ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΤΣΑΓΡΑΚΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΜΕΡΟΣ 6: ***ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ***

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2009

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Όταν ο A πολλαπλασιαστεί με ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, προκύπτει ένα διάνυσμα $(A\vec{v}) \in \mathbb{R}^m$. Δηλαδή, ο A αντιστοιχεί σε μια απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;:\; \vec{v} \to L_A(\vec{v})$ με $L_A(\vec{v}) = A\vec{v}$.

Παρατήρηση: $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ισχύουν τα εξής:

- $A(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2$ δηλαδή $\boxed{L_A(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = L_A(\vec{v}_1)+L_A(\vec{v}_2)}$, $\forall \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ (1)
- $A(\lambda\vec{v}) = \lambda(A\vec{v})$ δηλαδή $\boxed{L_A(\lambda\vec{v}) = \lambda L_A(\vec{v})}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ & $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (2)

Απεικονίσεις με αυτές τις δύο ιδιότητες ονομάζονται **γραμμικές απεικονίσεις** ή **γραμμικοί μετασχηματισμοί**. Συγκεκριμένα:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω V και W δύο πραγματικοί διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση ή γραμμικός μετασχηματισμός, ανν:

1) $f(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = f(\vec{v}_1)+f(\vec{v}_2)$, $\forall \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in V$

και

2) $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ & $\forall \vec{v} \in V$

Παρατήρηση: Οι δύο ιδιότητες του ορισμού μπορούν ισοδύναμα να γραφτούν στη μορφή: $\boxed{f(\lambda\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \lambda f(\vec{v}_1)+f(\vec{v}_2)}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ & $\forall \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in V$

Παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y) = (x+y, 2y, 3x)$
- $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y,z,w) = (2x+3y+z-4w,\; x-y+2z-w)$

Παραδείγματα μη-γραμμικών απεικονίσεων:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x+1$

  Απόδειξη: Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Έχουμε:
  $f(x_1+x_2) = 2(x_1+x_2)+1 = 2x_1+2x_2+1$
  ενώ $f(x_1)+f(x_2) = (2x_1+1)+(2x_2+1) = 2x_1+2x_2+2$
  δηλαδή, γενικά $f(x_1+x_2) \neq f(x_1)+f(x_2)$

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y) = (xy, y, x)$

  Απόδειξη: Έστω $\vec{v}_1 = (x_1,y_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2,y_2)$. Έχουμε:

$$f(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = f\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) = f(x_1+x_2,\; y_1+y_2) =$$
$$= \big((x_1+x_2)(y_1+y_2),\; y_1+y_2,\; x_1+x_2\big) = \big(x_1y_1+x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1,\; y_1+y_2,\; x_1+x_2\big)$$

  ενώ $f(\vec{v}_1)+f(\vec{v}_2) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) = \big(x_1y_1,\; y_1,\; x_1\big)+\big(x_2y_2,\; y_2,\; x_2\big) =$

$$= \big(x_1y_1+x_2y_2,\; y_1+y_2,\; x_1+x_2\big)$$

δηλαδή: $f(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\neq f(\vec{v}_1)+f(\vec{v}_2)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$, τότε:

1) $f(\vec{0})=\vec{0}$ (προκύπτει από τη 2^{η} ιδιότητα του ορισμού για $\lambda=0$)

2) Αν τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\in V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και τα $f(\vec{v}_1),f(\vec{v}_2),\ldots,f(\vec{v}_k)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα (το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα)

3) Η αντιθετοαντιστροφή της (2): Αν τα $f(\vec{v}_1),f(\vec{v}_2),\ldots,f(\vec{v}_k)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$, και έστω $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n\right\}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $\mathbb{B}'=\left\{\vec{b}_1',\vec{b}_2',\ldots,\vec{b}_m'\right\}$ μια διατεταγμένη βάση του W. Επειδή τα $f(\vec{b}_1),f(\vec{b}_2),\ldots,f(\vec{b}_n)$ είναι διανύσματα του W, μπορούν να γραφτούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων της βάσης $\mathbb{B}'$, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
&f(\vec{b}_1)=\alpha_{11}\vec{b}_1'+\alpha_{21}\vec{b}_2'+\cdots+\alpha_{m1}\vec{b}_m'\\
&f(\vec{b}_2)=\alpha_{12}\vec{b}_1'+\alpha_{22}\vec{b}_2'+\cdots+\alpha_{m2}\vec{b}_m'\\
&\vdots\\
&f(\vec{b}_n)=\alpha_{1n}\vec{b}_1'+\alpha_{2n}\vec{b}_2'+\cdots+\alpha_{mn}\vec{b}_m'
\end{aligned}$$

με $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$ για $i=1,2,\ldots,m$ & $j=1,2,\ldots,n$.

Ο πίνακας $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ με **στήλες** τις συνιστώσες των $f(\vec{b}_1),f(\vec{b}_2),\ldots,f(\vec{b}_n)$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}'$, δηλαδή ο πίνακας:

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\cdots&\alpha_{mn}\end{bmatrix}$$

ονομάζεται **πίνακας της γραμμικής απεικόνισης** f ως προς τις βάσεις $\mathbb{B},\mathbb{B}'$ των V,W αντίστοιχα.

Συμπέρασμα: Κάθε γραμμική απεικόνιση **αντιστοιχεί σε ένα πίνακα**, και αντίστροφα (όπως είδαμε στην αρχή της παρούσας ενότητας), κάθε πίνακας αντιστοιχεί σε μια γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα: Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y)=(x+y,2y,3x)$. Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$.

Λύση

Η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι η $\mathbb{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ με $\vec{e}_1=(1,0)$ & $\vec{e}_2=(0,1)$, και η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι η $\mathbb{E}'=\left\{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'\right\}$ με $\vec{e}_1{}'=(1,0,0)$, $\vec{e}_2{}'=(0,1,0)$ & $\vec{e}_3{}'=(0,0,1)$.

Έχουμε: $f(\vec{e}_1)=f\left((1,0)\right)=(1+0,\,2\cdot 0,\,3\cdot 1)=(1,0,3)=1\vec{e}_1{}'+0\vec{e}_2{}'+3\vec{e}_3{}'$

$f(\vec{e}_2)=f\left((0,1)\right)=(0+1,\,2\cdot 1,\,3\cdot 0)=(1,2,0)=1\vec{e}_1{}'+2\vec{e}_2{}'+0\vec{e}_3{}'$

Άρα, ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ είναι ο $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$ και έστω A ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathbb{B},\mathbb{B}'$ των V,W. Αν ένα διάνυσμα $\vec{v}\in V$ έχει συνιστώσες $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ ως προς την $\mathbb{B}$, τότε οι συνιστώσες του $f(\vec{v})$ ως προς την $\mathbb{B}'$ προκύπτουν από το γινόμενο $A\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$.

Παράδειγμα: Έστω η απεικόνιση του προηγούμενου παραδείγματος, δηλαδή $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με $f(x,y)=(x+y,2y,3x)$. Για το διάνυσμα $\vec{v}=(2,-3)$ έχουμε: $f(2,-3)=(2-3,2(-3),3\cdot 2)=(-1,-6,6)$, το οποίο προκύπτει και από τη σχέση:

$$A\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -6\\ 6\end{bmatrix}$$

Άσκηση: Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$, και έστω $\mathbb{B}=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right\}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $\mathbb{B}'=\left\{\vec{b}_1{}',\vec{b}_2{}',\vec{b}_3{}',\vec{b}_4{}'\right\}$ μια διατεταγμένη βάση του W.

α) Αν $f\left(\vec{b}_1\right)=2\vec{b}_2{}'+\vec{b}_3{}'$, $f\left(\vec{b}_2\right)=3\vec{b}_1{}'-\vec{b}_2{}'+\vec{b}_3{}'$, $f\left(\vec{b}_3\right)=\vec{b}_2{}'-\vec{b}_4{}'$ βρείτε τον πίνακα της f ως προς τις βάσεις $\mathbb{B},\mathbb{B}'$ των V,W

β) Αν $\vec{v}=2\vec{b}_1-3\vec{b}_2$ βρείτε το $f(\vec{v})$ ως προς την $\mathbb{B}'$.

Λύση

α) Από τον ορισμό, ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathbb{B},\mathbb{B}'$ των V,W έχει ως **στήλες** τις συνιστώσες των $f\left(\vec{b}_1\right),f\left(\vec{b}_2\right),f\left(\vec{b}_3\right)$. Άρα, είναι ο $A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

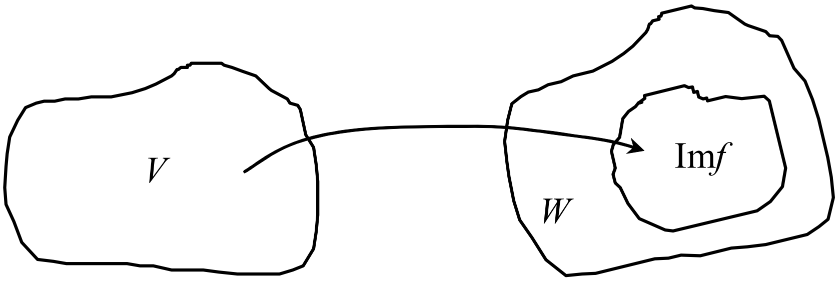
β) $f(\vec{v}) = A\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλαδή: $f(\vec{v}) = -9\vec{b}_1{}' + 7\vec{b}_2{}' - \vec{b}_3{}'$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$. Επίσης, έστω ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{v} \in V$ και ένα διάνυσμα $\vec{w} \in W$ τέτοιο ώστε $\vec{w} = f(\vec{v})$. Τότε:

- το $\vec{w}$ ονομάζεται **εικόνα** του $\vec{v}$
- το $\vec{v}$ ονομάζεται **πρότυπο** του $\vec{w}$

ΕΙΚΟΝΑ & ΠΥΡΗΝΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$. Το υποσύνολο των διανυσμάτων του W τα οποία είναι εικόνες των διανυσμάτων του V μέσω της f, είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του W που ονομάζεται **εικόνα** της f και συμβολίζεται ως $\mathrm{Im}(f)$ ή $\mathrm{Im}\, f$. Δηλαδή: $\mathrm{Im}\, f = \{ f(\vec{v}) \in W \setminus \vec{v} \in V \}$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$. Το υποσύνολο των διανυσμάτων του V για τα οποία $f(\vec{v}) = \vec{0}$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V που ονομάζεται **πυρήνας** (kernel) της f και συμβολίζεται ως $\ker(f)$ ή $\ker f$. Δηλαδή: $\ker f = \{ \vec{v} \in V \setminus f(\vec{v}) = \vec{0} \}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ των V, W, αντίστοιχα.

1) Ένα διάνυσμα $\vec{w} \in W$ με συνιστώσες $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ ως προς $\mathbb{B}'$ θα ανήκει στην $\mathrm{Im}\, f$ ανν $\{\exists \vec{v} \in V$ τ.ω. $f(\vec{v}) = \vec{w}\}$ δηλ. ανν το σύστημα $A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$ έχει λύση (μοναδική ή άπειρες), δηλ. ανν $(w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \mathcal{R}(A)$.

2) Ένα διάνυσμα $\vec{v} \in V$ με συνιστώσες $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ως προς $\mathbb{B}$ θα ανήκει στον $\ker f$ ανν $f(\vec{v}) = \vec{0}$, δηλ. ανν $A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλ. ανν $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{N}(A)$.

Συμπέρασμα: Για να βρούμε τους $\operatorname{Im} f$ και $\ker f$ αρκεί να βρούμε τα $\mathcal{R}(A)$ & $\mathcal{N}(A)$, αντίστοιχα.

Πόρισμα: $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathcal{R}(A)) = r(A)$
$\dim(\ker f) = \dim(\mathcal{N}(A)) = n - r(A)$

Άρα: $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim V$

«1-1» (ΕΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ) & «ΕΠΙ»

ΟΡΙΣΜΟΙ: Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$.

- Η f είναι «1-1» όταν: $f(\vec{v}_1) \neq f(\vec{v}_2)$, $\forall \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$
  δηλαδή όταν κάθε $\vec{v} \in V$ έχει διαφορετική εικόνα $f(\vec{v})$
- Η f είναι «επί» όταν: $\forall \vec{w} \in W$, $\exists \vec{v} \in V$ τ.ω. $f(\vec{v}) = \vec{w}$.
  δηλαδή όταν $\operatorname{Im} f = W$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$ είναι ταυτόχρονα «1-1» & «επί» τότε λέγεται **ισομορφισμός** και οι V, W λέμε ότι είναι **ισόμορφοι**.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$ είναι «1-1» ανν $\ker f = \{\vec{0}\}$

Απόδειξη: Έστω ότι είναι «1-1» δηλαδή αν $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ τότε και $f(\vec{v}_1) \neq f(\vec{v}_2)$, $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$. Αφού ισχύει $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, θα ισχύει και για $\vec{v}_2 = \vec{0}$, δηλαδή αν $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ τότε και $f(\vec{v}_1) \neq f\left(\vec{0}\right) \Rightarrow f(\vec{v}_1) \neq \vec{0}$, $\forall \vec{v}_1 \in V$. Άρα, $\ker f = \{\vec{0}\}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\ker f = \{\vec{0}\}$ και έστω ότι $\exists \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ τ.ω. $f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2)$. Έχουμε:
$f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2) \Rightarrow f(\vec{v}_1) - f(\vec{v}_2) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}$ το οποίο επειδή $\ker f = \{\vec{0}\}$ δίνει $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Άρα, «1-1».

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$ και έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ των V, W. Τότε:

1) {η f είναι «1-1»} $\Leftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow r(A) = n$

2) {η f είναι «επί»} $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W \underset{\operatorname{Im} f \subseteq W}{\Leftrightarrow} \dim(\operatorname{Im} f) = \dim W \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = m \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r(A) = m$

3) {η f είναι «1-1» & «επί»} $\Leftrightarrow r(A) = m = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Άσκηση (Παλιότερο Θέμα – Γενάρης 2009)

Έστω $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση:

$$f(x,y,z) = \left(-2y+z,\ x-y,\ 3x-5y+z,\ 2x+2y-2z\right), \quad \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

α) Βρείτε τον πίνακα A της απεικόνισης f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$.

β) Να βρεθούν οι διαστάσεις και βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.

γ) Είναι η απεικόνιση "επί";

δ) Είναι η απεικόνιση "1-1";

Λύση

α) Ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ και $f(0,0,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0)=(0,1,3,2) \\ f(0,1,0)=(-2,-1,-5,2) \\ f(0,0,1)=(1,0,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

β)

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{εναλλαγή} \\ \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-3)\quad(-2) \\ \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1)\quad 2 \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim R(A) = r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του } U] = 2$

$\dim(\ker f) = \dim N(A) = n - r(A) = 3-2 = 1$

{μια βάση του $\operatorname{Im} f$} = {μια βάση του $R(A)$} = {στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με οδηγούς} = {1η, 2η στήλη του A} =

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Επίσης, $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Βασικές μεταβλητές: x, y

Ελεύθερη μεταβλητή: z

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

2^{η} εξίσωση: $-2y+z=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}z$

1^{η} εξίσωση: $x-y=0 \Rightarrow x-\frac{1}{2}z=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}z$

Άρα: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$

$\{$μια βάση του $\ker f\} = \{$μια βάση του $N(A)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

γ) $r(A)=2<m=4$, άρα η f δεν είναι "επί"

(ή αλλιώς $\dim(\operatorname{Im} f)=2<\dim \mathbb{R}^4=4$

άρα η f δεν είναι "επί")

δ) $r(A)=2<n=3$, άρα η f δεν είναι "1-1"

(ή αλλιώς $\ker f \neq \{\vec{0}\}$, άρα η f δεν είναι "1-1")

Άσκηση: Έστω V, W δύο πραγματικοί διανυσματικοί χώροι και οι διατεταγμένες βάσεις τους $\mathbb{B}=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$, $\mathbb{B}'=\{\vec{b}'_1,\vec{b}'_2,\vec{b}'_3,\vec{b}'_4\}$ αντίστοιχα. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$ με: $f(\vec{b}_1)=\vec{b}'_1+\vec{b}'_2$, $f(\vec{b}_2)=2\vec{b}'_1+\vec{b}'_3$, $f(\vec{b}_3)=3\vec{b}'_1+\vec{b}'_2+\vec{b}'_3$. Να βρεθούν οι διαστάσεις και βάσεις των $\operatorname{Im} f$ και $\ker f$.

Λύση

Ο πίνακας A της απεικόνισης ως προς τις βάσεις $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}'$ σχηματίζεται χρησιμοποιώντας ως στήλες τις συντ/γμένες των $f(\vec{b}_1)$, $f(\vec{b}_2)$, $f(\vec{b}_3)$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Άρα:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)\,(+)}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{1/2\,(+)}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=U$$

Επειδή $r(A)=2$ (= πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του U), θα έχουμε:
$\dim(\operatorname{Im} f)=r(A)=2$
$\dim(\ker f)=n-r(A)=3-2=1$

$\{$βάση του $\operatorname{Im} f\}=\{$βάση του $R(A)\}=\{$στήλες A που αντιστοιχούν στις στήλες του U με τους οδηγούς$\}=\{1^η, 2^η$ στήλη του $A\}=$
$=\{(1,1,0,0),\ (2,0,1,0)\}$ ως προς την $\mathbb{B}'$. Δηλαδή,
$\{$μια βάση του $\operatorname{Im} f\}=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}$
με $\vec{w}_1=\vec{b}'_1+\vec{b}'_2$, $\vec{w}_2=2\vec{b}'_1+\vec{b}'_3$

$$A\vec{x}=\vec{0}\iff U\vec{x}=\vec{0}\iff\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2
Ελεύθερη μεταβλητή: x_3

Ανάδρομη αντικατάσταση:
$2^η$ εξίσωση: $-2x_2-2x_3=0 \Rightarrow x_2=-x_3$
$1^η$ εξίσωση: $x_1+2x_2+3x_3=0 \Rightarrow x_1-2x_3+3x_3=0 \Rightarrow x_1=-x_3$

Άρα: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$\{$βάση του $\ker f\}=\{$βάση του $N(A)\}=\{(-1,-1,1)\}$ ως προς την $\mathbb{B}$

δηλ. $\{$βάση του $\ker f\}=\{\vec{v}\}$ με $\vec{v}=-\vec{b}_1-\vec{b}_2+\vec{b}_3$

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι στην τελευταία άσκηση δεν αρκεί να βρούμε τις συνιστώσες των διανυσμάτων βάσης των $\operatorname{Im} f$ και $\ker f$, αλλά χρειάζεται να διατυπώνεται ρητά ότι τα διανύσματα βάσης του $\operatorname{Im} f$ είναι γραμμένα ως προς τη βάση $\mathbb{B}'$, ενώ τα διανύσματα βάσης του $\ker f$ είναι γραμμένα ως προς τη βάση $\mathbb{B}$.