ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΤΣΑΓΡΑΚΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΜΕΡΟΣ 7: ***ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ & ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ***
ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2009

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ & ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ένας **τετραγωνικός** πίνακας $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Το διάνυσμα $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ με $\vec{x}\neq\vec{0}$ είναι ένα **ιδιοδιάνυσμα** του A ανν $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\boxed{A\vec{x}=\lambda\vec{x}}$. Ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του A.

Παρατήρηση: $A\vec{x}=\lambda\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x}-\lambda\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)\vec{x}=\vec{0}$, και από τον παραπάνω ορισμό θέλουμε $\vec{x}\neq\vec{0}$, άρα: {ο λ είναι μια ιδιοτιμή του A} ανν {το σύστημα $(A-\lambda I_n)\vec{x}=\vec{0}$ έχει μη-μηδενικές λύσεις (άπειρες) λύσεις}. Επομένως,

$$\{\text{ο } \lambda \text{ είναι μια ιδιοτιμή του } A\} \quad \text{ανν} \quad \boxed{\det(A-\lambda I_n)=0}$$

Δηλαδή: $\{\text{ο } \lambda \text{ είναι μια ιδιοτιμή του } A\}$ ανν $\mathcal{N}(A-\lambda I_n)\neq\left\{\vec{0}\right\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A-\lambda I_n)$ λέγεται **ιδιόχωρος του A ως προς την ιδιοτιμή λ** και συμβολίζεται $V_\lambda(A)$. Δηλαδή:

$$V_\lambda(A)=\mathcal{N}(A-\lambda I_n)$$

Σημείωση: Ο ιδιόχωρος $V_\lambda(A)$ περιέχει το $\vec{0}$ μαζί με όλα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: {**Γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ} $=\dim V_\lambda(A)=$
$=\dim\mathcal{N}(A-\lambda I_n)=n-r(A-\lambda I_n)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο υπολογισμός της ορίζουσας $\det(A-\lambda I_n)$ δίνει ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ, το οποίο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A και συμβολίζεται ως $X_A(\lambda)$. Δηλαδή:

$$X_A(\lambda)\equiv\det(A-\lambda I_n)$$

Η εξίσωση $X_A(\lambda)=0$ ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του A, και η επίλυση της δίνει τις ιδιοτιμές του A.

Παρατήρηση: Η τιμή του $X_A(0)$ είναι ίση με την ορίζουσα του A. Δηλ. $\boxed{X_A(0)\equiv\det A}$

ΒΗΜΑΤΑ ΕΥΡΕΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ & ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1) Υπολογισμός του πίνακα $\left[A-\lambda I_n\right]$, ο οποίος προκύπτει από τον A με την αφαίρεση της παραμέτρου λ από την κύρια διαγώνιο.

2) Υπολογισμός της $\det(A-\lambda I_n)$

3) Επίλυση της εξίσωσης $\det(A-\lambda I_n)=0$. Οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του A

4) Για κάθε ιδιοτιμή, βρίσκουμε μια βάση του ιδιόχωρου $V_\lambda(A)=\mathcal{N}(A-\lambda I_n)$, λύνοντας το ομογενές σύστημα $(A-\lambda I_n)\vec{x}=\vec{0}$

Παράδειγμα: Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$.

Λύση

$$A-\lambda I_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{bmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$X_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=(1-\lambda)(3-\lambda)-8=\lambda^2-4\lambda-5$$

$$\det(A-\lambda I_2)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda^2-4\lambda-5=0}_{\substack{\text{χαρακτηριστική}\\ \text{εξίσωση του } A}} \xrightarrow{\text{επίλυση}} \left.\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=5\end{cases}\right\}\text{ιδιοτιμές του } A$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$, έχουμε:

$$(A-\lambda_1 I_2)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1-\lambda_1 & 2\\ 4 & 3-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Όμως: $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+(-2)R_1} \begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=U_1$

Άρα: $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

Βασική μεταβλητή: x

Ελεύθερη μεταβλητή: y

1^{η} εξίσωση: $2x+2y=0 \Rightarrow x=-y$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ y\end{bmatrix}$

δηλ. $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$, $y\in\mathbb{R}$ και $\{$μια βάση του $V_{-1}(A)\}=\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ με οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό $y\neq 0$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=5$, έχουμε:

$$(A-\lambda_2 I_2)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1-\lambda_2 & 2\\ 4 & 3-\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Όμως: $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$

Άρα: $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασική μεταβλητή: x

Ελεύθερη μεταβλητή: y

1^{η} εξίσωση: $-4x + 2y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_5(A)$ έχει διανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \end{bmatrix}$

δηλ. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$ και {μια βάση του $V_5(A)$} = $\left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ με οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό $y \neq 0$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν λ μια ιδιοτιμή του A, τότε το $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$ έχει **άπειρες** λύσεις. Έτσι, όταν λύνετε μια άσκηση και δεν βρίσκετε άπειρες λύσεις για ένα σύστημα $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$, πιθανόν να έχετε βρει λάθος ιδιοτιμές (αν δεν έχετε κάνει λάθος κάπου αλλού).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ & ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}(A)$ (άθροισμα ιδιοτιμών = άθροισμα στοιχείων κύριας διαγωνίου)

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A$ (γινόμενο ιδιοτιμών = $\det A$)

3) $\det A = 0$ ανν {τουλάχιστον μία ιδιοτιμή ίση με 0}

4) Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου ή ενός τριγωνικού (άνω ή κάτω) είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου.

π.χ. ο $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ έχει $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = -3$

π.χ. ο $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ έχει $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -5$

5) Οι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές και του A^T

6) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ είναι οι ιδιοτιμές του A^{-1}

και $V_{1/\lambda_i}(A^{-1}) \equiv V_{\lambda_i}(A)$, $\forall \lambda_i$, (δηλαδή, αν $\vec{x}$ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, θα είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^{-1} που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $1/\lambda_i$)

7) Ο A^k με $k \in \mathbb{N}$ έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$

και $V_{\lambda_i^k}(A^k) \equiv V_{\lambda_i}(A)$, $\forall \lambda_i$,

(δηλαδή, αν $\vec{x}$ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, θα είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^k που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i^k)

8) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Τότε οι $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα αA. Επιπλέον: $V_{\alpha\lambda_i}(\alpha A) \equiv V_{\lambda_i}(A)$, $\forall \lambda_i$ εφόσον $\alpha \neq 0$

(δηλαδή, αν $\vec{x}$ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, θα είναι και ιδιοδιάνυσμα του αA που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\alpha\lambda_i$)

9) Για δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j (με $\lambda_i \neq \lambda_j$) ισχύει ότι:

$$V_{\lambda_i}(A) \cap V_{\lambda_j}(A) = \left\{\vec{0}\right\}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ($\lambda_i \neq \lambda_j$) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

ΟΜΟΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο **τετραγωνικοί** πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι **όμοιοι** ανν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τ.ω. $P^{-1}AP = B$

Ιδιότητες όμοιων πινάκων

Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ όμοιοι πίνακες, δηλ. $P^{-1}AP = B$, τότε: $\begin{cases} \det A = \det B \\ X_A(\lambda) = X_B(\lambda) \\ B^k = P^{-1}A^kP, \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Απόδειξη της $\det A = \det B$:

$$P^{-1}AP = B \Rightarrow \det\left(P^{-1}AP\right) = \det B \Rightarrow (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = \det B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\det P}(\det A)(\det P) = \det B \Rightarrow \det A = \det B$$

Απόδειξη της $B^k = P^{-1}A^kP$:

$$P^{-1}AP = B \Rightarrow \left(P^{-1}AP\right)^k = B^k \Rightarrow \underbrace{\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right)}_{k \text{ φορές}} = B^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)A\left(PP^{-1}\right)\cdots\left(PP^{-1}\right)AP = B^k \Rightarrow P^{-1}AIAI\cdots IAP = B^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^{-1}\underbrace{AA\cdots A}_{k\ \text{φορές}}P = B^k \Rightarrow P^{-1}A^kP = B^k$$

Παρατήρηση: Αφού $X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$ συνεπάγεται ότι δύο όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές

Σημείωση: Το αντίστροφο των παραπάνω ιδιοτήτων δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουν $\det A = \det B$ **δεν** συνεπάγεται ότι είναι και όμοιοι.

ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας **τετραγωνικός** πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος ανν είναι **όμοιος** με διαγώνιο πίνακα $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δηλαδή, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τ.ω. $P^{-1}AP = D$. Τότε λέμε ότι ο P **διαγωνιοποιεί** τον A.

ΠΡΟΤΑΣΗ: {Ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος} ανν {έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα}, δηλαδή ανν

$$\dim V_{\lambda_1}(A) + \dim V_{\lambda_2}(A) + \cdots + \dim V_{\lambda_\rho}(A) = n$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ (με $\rho \le n$) όλες οι **διαφορετικές** μεταξύ τους ιδιοτιμές του A

Παρατήρηση: έχουμε δει ότι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα, αν ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές τότε διαγωνιοποιείται.

ΠΡΟΣΟΧΗ: το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν κάποια ιδιοτιμή είναι διπλή, τριπλή κλπ, τότε το αν ο A διαγωνιοποιείται ή όχι εξαρτάται από το πόσα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα μπορούμε να βρούμε συνολικά για όλες τις ιδιοτιμές.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε ο πίνακας P που διαγωνιοποιεί τον A έχει ως στήλες n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A και ο διαγώνιος D έχει στη διαγώνιο τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του A, δηλαδή:

$$P = \underbrace{\left[\vec{x}_1 \,|\, \vec{x}_2 \,|\cdots|\, \vec{x}_n\right]}_{\substack{\text{πίνακας με στήλες}\\ \text{τις συνιστώσες των}\\ \text{ιδιοδιανυσμάτων}}} \qquad \& \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Σημ. Οι ιδιοτιμές λ_j είναι τοποθετημένες στον D με την ίδια σειρά που είναι τα ιδιοδιανύσματα στον P. Δηλαδή, το ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}_1$ της $1^{ης}$ στήλης του P αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1, το ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}_2$ της $2^{ης}$ στήλης του P αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2, κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, από τη σχέση $P^{-1}AP = D$ συνεπάγεται ότι $P^{-1}A^kP = D^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης με P από αριστερά και P^{-1} από δεξιά, έχουμε:

$PP^{-1}A^kPP^{-1} = PD^kP^{-1} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}$

Όμως: $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

και άρα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε υψηλές δυνάμεις του A, χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς $\underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ φορές}}$.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε τον A^{1000}, βρίσκουμε πρώτα τους P, P^{-1} και $D^{1000} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1000} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1000} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{1000} \end{bmatrix}$, και κατόπιν εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό τριών πινάκων: $A^{1000} = PD^{1000}P^{-1}$

ΒΗΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1) Υπολογισμός του πίνακα $[A - \lambda I_n]$, ο οποίος προκύπτει από τον A με την αφαίρεση της παραμέτρου λ από την κύρια διαγώνιο.

2) Υπολογισμός του $X_A(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I_n)$

3) Επίλυση της εξίσωσης $X_A(\lambda) = 0$. Οι διαφορετικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ (με $\rho \leq n$) αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του A

4) Βρίσκουμε μια βάση $\mathbb{B}_{\lambda_1}$ του $V_{\lambda_1}(A) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I_n)$

Βρίσκουμε μια βάση $\mathbb{B}_{\lambda_2}$ του $V_{\lambda_2}(A) = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I_n)$

$\vdots$

Βρίσκουμε μια βάση $\mathbb{B}_{\lambda_\rho}$ του $V_{\lambda_\rho}(A) = \mathcal{N}(A - \lambda_\rho I_n)$

5) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\lambda_1} \cup \mathbb{B}_{\lambda_2} \cup \cdots \cup \mathbb{B}_{\lambda_\rho}$

6) Αν το $\mathbb{B}$ έχει n διανύσματα τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, αλλιώς όχι.

7) Αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, δηλαδή αν $\mathbb{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ τότε:

$$P = \underbrace{[\vec{x}_1 \mid \vec{x}_2 \mid \cdots \mid \vec{x}_n]}_{\substack{\text{πίνακας με στήλες} \\ \text{τις συνιστώσες των} \\ \text{ιδιοδιανυσμάτων}}} \qquad \& \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

όπου οι ιδιοτιμές λ_j είναι τοποθετημένες στον D με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν επιπλέον θέλουμε να υπολογίσουμε τον A^k με $k \in \mathbb{N}$, τότε βρίσκουμε πρώτα τον P^{-1} (π.χ. με απαλοιφή Gauss-Jordan) και τον $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$, και κατόπιν εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό τριών πινάκων: $A^k = PD^kP^{-1}$

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και οι ιδιοτιμές του A.

β) Δείξτε ότι ο A διαγωνιοποιείται και βρείτε ένα πίνακα P που τον διαγωνιοποιεί, καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο D.

γ) Βρείτε τον A^{80}.

δ) Υπολογίστε άμεσα την ορίζουσα $\det A$ με χρήση του $X_A(\lambda)$ που βρήκατε.

Λύση

α)

$$X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda)-4\right] - 2\left[2(3-\lambda)-8\right] + 4(4+4\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) - 2(-2\lambda-2) + 16(\lambda+1) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4) + 20(\lambda+1) = (\lambda+1)\left[(3-\lambda)(\lambda-4)+20\right] =$$

$$= (\lambda+1)(-\lambda^2+7\lambda+8) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

Δηλαδή: $X_A(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2+7\lambda+8) = -\lambda^3+6\lambda^2+15\lambda+8$

$$X_A(\lambda) = 0 \iff -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ (διπλή)} \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι: $\lambda_1 = -1$ (διπλή) & $\lambda_2 = 8$

β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ έχουμε:

$$A-\lambda_1 I = A+I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-1/2)\ (-1) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

Άρα: $(A-\lambda_1 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασική μεταβλητή: x

Ελεύθερες μεταβλητές: y,z

1^η εξίσωση: $4x+2y+4z=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}y-z$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(y/2)-z \\ y \\ z \end{bmatrix}$

δηλ. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=y\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y,z\in\mathbb{R}$

και $\quad \mathbb{B}_{-1}=\{\text{μια βάση του } V_{-1}(A)\}=\left\{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=8$ έχουμε:

$$A-\lambda_2 I = A-8I = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (2/5)\ (4/5) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -36/5 & 18/5 \\ 0 & 18/5 & -9/5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (1/2) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -36/5 & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

Άρα: $(A-\lambda_2 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_2\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -36/5 & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x,y

Ελεύθερη μεταβλητή: z

2^η εξίσωση: $-\dfrac{36}{5}y+\dfrac{18}{5}z=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}z$

1^η εξίσωση: $-5x+2y+4z=0 \Rightarrow -5x+z+4z=0 \Rightarrow x=z$

Άρα, ο ιδιόχωρος $V_8(A)$ έχει διανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z \\ z/2 \\ z \end{bmatrix}$

δηλ. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$

και $\quad \mathbb{B}_8 = \{\text{μια βάση του } V_8(A)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Έστω το σύνολο $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{-1} \cup \mathbb{B}_8 = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Το $\mathbb{B}$ έχει 3 διανύσματα, και άρα ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, το οποίο επειδή $3 = n$ συνεπάγεται ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Ένας πίνακας που διαγωνιοποιεί τον A είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα του } \mathbb{B}\text{)}$$

και αντίστοιχος διαγώνιος που είναι όμοιος με τον A μέσω της σχέσης $A = PDP^{-1}$ είναι ο $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο τοποθετημένες με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P)*

γ) Ο A^{80} μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση: $A^{80} = PD^{80}P^{-1}$.
Έχουμε:

$$D^{80} = \begin{bmatrix} (-1)^{80} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{80} & 0 \\ 0 & 0 & 8^{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix}$$

και $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2/9 & 8/9 & -2/9 \\ -4/9 & -2/9 & 5/9 \\ 4/9 & 2/9 & 4/9 \end{bmatrix}$ (που βρίσκεται π.χ. με απαλοιφή Gauss-Jordan)

Άρα: $A^{80} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/9 & 8/9 & -2/9 \\ -4/9 & -2/9 & 5/9 \\ 4/9 & 2/9 & 4/9 \end{bmatrix} \Rightarrow$

---

* **Σημείωση:** αν εναλλάξουμε δύο στήλες του P προκύπτει ένας άλλος πίνακας που επίσης διαγωνιοποιεί τον A και ο αντίστοιχος διαγώνιος έχει υποστεί την ίδια εναλλαγή στηλών.

π.χ. για $P = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^{80} = \begin{bmatrix} \frac{5+2^{242}}{9} & \frac{2^{241}-2}{9} & \frac{2^{242}-4}{9} \\ \frac{2^{241}-2}{9} & \frac{2^{240}+8}{9} & \frac{2^{241}-2}{9} \\ \frac{2^{242}-4}{9} & \frac{2^{241}-2}{9} & \frac{5+2^{242}}{9} \end{bmatrix}$$

δ) Έχουμε: $\det A = X_A(0)$, η οποία επειδή $X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$, δίνει: $\det A = 8$

Παρατήρηση: επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε την $\det A$ και από το γινόμενο των ιδιοτιμών: $\det A = (-1)(-1)8 = 8$
(προσοχή την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ που είναι διπλή τη χρησιμοποιούμε δύο φορές. Αντίστοιχα, αν είχαμε μια τριπλή ιδιοτιμή θα τη χρησιμοποιούσαμε τρεις φορές, κ.ο.κ.)