $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Άσκηση 12: Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan για να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν:

$$\text{α) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{β) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{γ) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 13: Βρείτε τις πραγματικές τιμές x, y έτσι ώστε:

$$\text{α) } \begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{β) } 2\begin{bmatrix} 2y & y \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 14: Δείξτε ότι εάν ένας πίνακας έχει τουλάχιστον δύο γραμμές ίδιες, ή τουλάχιστον δύο στήλες ίδιες, τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 15: Βρείτε τον ανάστροφο των πινάκων:

$$\text{α) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{β) } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{γ) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{δ) } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 16: Συμπληρώστε τα * στους ακόλουθους πίνακες, έτσι ώστε να είναι συμμετρικοί:

$$\text{α) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ * & 7 & * \\ -5 & \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{β) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & * & \pi \\ * & \sqrt{3} & 13 & * \\ -6 & * & -5 & \sqrt{17} \\ * & -11 & * & 7 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 17: Γράψτε καθένα από τους παρακάτω πίνακες ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα

$$\text{α) } A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{β) } B=\begin{bmatrix} -2 & 11 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \\ 8 & 9 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 18: Βρείτε πίνακα A τέτοιο ώστε: $(4A^T)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

Άσκηση 19: Δίδονται πίνακες $A\in\mathbb{R}^{4\times 1}$, $B\in\mathbb{R}^{2\times 3}$, $C\in\mathbb{R}^{2\times 4}$ και $D\in\mathbb{R}^{1\times 3}$. Ποιοι από τους ακόλουθους πίνακες ορίζονται και τι μέγεθος έχουν;

$$\text{α) } ADB^T, \qquad \text{β) } C^TB-5AD, \qquad \text{γ) } 4CA-(CA)^2, \qquad \text{δ) } (ADB^TC)^2-I_4$$

Άσκηση 20: Βρείτε τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $A \neq I_2$ και $A \neq -I_2$, που ταυτίζονται με τους αντίστροφούς τους, δηλ. $A = A^{-1}$.

Άσκηση 21: Δώστε παραδείγματα πινάκων $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ έτσι ώστε:
α) Ο $A+B$ είναι μη-αντιστρέψιμος, μολονότι οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.
β) Ο $A+B$ είναι αντιστρέψιμος, μολονότι οι A και B είναι μη-αντιστρέψιμοι.
γ) Οι A, B και $A+B$ είναι μη-αντιστρέψιμοι.
δ) Οι A, B και $A+B$ είναι αντιστρέψιμοι.

Άσκηση 22: Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, αποδείξτε ότι οι πίνακες AA^T και $A^T A$ είναι συμμετρικοί και δείξτε με παραδείγματα ότι γενικά $AA^T \neq A^T A$ ακόμη και για τετραγωνικούς πίνακες.

Άσκηση 23: Πόσα στοιχεία είναι δυνατόν να οριστούν ανεξάρτητα σε ένα $n\times n$ συμμετρικό πίνακα και πόσα σε έναν $n\times n$ αντισυμμετρικό πίνακα;

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 1

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 1}}$

α) (Πίνακας 2Χ3)(Πίνακας 3Χ1) = (Πίνακας 2Χ1)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3.1 \\ 3 & 1 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1.5 + (-2)2.3 + 3.1\cdot 1.2 \\ 3\cdot 1.5 + 1\cdot 2.3 + (-0.2)1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 6.56 \end{bmatrix}$$

β) (Πίνακας 3Χ2)(Πίνακας 2Χ4) = (Πίνακας 3Χ4)

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1.3 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6\cos(\pi/6) & 7 & \sin(\pi/4) \\ \tan(\pi/4) & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1.3 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} & 7 & \sqrt{2} \\ 1 & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (\sqrt{2})1 & 1\cdot 3\sqrt{3} + (\sqrt{2})(2\sqrt{3}) & 1\cdot 7 + (\sqrt{2})\cdot 0 & 1\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{2})3 \\ (1.3)2 + 2\cdot 1 & (1.3)(3\sqrt{3}) + 2(2\sqrt{3}) & (1.3)7 + 2\cdot 0 & (1.3)(\sqrt{2}) + 2\cdot 3 \\ \frac{2\pi}{3} + (\sqrt{3})\cdot 1 & (\frac{\pi}{3})(3\sqrt{3}) + (\sqrt{3})(2\sqrt{3}) & (\frac{\pi}{3})7 + (\sqrt{3})\cdot 0 & (\frac{\pi}{3})\sqrt{2} + (\sqrt{3})3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} & 7 & 4\sqrt{2} \\ 4.6 & 7.9\sqrt{3} & 9.1 & 1.3\sqrt{2} + 6 \\ \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} & \pi\sqrt{3} + 6 & 7\pi/3 & \frac{\pi}{3}\sqrt{2} + 3\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

γ) (Πίνακας 3Χ3)(Πίνακας 3Χ2) = (Πίνακας 3Χ2)

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -\pi & 1/3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3 & -2 \\ \sqrt{\pi} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{4} + 0(-3) + (-1)\sqrt{\pi} & \frac{1}{2}0 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 \\ (-\pi)\frac{1}{4} + \frac{1}{3}(-3) + 4\sqrt{\pi} & (-\pi)0 + \frac{1}{3}(-2) + 4\cdot 4 \\ 0\cdot\frac{1}{4} + 2(-3) + 0\sqrt{\pi} & 0\cdot 0 + 2(-2) + 0\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}-\sqrt{\pi} & -4 \\ 4\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{4}-1 & 46/3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

δ) (πίνακας 3X1) (πίνακας 1X3) = (πίνακας 3X3)

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) & (-1)3 & (-1)2 \\ 0\cdot(-1) & 0\cdot 3 & 0\cdot 2 \\ 7(-1) & 7\cdot 3 & 7\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \end{bmatrix}$$

ε) (πίνακας 1X3) (πίνακας 3X1) = (πίνακας 1X1) δηλ. πίνακας-στοιχείο

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) + 3\cdot 0 + 2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$ με $\alpha_{ij} = i^2 - j$, άρα:

$$A=\begin{bmatrix}1^2-1 & 1^2-2 & 1^2-3\\ 2^2-1 & 2^2-2 & 2^2-3\\ 3^2-1 & 3^2-2 & 3^2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ 8 & 7 & 6\end{bmatrix}$$

Για τον $B=(b_{ij})$ με $b_{ij}=j^2$, έχουμε:

$$B=\begin{bmatrix}1^2 & 2^2 & 3^2\\ 1^2 & 2^2 & 3^2\\ 1^2 & 2^2 & 3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 9\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ 8 & 7 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 9\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0\cdot 1+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 1 & 0\cdot 4+(-1)\cdot 4+(-2)4 & 0\cdot 9+(-1)9+(-2)9\\ 3\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 1 & 3\cdot 4+2\cdot 4+1\cdot 4 & 3\cdot 9+2\cdot 9+1\cdot 9\\ 8\cdot 1+7\cdot 1+6\cdot 1 & 8\cdot 4+7\cdot 4+6\cdot 4 & 8\cdot 9+7\cdot 9+6\cdot 9\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & -12 & -27\\ 6 & 24 & 54\\ 21 & 84 & 189\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 4 & 9\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ 8 & 7 & 6\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 0+4\cdot 3+9\cdot 8 & 1(-1)+4\cdot 2+9\cdot 7 & 1(-2)+4\cdot 1+9\cdot 6\\ \gg & \gg & \gg\\ \gg & \gg & \gg\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}84 & 70 & 56\\ 84 & 70 & 56\\ 84 & 70 & 56\end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: $AB\neq BA$

$$(-2)A^2 = (-2)\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= (-2)\begin{bmatrix} -3-16 & -2-14 & -1-12 \\ 6+8 & -3+4+7 & -6+2+6 \\ 21+48 & -8+14+42 & -16+7+36 \end{bmatrix} =$$

$$= (-2)\begin{bmatrix} -19 & -16 & -13 \\ 14 & 8 & 2 \\ 69 & 48 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 32 & 26 \\ -28 & -16 & -4 \\ -138 & -96 & -54 \end{bmatrix}$$

$$AB + BA = \begin{bmatrix} -3 & -12 & -27 \\ 6 & 24 & 54 \\ 21 & 84 & 189 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 81 & 58 & 29 \\ 90 & 94 & 110 \\ 105 & 154 & 245 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω a_{ij} τα στοιχεία του πίνακα Α και b_{ij} τα στοιχεία του πίνακα Β

Τότε τα στοιχεία του ΑΒ υπολογίζονται από τη σχέση: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

με $i = 1, 2, \ldots m$ και $j = 1, 2, \ldots, p$

δηλ. για κάθε στοιχείο απαιτούνται n πολλ/σμοί, οπότε για τα mp στοιχεία του ΑΒ θα έχουμε mpn πολλ/σμούς.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_1 r_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix}$$

$$c_2 r_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = AB$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$c_1 r_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -4 \\ 21 & -3 \end{bmatrix}$$

$$c_2 r_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = c_1 r_1 + c_2 r_2 = \begin{bmatrix} 24 & -14 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}$$

β) Για $A=(\alpha_{ij})$, $B=(b_{ij})$ πίνακες $n\times n$, τότε

$$c_k r_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} b_{k1} & \alpha_{1k} b_{k2} & \dots & \alpha_{1k} b_{kn} \\ \alpha_{2k} b_{k1} & \alpha_{2k} b_{k2} & \dots & \alpha_{2k} b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{nk} b_{k1} & \alpha_{nk} b_{k2} & \dots & \alpha_{nk} b_{kn} \end{bmatrix}$$

δηλ. $(c_k r_k)_{ij} = \alpha_{ik} b_{kj}$, οπότε: $\sum_{k=1}^{n} (c_k r_k)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj} = (AB)_{ij}$

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) Διαγώνιος πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$tr(A) = 2-3+1+5 = 5$

β) Άνω τριγωνικός πίνακας:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με } tr(B) = 4+6-2+1 = 9$$

γ) Κάτω τριγωνικός πίνακας:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 9 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \text{με } tr(\Gamma) = 7+3+6-4 = 12$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Έστω: $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$

τότε: $AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21}b_{11} + \alpha_{22}b_{21} & \alpha_{22}b_{22} & 0 \\ \alpha_{31}b_{11} + \alpha_{32}b_{21} + \alpha_{33}b_{31} & \alpha_{32}b_{22} + \alpha_{33}b_{32} & \alpha_{33}b_{33} \end{bmatrix}$.

Γενικά, έστω $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με

$\alpha_{ij} = 0$, $b_{ij} = 0$ για $i<j$

τότε: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj}$, με $\alpha_{ik} b_{kj} = 0$ αν $\{k>i$ ή $k<j\}$

δηλ. μη-μηδενικοί όροι $\alpha_{ik} b_{kj} \neq 0$ (γενικά) αν $\{k \leq i$ και $k \geq j\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{ j \leq k \leq i \}$, άρα για $j \leq i$. Επομένως:

$$(AB)_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=j}^{i} \alpha_{ik} b_{kj}, & \text{όταν } j \leq i \\ 0, & \text{όταν } j > i \end{cases}$$

Δηλ. και ο AB είναι κάτω τριγωνικός.

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$, τότε $A^2 = -I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 + bc & (\alpha+d)b \\ (\alpha+d)c & d^2 + bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+d)b=0 \Leftrightarrow \{b=0 \text{ ή } d=-\alpha\} \\ (\alpha+d)c=0 \Leftrightarrow \{c=0 \text{ ή } d=-\alpha\} \\ \alpha^2+bc=-1 \\ d^2+bc=-1 \end{cases}$$

οι τιμές $b=0$ και $c=0$ απορρίπτονται γιατί οδηγούν σε $\alpha^2=d^2=-1$ που δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα, $\left[d=-\alpha \text{ και } \alpha^2+bc=-1\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{d=-\alpha \text{ και } c=-\frac{(1+\alpha^2)}{b}\right\}$ με $b\neq 0$

δηλ. $A=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ -\frac{(1+\alpha^2)}{b} & -\alpha \end{bmatrix}$, $\forall\ \alpha\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}^*$

π.χ. για $\alpha=b=1$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

β) Έστω $B=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$ με $\alpha,b,c,d\in\mathbb{R}$. Τότε $B^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2+bc & (\alpha+d)b \\ (\alpha+d)c & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+d)b=0 \Leftrightarrow \{b=0 \text{ ή } d=-\alpha\} \\ (\alpha+d)c=0 \Leftrightarrow \{c=0 \text{ ή } d=-\alpha\} \\ \alpha^2+bc=d^2+bc=0 \end{cases}$$

Αν $b=c=0$ τότε $\alpha=d=0$, δηλ. $B=0$ η οποία απορρίπτεται

Αν $\{d=-\alpha \text{ και } [b\neq 0 \text{ ή } c\neq 0]\}$, τότε $\alpha^2+bc=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{-bc}$ με $bc\leq 0$.

Επομένως, $B=\begin{bmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{bmatrix}$, $\forall\ b\neq 0$ ή/και $c\neq 0$ με $bc\leq 0$

π.χ. $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Έστω $A=[\alpha_{ij}]$, $B=[b_{ij}] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Έχουμε: $AB=BA \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11}+\alpha_{12}b_{21} & \alpha_{11}b_{12}+\alpha_{12}b_{22} \\ \alpha_{21}b_{11}+\alpha_{22}b_{21} & \alpha_{21}b_{12}+\alpha_{22}b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11}+\alpha_{21}b_{12} & \alpha_{12}b_{11}+\alpha_{22}b_{12} \\ \alpha_{11}b_{21}+\alpha_{21}b_{22} & \alpha_{12}b_{21}+\alpha_{22}b_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \alpha_{12}b_{21}=\alpha_{21}b_{12} \\ \alpha_{21}b_{12}=\alpha_{12}b_{21} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{\alpha_{12}b_{21}=\alpha_{21}b_{12},\ \forall b_{21},b_{12}\in\mathbb{R}\} \Leftrightarrow \{\alpha_{12}=\alpha_{21}=0\} \\ \alpha_{11}b_{12}+\alpha_{12}b_{22}=\alpha_{12}b_{11}+\alpha_{22}b_{12} \\ \alpha_{21}b_{11}+\alpha_{22}b_{21}=\alpha_{11}b_{21}+\alpha_{21}b_{22} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_{12}=\alpha_{21}=0 \\ \left.\begin{array}{l} \alpha_{11}b_{12}-b_{12}\alpha_{22}=0 \\ \alpha_{22}b_{21}-b_{21}\alpha_{11}=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (\alpha_{11}-\alpha_{22})b_{12}=0 & \forall\ b_{12}\in\mathbb{R} \\ (\alpha_{22}-\alpha_{11})b_{21}=0 & \forall\ b_{21}\in\mathbb{R} \end{array}\right. \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_{12}=\alpha_{21}=0 \\ \alpha_{22}=\alpha_{11} \end{array}\right.$$ δηλ. $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} \end{bmatrix}=\alpha_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\alpha_{11}I_2$

ΑΣΚΗΣΗ 10

α) $B+A=A+B \Rightarrow (B+A)^2=(A+B)^2$

β) $(A+B)(B+A)=(A+B)(A+B)=(A+B)^2$

γ) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)$

δ) $(A+B)^2=A(A+B)+B(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

ε) $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=(A^2+AB+BA+B^2)-$

$-(A^2+2AB+B^2)=BA-AB\neq 0$ γενικά

Άρα: $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

ΑΣΚΗΣΗ 11

$$\begin{bmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{bmatrix}\frac{1}{\alpha d-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & \alpha\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha d-bc}\begin{bmatrix}\alpha d-bc & -\alpha b+b\alpha\\ dc-cd & -bc+\alpha d\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\alpha d-bc}\begin{bmatrix}\alpha d-bc & 0\\ 0 & \alpha d-bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

Ομοίως: $\frac{1}{\alpha d-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

Αν $A=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, τότε $\alpha d-bc=3\cdot 4-8\cdot 1=4\neq 0$

άρα: $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & -8\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$

Αν $A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, τότε $\alpha d-bc=3\cdot 4-6\cdot 2=0$ και άρα $\nexists\, A^{-1}$

Αν $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, τότε $\alpha d-bc=\cos^2\theta-(-\sin\theta)\sin\theta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

και επομένως $A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 12

α)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}(-1)\ (-2)\\ (+)\\ (+)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \left(\frac{-3}{2}\right)\\ (+)\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}/1\\ /2\\ /3\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/2 & 1/3\end{array}\right]$$

Δηλ. για $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 3\end{bmatrix}$ έχουμε: $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ -1/6 & -1/2 & 1/3\end{bmatrix}$

β)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}1/2\\ (+)\\ \\ \end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \left(\frac{-1}{3}\right)\\ (+)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}(+)\\ (+)\\ (-3)\ (-4)\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 5/3 & 4/3 & -4\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}/2\\ /3\\ /1\end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/6 & 2/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{array}\right]$$

Άρα για $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ έχουμε: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/6 & 2/3 & -2 \\ 1/3 & 2/3 & -1 \\ -1/6 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$

γ) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-3)\ (-2) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

δηλ. $\nexists$ πλήρες σύνολο μη-μηδενικών οδηγών, και άρα ο αρχικός πίνακας είναι μη-αντιστρέψιμος

ΑΣΚΗΣΗ 13

α) Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος ανν $4x-7 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{7}{4}$. Σ' αυτήν την περίπτωση: $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4x-7}\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 2x \end{bmatrix}$

Οπότε: $$\begin{bmatrix} \frac{2}{4x-7} & \frac{-7}{4x-7} \\ \frac{-1}{4x-7} & \frac{2x}{4x-7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2(4x-7) \Leftrightarrow x=2 \\ \text{και} \\ -7=-7(4x-7) \Leftrightarrow x=2 \\ \text{και} \\ -1=-1(4x-7) \Leftrightarrow x=2 \\ \text{και} \\ 2x=4(4x-7) \Leftrightarrow x=2 \end{cases} \qquad \text{Άρα: } x=2$$

β) ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2y & y \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, ανν $3(2y)-5y \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \neq 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση: $\begin{bmatrix} 2y & y \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{y}\begin{bmatrix} 3 & -y \\ -5 & 2y \end{bmatrix}$

οπότε: $\frac{2}{y}\begin{bmatrix} 3 & -y \\ -5 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -2y \\ -10 & 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y & -2y \\ -5y & 4y \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6=3y \Leftrightarrow y=2 \\ \text{και} \\ -2y=-2y \Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ -10=-5y \Leftrightarrow y=2 \\ \text{και} \quad 4y=4y \Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \end{cases}, \qquad \text{Άρα: } y=2$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Έστω ο πίνακας $A=[\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με ίδιες τις γραμμές p και s (με $p\leq n$, $s \leq n$, $p\neq s$). Δηλ. $\alpha_{pk} = \alpha_{sk}$, $\forall\ k=1,\dots,n$

Τότε αν $B=[b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ένας οποιοσδήποτε nxn πίνακας θα ισχύει: $(AB)_{pj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{pk} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{sk} b_{kj} = (AB)_{sj}$, $\forall\ j=1,\dots,n$

δηλ. ο πίνακας AB θα έχει επίσης ίδιες τις γραμμές p και s, $\forall\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Όμως, ο μοναδιαίος πίνακας I_n έχει κάθε γραμμή του διαφορετική από την άλλη και επομένως $AB \neq I_n$ $\forall\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Άρα, δεν υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τ.ω. $AB = I_n$ και συνεπώς ο A είναι μη-αντριστέψιμος.

Αντίστοιχα, αν ο πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει ίδιες τις στήλες p και s (με $p \leq n$, $s \leq n$, $p \neq s$), δηλ. $\gamma_{kp} = \gamma_{ks}$, $\forall\ k = 1, \ldots, n$,

Τότε: $$(B\Gamma)_{ip} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\gamma_{kp} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\gamma_{ks} = (B\Gamma)_{is}, \ \forall\ i = 1, \ldots, n$$

δηλ. ο πίνακας $B\Gamma$ θα έχει επίσης ίδιες τις στήλες p και s, $\forall\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Όμως, ο I_n έχει κάθε στήλη διαφορετική από την άλλη, οπότε $B\Gamma \neq I_n$ $\forall\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και άρα, ο Γ δεν είναι αντιστρέψιμος.

ΑΣΚΗΣΗ 15

α) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

β) $$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

γ) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δ) $$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

α) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & \sqrt{2} \\ -5 & \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$$

β) $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 & \pi \\ -1 & \sqrt{3} & 13 & -11 \\ -6 & 13 & -5 & \sqrt{17} \\ \pi & -11 & \sqrt{17} & 7 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 17

α) $A = S_A + W_A$ με S_A συμμετρικό και W_A αντισυμμετρικό πίνακα

$$S_A = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -14 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -7 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W_A = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & -11 \\ -3 & 11 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & 3/2 \\ 5/2 & 0 & -11/2 \\ -3/2 & 11/2 & 0 \end{bmatrix}$$

β) $B = S_B + W_B$ όπου S_B συμμετρικός και W_B αντισυμμετρικός πίνακας

$$S_B = \frac{1}{2}(B + B^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -2 & 11 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \\ 8 & 9 & -7 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 & 8 \\ 11 & -3 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 15 & 4 & 10 \\ 15 & -6 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 12 & -8 \\ 10 & 10 & -8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 15/2 & 2 & 5 \\ 15/2 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$W_B = \frac{1}{2}(B - B^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & -6 \\ -7 & 0 & -2 & -8 \\ -2 & 2 & 0 & 6 \\ 6 & 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

$$(4A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 4A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4A^T = \frac{1}{2(-4)-3(-4)}\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 4 & 2\end{bmatrix} \Leftrightarrow 4A^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 4 & 2\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^T = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 4 & 2\end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}-4 & 4\\ -3 & 2\end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix}-1/4 & 1/4\\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

α) $\underset{(4\times1)}{A}\,\underset{(1\times3)}{D}\,\underset{(3\times2)}{B^T}$ $\Big\}$ ορίζεται και είναι 4×2

β) $\underset{(4\times2)}{C^T}\,\underset{(2\times3)}{B} - 5\underset{(4\times1)}{A}\,\underset{(1\times3)}{D}$ $\Big\}$ ορίζεται και είναι 4×3

γ) $4CA-(CA)^2 = 4\underset{(2\times4)(4\times1)}{CA} - \underbrace{(CA)}_{(2\times1)}\underbrace{(CA)}_{(2\times1)}$ δεν ορίζεται γιατί δεν ορίζεται το $(CA)^2$ μολονότι ορίζεται το CA

δ) $\underset{(4\times1)}{A}\,\underset{(1\times3)}{D}\,\underset{(3\times2)}{B^T}\,\underset{(2\times4)}{C}$ είναι 4×4, άρα και το $(ADB^TC)^2 - I_4$ ορίζεται και είναι 4×4.

ΑΣΚΗΣΗ 20

$$\left.\begin{array}{l} A = A^{-1}\\ AA^{-1} = I\end{array}\right\} \Rightarrow A^2 = I$$

Έστω $A = \begin{bmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{bmatrix}$ με $\alpha, b, c, d \in \mathbb{R}$

Τότε $A^2 = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2+bc & (\alpha+d)b \\ (\alpha+d)c & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+d)b = 0 \Leftrightarrow \{b=0 \text{ ή } d=-\alpha\} \\ (\alpha+d)c = 0 \Leftrightarrow \{c=0 \text{ ή } d=-\alpha\} \\ \alpha^2+bc=1 \\ d^2+bc=1 \end{cases}$$

Αν $d=-\alpha$, τότε η 3η και η 4η εξίσωση είναι ίδιες, οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} d=-\alpha \\ \alpha^2+bc=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} d=-\alpha \\ \alpha=\pm\sqrt{1-bc} \end{cases}, \text{ για } bc \leq 1$$

Επομένως: $A = \begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$ ή $A = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$ $\forall\, b,c \in \mathbb{R}$ με $bc \leq 1$

Αν $b=0$ ή $c=0$, τότε $\alpha^2=d^2=1$ οι οποίες για $A \neq \pm I$ δίνουν:

$d=-\alpha=\pm 1$, που επίσης μπορεί να προκύψει από τους δύο παραπάνω γενικούς τύπους του A αν βάλουμε b=0 ή/και c=0.

ΑΣΚΗΣΗ 21

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος, αφού

$4\cdot 1 - 3\cdot 2 = -2 \neq 0$, και έστω $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ όπου επίσης

είναι αντιστρέψιμος $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Τότε:

$A+B = \begin{bmatrix} 1+x & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι μη-αντιστρέψιμος ανν

$4(1+x) - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Άρα: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1/2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ αντιστρέψιμοι, ενώ

$A+B=\begin{bmatrix}3/2 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ μη-αντιστρέψιμος.

β) Έστω $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}x & -1\\ 2x & -2\end{bmatrix}$ οι οποίοι είναι

μη-αντιστρέψιμοι αφού για τον A: $\alpha d-bc=1\cdot 6-3\cdot 2=0$ και

για τον B: $\alpha d-bc=-2x-(-1)2x=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Τότε $A+B=$

$=\begin{bmatrix}1+x & 1\\ 3+2x & 4\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος ανν $4(1+x)-(3+2x)1\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq -\frac{1}{2}$ π.χ. $x=1$

Άρα: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ μη-αντιστρέψιμοι, ενώ

$A+B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ αντιστρέψιμος

γ) Αν επιλέξουμε πάλι $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}x & -1\\ 2x & -2\end{bmatrix}$

τότε από το ερώτημα (β) έχουμε ότι για $x=-1/2$ και

οι τρεις πίνακες $A, B, A+B$ είναι μη-αντιστρέψιμοι

δηλ. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1/2 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$, $A+B=\begin{bmatrix}1/2 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

δ) Αν επιλέξουμε $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}x & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ όπως στο ερώτημα (α), με $x \neq \frac{1}{2}$, τότε $A, B, A+B$ είναι αντιστρέψιμοι.

Π.χ. για $x=1$, έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \quad A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 22

Έστω, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ τότε:

AA^T =(πίνακας $m \times n$) (πίνακας $n \times m$) =(τετραγωνικός πίνακας $m \times m$)

και $\left(AA^T\right)^T = \left(A^T\right)^T A^T = AA^T$ Άρα, ο AA^T είναι συμμετρικός

Επίσης,

A^TA =(πίνακας $n \times m$) (πίνακας $m \times n$) =(τετραγωνικός πίνακας $n \times n$)

και $\left(A^TA\right)^T = A^T\left(A^T\right)^T = A^TA$ Άρα, ο A^TA είναι συμμετρικός

Για μη-τετραγωνικούς πίνακες $(m \neq n)$ είναι προφανές ότι ο $m \times m$ πίνακας AA^T δεν μπορεί να είναι ίσος με τον $n \times n$ πίνακα A^TA.

Από την άλλη έστω ο 3×3 τετραγωνικός πίνακας:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\ 4 & 7 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad \text{τότε} \quad A^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 8 & 7 & 0\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$AA^T=\begin{bmatrix}74 & 57 & -7\\ 57 & 66 & -2\\ -7 & -2 & 5\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}18 & 36 & -1\\ 36 & 113 & -17\\ -1 & -17 & 14\end{bmatrix} = A^TA$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

Γενικά σε ένα $n \times n$ πίνακα έχουμε n^2 στοιχεία, τα οποία αποτελούνται από:

1) n στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, και
2) ισάριθμα πλήθη στοιχείων πάνω και κάτω από τη διαγώνιο.

Άρα: $\begin{cases} n \text{ στοιχεία στη διαγώνιο} \\ \dfrac{n^2-n}{2} \text{ στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο} \\ \dfrac{n^2-n}{2} \text{ στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο} \end{cases}$

Επειδή σε ένα συμμετρικό πίνακα A, έχουμε $(A)_{ij} = (A)_{ji}$, αρκεί να οριστούν τα στοιχεία της διαγωνίου και τα στοιχεία μόνο πάνω ή μόνο κάτω από τη διαγώνιο. Άρα, είναι δυνατόν να οριστούν ανεξάρτητα $n + \dfrac{n^2-n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ στοιχεία.

Αντίστοιχα, σε ένα αντισυμμετρικό πίνακα B, έχουμε $(B)_{ij} = -(B)_{ji}$, οπότε τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδέν και άρα αρκεί να οριστούν τα στοιχεία μόνο πάνω ή μόνο κάτω από τη διαγώνιο. Άρα, είναι δυνατόν να οριστούν ανεξάρτητα $\dfrac{n^2-n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ στοιχεία.