ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Λύσεις των Θεμάτων της Εξέτασης Ιανουαρίου 2010 στο μάθημα:
«Γραμμική Άλγεβρα» (HY119)

Ηράκλειο, 17 Ιανουαρίου 2010

Θέμα 1. (μονάδες 1.5)

α) [*μονάδες: 1.0*]. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ και εξηγήστε γιατί είναι αντιστρέψιμος. Κατόπιν βρείτε τον αντίστροφο του A.

β) [*μονάδες: 0.5*]. Έστω ένας πραγματικός τετραγωνικός πίνακας $B \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ τέτοιος ώστε: $\left(B^{-1}\right)^{20} = -4I$. Υπολογίστε την ορίζουσα του B.

Λύση

α) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -20 + 18 = -2$

και ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος επειδή $\det A \neq 0$.

Για να βρούμε τον A^{-1} θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan. Έχουμε:

$$\left[A \mid I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{εναλλαγή} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-3) \\ \\ (+) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-2) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (+) \\ (+) \\ 5 \quad (-3) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 10 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -9 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-1/2) \\ \cdot(-1) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 10 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 9/2 & 15/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] = \left[I_3 \mid A^{-1}\right]$$

Επομένως: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -3 \\ 9/2 & 15/2 & -5/2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

β) $\left(B^{-1}\right)^{20} = -4I \Rightarrow \left(\det B^{-1}\right)^{20} = (-4)^{10}\det I \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\det B}\right)^{20} = 4^{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\det B}\right)^{2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{\det B} = \pm 2 \Rightarrow \det B = \pm\frac{1}{2}$$

<u>Θέμα 2. (μονάδες 2.0)</u>

Έστω το σύστημα: $\begin{cases} y+4z-w=4 \\ x+2y-7z=-3 \\ -2x-6y+6z+2w=-2 \end{cases}$ με αγνώστους $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.

α) [*μονάδες: 0.25*]. Χωρίς να κάνετε πράξεις, αποφανθείτε αν το σύστημα έχει μοναδική λύση ή όχι.

β) [*μονάδες: 0.25*]. Γράψτε το σύστημα στη μορφή $A\vec{x} = \vec{b}$

γ) [*μονάδες: 1.2*]. Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss για να λύσετε το σύστημα, διακρίνοντας τις βασικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές πριν κάνετε ανάδρομη αντικατάσταση. Ποια είναι η λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $A\vec{x} = \vec{0}$;

δ) [*μονάδες: 0.3*]. Ποια είναι η τάξη του A;

<u>Λύση</u>

α) Το σύστημα δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση γιατί έχει λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους.

β)

$$\left.\begin{array}{l} y+4z-w=4 \\ x+2y-7z=-3 \\ -2x-6y+6z+2w=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -7 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

γ) Απαλοιφή Gauss:

$$\left[A \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 0 & -3 \\ -2 & -6 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ -2 & -6 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 2 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[U \mid \vec{d}\right]$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{d} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: x, y (αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς)

Ελεύθερες μεταβλητές: z, w (αντιστοιχούν στις στήλες του U που δεν έχουν οδηγούς)

Ανάδρομη αντικατάσταση:

3^{η} εξίσωση: $0x+0y+0z+0w=0$ που ισχύει $\forall(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$

2^{η} εξίσωση: $y+4z-w=4 \Rightarrow y=4-4z+w$

1^{η} εξίσωση: $x+2y-7z=-3 \Rightarrow x+2(4-4z+w)-7z=-3 \Rightarrow x=-11+15z-2w$

Άρα, το $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\vec{x}=\begin{bmatrix}-11+15z-2w\\4-4z+w\\z\\w\end{bmatrix}$ με $z,w\in\mathbb{R}$

Οι λύσεις αυτές γράφονται ισοδύναμα και ως:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-11\\4\\0\\0\end{bmatrix}+\underbrace{z\begin{bmatrix}15\\-4\\1\\0\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}}_{\text{γενική λύση του } A\vec{x}=\vec{0}} \quad \text{με } z,w\in\mathbb{R}$$

Από αυτή τη μορφή προκύπτει ότι το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\vec{x}=z\begin{bmatrix}15\\-4\\1\\0\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ με $z,w\in\mathbb{R}$

δ) $r(A)=[\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] \Rightarrow r(A)=2$

<u>Θέμα 3. (μονάδες 2.0)</u>

Η τάξη ενός πίνακα $A\in\mathbb{R}^{8\times5}$ είναι $r(A)=5$. Απαντήστε στα παρακάτω <u>αιτιολογώντας</u> τις απαντήσεις σας:

α) [*μονάδες: 0.25*]. Πόσες μηδενικές γραμμές θα έχει ο κλιμακωτός πίνακας U που προκύπτει από τον A κάνοντας απαλοιφές μεταξύ γραμμών;

β) [*μονάδες: 0.25*]. Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχετε σε ένα συγκεκριμένο σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$;

γ) [*μονάδες: 0.25*]. Πόσες λύσεις έχει ένα συγκεκριμένο σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$, με $\vec{b}\neq\vec{0}$;

δ) [*μονάδες: 0.25*]. Να λυθεί το ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$

ε) [*μονάδες: 0.25*]. Ποια είναι η διάσταση του μηδενοχώρου και ποια η διάσταση του χώρου στηλών του A;

στ) [*μονάδες: 0.25*]. Είναι οι στήλες του A γραμμικώς εξαρτημένα ή γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα;

ζ) [*μονάδες: 0.25*]. Αν ο A είναι ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^p$, τότε ποια είναι τα k και p;

η) [*μονάδες: 0.25*]. Η απεικόνιση του προηγούμενου ερωτήματος είναι «1-1» ή/και «επί»;

Λύση

α) Επειδή $r(A) =$[πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U], ο U θα έχει 5 μη-μηδενικές γραμμές και άρα, 8-5 = 3 μηδενικές γραμμές.

β) Έχουμε: [πλήθος βασικών μεταβλητών] $= r(A) = 5$ και
[πλήθος ελεύθερων μεταβλητών] $= n - r(A) = 5 - 5 = 0$
Άρα, 5 βασικές μεταβλητές και καμία ελεύθερη μεταβλητή

γ) Επειδή $r(A) = n$ το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές και άρα δεν μπορεί να έχει άπειρες λύσεις. Επιπλέον $r(A) < m$ και επομένως, το σύστημα μπορεί **είτε να μην έχει καμία λύση, είτε να έχει μοναδική λύση** [για συγκεκριμένο πίνακα A, αυτό εξαρτάται από το αν το $\vec{b} \in \mathcal{R}(A)$].

δ) Επειδή $r(A) = n$, το ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = (0,0,0,0,0)$

ε) Για το μηδενόχωρο έχουμε: $\dim \mathcal{N}(A) = n - r(A) = 5 - 5 = 0$
(*2^{ος} τρόπος*: από το ερώτημα δ προκύπτει ότι $\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0,0,0)\}$ και άρα $\dim \mathcal{N}(A) = 0$)
Για το χώρο στηλών έχουμε: $\dim \mathcal{R}(A) = r(A) = 5$

στ) Επειδή $r(A) = n$, οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα

ζ) Αν A ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, τότε για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ θα πρέπει να ορίζεται το γινόμενο $A\vec{x}$ και να είναι $(A\vec{x}) \in \mathbb{R}^p$. Δηλαδή $A \in \mathbb{R}^{p \times k}$. Άρα $p = 8$ και $k = 5$.

η) Ξέρουμε ότι {η f είναι «1-1»} $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$.
Άρα, επειδή $r(A) = 5 = n$ η f είναι «1-1».
Επίσης, ξέρουμε ότι {η f είναι «επί»} $\Leftrightarrow$ $r(A) = m$.
Εδώ έχουμε $r(A) = 5 \neq 8 = m$ και άρα η f δεν είναι «επί».

Θέμα 4. (μονάδες 2.0)

Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί υπόχωροι $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus\ x-3y+z=0\right\}$ και $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus\ -2x+y=0\right\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α) [*μονάδες: 0.3*]. Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι χώροι V και W;

β) [*μονάδες: 1.2*]. Βρείτε μια βάση του $V\cap W$ και τη διάσταση του. Τι παριστάνει ο $V\cap W$ γεωμετρικά;

γ) [*μονάδες: 0.5*]. Βρείτε μια βάση του υποχώρου του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $V\cap W$.

Λύση

α) Και οι δυο χώροι περιέχουν 3άδες (x,y,z) πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$. Άρα, καθένας από τους χώρους V και W παριστάνει ένα επίπεδο που περνά από το $\vec{0}=(0,0,0)$.

β) $V\cap W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus\ x-3y+z=0\ \&\ -2x+y=0\right\}$

δηλαδή ο $V\cap W$ αποτελείται από τις λύσεις του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} x-3y+z=0 \\ -2x+y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{0}}$$

δηλαδή, $V\cap W\equiv\mathcal{N}(A)$, όπου $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{2}{\underset{(+)}{\hookleftarrow}} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = U$$

Όμως, $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0}$

Βασικές μεταβλητές: x, y

Ελεύθερη μεταβλητή: z

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

2^{η} εξίσωση: $-5y+2z=0 \Rightarrow y=\dfrac{2}{5}z$

1^{η} εξίσωση: $x-3y+z=0 \Rightarrow x-3\dfrac{2}{5}z+z=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{5}z$

Άρα, ο $V\cap W$ έχει διανύσματα της μορφής: $\vec{x}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5}z \\ \frac{2}{5}z \\ z \end{bmatrix}$, δηλαδή της μορφής:

$$\vec{x} = z\begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με} \quad z \in \mathbb{R}$$

Επομένως, μια βάση του $V \cap W$ είναι το μονοσύνολο $\left\{\begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Επειδή η βάση έχει 1 διάνυσμα, συμπεραίνουμε ότι $\dim(V \cap W) = 1$

Ο $V \cap W$ παριστάνει την **<u>ευθεία</u>** του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τα σημεία $(0,0,0)$ και $(1/5,\ 2/5,\ 1)$. Δηλαδή, τα επίπεδα V και W τέμνονται σε αυτήν την ευθεία.

γ) Επειδή $V \cap W \equiv \mathcal{N}(A)$, συμπεραίνουμε ότι ο συμπληρωματικός στον $V \cap W$ είναι ο χώρος γραμμών του A, δηλαδή ο $\mathcal{R}(A^T)$. Μια βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ είναι οι μη-μηδενικές γραμμές του U, δηλαδή

$$\{\text{μια βάση του } \mathcal{R}(A^T)\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

<u>Θέμα 5. (μονάδες 1.5)</u>

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x, y) = (x - y, 2x - 3y, -x + 2y)$.

α) [*μονάδες: 0.5*]. Βρείτε τον πίνακα A της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

β) [*μονάδες: 1.0*]. Βρείτε τη διάσταση της εικόνας και τη διάσταση του πυρήνα της f, καθώς και βάσεις τους.

<u>Λύση</u>

α) Η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι η $\mathbb{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ με $\vec{e}_1 = (1,0)$ & $\vec{e}_2 = (0,1)$.

Η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι η $\mathbb{E}' = \left\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\right\}$ με $\vec{e}_1{}' = (1,0,0)$, $\vec{e}_2{}' = (0,1,0)$ & $\vec{e}_3{}' = (0,0,1)$.

Ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ έχει ως στήλες τις συνιστώσες των $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)$ ως προς τη βάση $\mathbb{E}'$. Έχουμε:

$$f(\vec{e}_1) = f\big((1,0)\big) = (1-0,\ 2\cdot 1 - 3\cdot 0,\ -1 + 2\cdot 0) = (1,2,-1) = 1\vec{e}_1{}' + 2\vec{e}_2{}' + (-1)\vec{e}_3{}'$$

$$f(\vec{e}_2) = f\big((0,1)\big) = (0-1,\ 2\cdot 0 - 3\cdot 1,\ -0 + 2\cdot 1) = (-1,-3,2) = (-1)\vec{e}_1{}' + (-3)\vec{e}_2{}' + 2\vec{e}_3{}'$$

Άρα, ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ είναι ο

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

β) Έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=U$$

$\dim(\operatorname{Im} f)=r(A)=[\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U]=2$
$\dim(\ker f)=n-r(A)=2-2=0$

$\{$μια βάση του $\operatorname{Im} f\}$ = $\{$μια βάση του $\mathcal{R}(A)\}$ = $\{$οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν τους οδηγούς$\}$ = $\{1^{\eta}$ & 2^{η} στήλη του $A\}$

Άρα: $\{$μια βάση του $\operatorname{Im} f\}$ $=\left\{\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\ -3\\ 2\end{bmatrix}\right\}$

Επειδή $\dim(\ker f)=0$, έχουμε $\ker f=\left\{\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right\}$ και άρα ο $\ker f$ **δεν έχει βάση**

<u>Θέμα 6. (μονάδες 1.5)</u>

α) [*μονάδες: 0.5*] Έστω ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ με $A=\begin{bmatrix}0 & -4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$. Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και οι ιδιοτιμές του A.

β) [*μονάδες: 1.0*] Δείξτε ότι ο A διαγωνιοποιείται και βρείτε ένα πίνακα P που τον διαγωνιοποιεί, καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο D.

<u>Λύση</u>

α) $X_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}-\lambda & -4\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(3-\lambda)-4=\lambda^2-3\lambda-4$

$$X_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow \lambda=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{3\pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=4\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι: $\lambda_1=4$ & $\lambda_2=-1$

β) Ο A διαγωνιοποιείται γιατί είναι 2×2 και έχει 2 διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$, έχουμε:

$$A - \lambda_1 I_2 = A - 4I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{(-1/4)}{\underset{(+)}{\longleftarrow}} \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

Άρα: $(A - \lambda_1 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασική μεταβλητή: x Ελεύθερη μεταβλητή: y

1^{η} εξίσωση: $-4x - 4y = 0 \Rightarrow x = -y$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_4(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\vec{x} = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix}$

δηλ. $\vec{x} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}$ και άρα: $\mathbb{B}_4 = \{$μια βάση του $V_4(A)\} = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$, έχουμε:

$$A - \lambda_2 I_2 = A + I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \overset{1}{\underset{(+)}{\longleftarrow}} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

Άρα: $(A - \lambda_2 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_2\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασική μεταβλητή: x Ελεύθερη μεταβλητή: y

1^{η} εξίσωση: $x - 4y = 0 \Rightarrow x = 4y$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4y \\ y \end{bmatrix}$

δηλ. $\vec{x} = y\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}$ και άρα: $\mathbb{B}_{-1} = \{$μια βάση του $V_{-1}(A)\} = \left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Έστω το σύνολο $\mathbb{B} = \mathbb{B}_4 \cup \mathbb{B}_{-1} = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Ένας πίνακας που διαγωνιοποιεί τον A είναι ο $P = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα του $\mathbb{B}$) και αντίστοιχος διαγώνιος που είναι όμοιος με τον A μέσω της σχέσης $A = PDP^{-1}$ είναι ο $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο τοποθετημένες με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P)