ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Λύσεις των Θεμάτων της Εξέτασης Σεπτεμβρίου 2010 στο μάθημα:

«Γραμμική Άλγεβρα» (ΗΥ119)

Ηράκλειο, 31 Αυγούστου 2010

Θέμα 1. (μονάδες 3.5)

α) [*μονάδες: 0.5*] Υπολογίστε την ορίζουσα του παρακάτω πίνακα συναρτήσει της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

β) [*μονάδες: 0.3*] Για ποιες τιμές της παραμέτρου α ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος;

γ) [*μονάδες: 1.0*] Επιλέξτε στην τύχη μια από τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (β), και υπολογίστε τον αντίστροφο του A γι' αυτή την τιμή.

δ) [*μονάδες: 0.5*] Χρησιμοποιήστε την τιμή του α που επιλέξατε στο ερώτημα (γ) και βρείτε τη λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$, όπου $\vec{b} = \left(-1, 1, 2\right)$.

ε) [*μονάδες: 1.2*] Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss για να λύσετε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$, όπου $\vec{b} = \left(-1, 1, 2\right)$, για τις τιμές (ή τιμή) του α για τις οποίες (ή οποία) ο A είναι μη-αντιστρέψιμος. (*Σημείωση: να διακρίνετε τις βασικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές πριν κάνετε ανάδρομη αντικατάσταση*). Βρείτε τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $A\vec{x} = \vec{0}$, <u>χωρίς να το επιλύσετε</u>;

Λύση

α) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 2(4 + 2\alpha) = 16 + 4\alpha$

β) Ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$ δηλ. ανν $16 + 4\alpha \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha \neq -4$

γ) Επιλέγω στην τύχη ένα πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -4$. Έστω $\alpha = -3$

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan έχουμε:

$$\left[A \,|\, I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2 \\ \\ (+) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 2 \\ (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ll} & (+) \\ (+) & \\ (1/2) & (-5/4) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -5/2 & -3/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} (+) \\ 3 \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot(-1/4) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{array}\right] = \left[I_3 \mid A^{-1} \right]$$

Επομένως: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$

δ) Αφού $\det A \neq 0$, το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, δηλαδή

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ -2 + 1 + 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

ε) Για $\alpha = -4$, έχουμε: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Για να βρούμε τη λύση του $A\vec{x} = \vec{b}$ εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss:

$$\left[A \mid \vec{b} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \text{εναλλαγή} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 4 \\ (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[U \mid \vec{d} \right]$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{d} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: x, y (αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς)

Ελεύθερη μεταβλητή: z (αντιστοιχούν στις στήλες του U που δεν έχουν οδηγούς)

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

3^{η} εξίσωση: $0x + 0y + 0z = 0$ που ισχύει $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

2^{η} εξίσωση: $y + 2z = -1 \Rightarrow y = -1 - 2z$

1^{η} εξίσωση: $x - 4y - 5z = 1 \Rightarrow x - 4(-1 - 2z) - 5z = 1 \Rightarrow x = -3 - 3z$

Άρα, το $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\vec{x}=\begin{bmatrix}-3-3z\\-1-2z\\z\end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$, η οποία γράφεται και ως: $\vec{x}=\begin{bmatrix}-3\\-1\\0\end{bmatrix}+\underbrace{z\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\end{bmatrix}}_{\substack{\text{γενική λύση}\\ \text{του } A\vec{x}=\vec{0}}}$, με $z\in\mathbb{R}$

Από αυτή τη μορφή προκύπτει ότι το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\vec{x}=z\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$

<u>Θέμα 2. (μονάδες 2.0)</u>

Η τάξη ενός πίνακα $A\in\mathbb{R}^{7\times 9}$ είναι $r(A)=4$. Απαντήστε στα παρακάτω <u>αιτιολογώντας</u> τις απαντήσεις σας:

α) [*μονάδες: 0.25*]. Πόσες μηδενικές γραμμές θα έχει ο κλιμακωτός πίνακας U που προκύπτει από τον A κάνοντας απαλοιφές μεταξύ γραμμών;

β) [*μονάδες: 0.25*]. Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχετε σε ένα συγκεκριμένο σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$;

γ) [*μονάδες: 0.25*]. Πόσες λύσεις έχει το ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$;

δ) [*μονάδες: 0.25*]. Τι συμπεράσματα μπορείτε να εξάγετε για το πλήθος των λύσεων ενός συστήματος $A\vec{x}=\vec{b}$, με $\vec{b}\neq\vec{0}$.

ε) [*μονάδες: 0.25*]. Ποια είναι η διάσταση του μηδενοχώρου και ποια η διάσταση του χώρου στηλών του A;

στ) [*μονάδες: 0.25*]. Είναι οι στήλες του A γραμμικώς εξαρτημένα ή γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα;

ζ) [*μονάδες: 0.25*]. Αν ο A είναι ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^p$, τότε ποια είναι τα k και p;

η) [*μονάδες: 0.25*]. Η απεικόνιση του προηγούμενου ερωτήματος είναι «1-1» ή/και «επί»;

<u>Λύση</u>

Έχουμε: [πλήθος γραμμών του A] $=m=7$, [πλήθος στηλών του A] $=n=9$

α) Επειδή $r(A)=$[πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U], ο U θα έχει 4 μη-μηδενικές γραμμές και άρα, $m-4=7-4=3$ μηδενικές γραμμές.

β) Έχουμε: [πλήθος βασικών μεταβλητών] $=r(A)=4$ και
[πλήθος ελεύθερων μεταβλητών] $=n-r(A)=9-4=5$
Άρα, 4 βασικές και 5 ελεύθερες μεταβλητές

γ) Επειδή $r(A) \neq n$, το ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις.
(2[ος] *τρόπος*: Γενικά, ένα ομογενές σύστημα μπορεί είτε να έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$, είτε να έχει άπειρες λύσεις. Εδώ το ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει 7 εξισώσεις και 9 αγνώστους, δηλαδή λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους. Άρα δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση. Επομένως, θα έχει άπειρες).

δ) Επειδή $r(A) \neq n$ το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει ελεύθερες μεταβλητές και άρα δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση. Επιπλέον έχουμε $r(A) < m$ και επομένως, το σύστημα μπορεί **είτε να μην έχει λύση, είτε να έχει άπειρες** [για συγκεκριμένο πίνακα A αυτό εξαρτάται από το αν το $\vec{b} \in \mathcal{R}(A)$].

ε) Για το μηδενόχωρο έχουμε: $\dim \mathcal{N}(A) = n - r(A) = 9 - 4 = 5$
Για το χώρο στηλών έχουμε: $\dim \mathcal{R}(A) = r(A) = 4$

στ) Επειδή $r(A) \neq n$, οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα

ζ) Αν A ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, τότε για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ θα πρέπει να ορίζεται το γινόμενο $A\vec{x}$ και να είναι $(A\vec{x}) \in \mathbb{R}^p$. Δηλαδή $A \in \mathbb{R}^{p \times k}$. Άρα $p = 7$ και $k = 9$.

η) Ξέρουμε ότι {η f είναι «1-1»} $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$.
Εδώ έχουμε $r(A) = 4 \neq 9 = n$ και άρα η f δεν είναι «1-1».
Επίσης, ξέρουμε ότι {η f είναι «επί»} $\Leftrightarrow$ $r(A) = m$.
Εδώ έχουμε $r(A) = 4 \neq 7 = m$ και άρα η f δεν είναι «επί».

Θέμα 3. (μονάδες 2.0)

Έστω ο πραγματικός διανυσματικός υπόχωρος $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$ του $\mathbb{R}^3$ με

$$\vec{v}_1 = (0, 2, -1), \qquad \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \qquad \vec{v}_3 = (1, 3, -1), \qquad \vec{v}_4 = (3, 1, 1).$$

Δηλαδή ο V παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$.

α) [*μονάδες: 1.0*]. Βρείτε μια βάση του V και τη διάσταση του. Τι παριστάνει γεωμετρικά ο χώρος V;

β) [*μονάδες: 1.0*]. Μπορείτε να γράψετε το V στη μορφή
$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$;
Αν ναι, τότε να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ.

Λύση

α) Σχηματίζουμε τον πίνακα A με στήλες τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$. Δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, ο V ταυτίζεται με το χώρο στηλών του A. Δηλαδή, $V \equiv \mathcal{R}(A)$

Έπειτα, βρίσκουμε τον αντίστοιχο κλιμακωτό πίνακα:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&3\\2&-1&3&1\\-1&1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{εναλλαγή}}\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\\2&-1&3&1\\0&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{2\,(+)}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\\0&1&1&3\\0&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)\,(+)}\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\\0&1&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

Επομένως, έχουμε $r(A)=2$ (= πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U)
Άρα, $\dim\mathcal{R}(A)=2 \Rightarrow \dim V=2$

{μια βάση του V} = {μια βάση του $\mathcal{R}(A)$} = $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}=\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ (δηλ. οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς)

Ο V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και έχει διάσταση 2. Άρα, γεωμετρικά παριστάνει ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από το $(0,0,0)$. Συγκεκριμένα, είναι το επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία $\vec{0},\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$, δηλαδή από τα σημεία: $(0,0,0)$, $(0,2,-1)$ και $(1,-1,1)$.

β) Ο V μπορεί να γραφτεί στη μορφή: $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus \alpha x+\beta y+\gamma z=0\right\}$ διότι παριστάνει ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από το $(0,0,0)$. Επειδή περνά και από τα $(0,2,-1)$ και $(1,-1,1)$ θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\cdot 0+\beta\cdot 2+\gamma\cdot(-1)=0\\ \alpha\cdot 1+\beta\cdot(-1)+\gamma\cdot 1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\beta-\gamma=0\\ \alpha-\beta+\gamma=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Όμως,

$$\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{εναλλαγή}}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: α,β
Ελεύθερη μεταβλητή: γ
<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

2^{η} εξίσωση: $2\beta-\gamma=0 \Rightarrow \beta=\frac{1}{2}\gamma$

1^{η} εξίσωση: $\alpha-\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha-\frac{1}{2}\gamma+\gamma=0 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2}\gamma$

Άρα, το ζητούμενο επίπεδο έχει εξίσωση:

$$\gamma\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z\right)=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0 \Rightarrow -x+y+2z=0$$

δηλαδή, $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus -x+y+2z=0\}$

Θέμα 4. (μονάδες 2.5)

α) [*μονάδες: 0.5*] Έστω ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ με $A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$. Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και οι ιδιοτιμές του A.

β) [*μονάδες: 1.0*] Δείξτε ότι ο A διαγωνιοποιείται και βρείτε ένα πίνακα P που το διαγωνιοποιεί, καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο D.

γ) [*μονάδες: 1.0*] Χρησιμοποιώντας τους πίνακες που βρήκατε στο ερώτημα (β), να βρεθεί ο A^{200}.

Λύση

α) $X_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -4\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(-2-\lambda)+4=\lambda^2-\lambda-2$

$$X_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι: $\lambda_1=2$ & $\lambda_2=-1$

β) Ο A διαγωνιοποιείται γιατί είναι 2×2 και έχει 2 διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=2$, έχουμε:

$$A-\lambda_1 I_2=A-2I_2=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & -4\end{bmatrix}$$

Άρα: $(A-\lambda_1 I_2)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow x-4y=0 \Leftrightarrow x=4y$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_2(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\vec{x}=\begin{bmatrix}4y\\ y\end{bmatrix}$

δηλ. $\vec{x}=y\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix},\quad y\in\mathbb{R}$ και άρα: $\mathbb{B}_2=\{\text{μια βάση του } V_2(A)\}=\left\{\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=-1$, έχουμε:

$$A-\lambda_2 I_2=A+I_2=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Άρα: $(A-\lambda_2 I_2)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\vec{x}=\begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$

δηλ. $\vec{x}=y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y\in\mathbb{R}$ και άρα: $\mathbb{B}_{-1}=\{$μια βάση του $V_{-1}(A)\}=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Έστω το σύνολο $\mathbb{B}=\mathbb{B}_2\cup\mathbb{B}_{-1}=\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Ένας πίνακας που διαγωνιοποιεί τον A είναι ο $P=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα του $\mathbb{B}$) και ο αντίστοιχος διαγώνιος που είναι όμοιος με τον A μέσω της σχέσης $A=PDP^{-1}$ είναι ο $D=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο τοποθετημένες με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P).

γ) Ο A^{200} μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση: $A^{200}=PD^{200}P^{-1}$.
Έχουμε:

$$D^{200}=\begin{bmatrix} 2^{200} & 0 \\ 0 & (-1)^{200} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^{200} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο P είναι ένας 2×2 αντιστρέψιμος πίνακας, οπότε χρησιμοποιώντας τη γενική σχέση:

$$P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad P^{-1}=\frac{1}{\det P}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

προκύπτει ότι $P^{-1}=\dfrac{1}{4-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$

Άρα: $A^{200}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{200} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^{202} & 1 \\ 2^{200} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{2^{202}-1}{3} & \dfrac{4-2^{202}}{3} \\ \dfrac{2^{200}-1}{3} & \dfrac{4-2^{200}}{3} \end{bmatrix}$$