**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

**ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΤΣΑΓΡΑΚΗΣ**

# *ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)*

*ΜΕΡΟΣ 5:* ***ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ***
***ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ***
***ΒΑΣΕΙΣ & ΔΙΑΣΤΑΣΗ Δ.Χ.***

*ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ*

*ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ*

**ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2009**

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΥΠΟΧΩΡΟΣ ΕΝΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Έστω ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος $V$. Ένα μη-κενό υποσύνολο $W$ του $V$ (δηλ. $W \subseteq V$ με $W \neq \emptyset$) είναι διανυσματικός υπόχωρος του $V$ αν:

1) $(\vec{x}+\vec{y}) \in W \quad , \forall \vec{x},\vec{y} \in W$ (δηλ. το $W$ είναι <u>κλειστό ως προς την πρόσθεση</u>)

και

2) $(\lambda\vec{x}) \in W \quad , \forall \vec{x} \in W$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (δηλ. το $W$ είναι <u>κλειστό ως προς τον πολλαπλ/σμό με πραγματικό αριθμό</u>)

---

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:</u>

1) Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο $V$ είναι πραγματικός δ.χ. πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν και οι 8 ιδιότητες του ορισμού (βλ. παλιότερο μάθημα)
2) Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο $W$ είναι διανυσματικός υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου $V$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι 4 ιδιότητες: α) $W \subseteq V$
   β) $W \neq 0$
   γ) $W$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση
   δ) $W$ είναι κλειστό ως προς τον πολλ/σμό με πραγματικό αριθμό

---

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Έστω ένας δ.χ. $V$, τότε:

- Κάθε διανυσματικός υπόχωρος του $V$ είναι και ο ίδιος διανυσματικός χώρος
- Το μηδενικό στοιχείο $\vec{0}$ ανήκει σε <u>κάθε</u> υπόχωρο του $V$
- Το μονοσύνολο $\{\vec{0}\}$ είναι υπόχωρος (ονομάζεται τετριμμένος υπόχωρος) του $V$
- Αν $W_1$, $W_2$ είναι υπόχωροι του $V$ τότε:
  α) $W_1 \cap W_2$ είναι επίσης υπόχωρος του $V$
  β) $W_1 \cup W_2$ γενικά <u>ΔΕΝ</u> είναι υπόχωρος του $V$

# ΠΟΡΙΣΜΑ (****)

Οι διανυσματικοί υπόχωροι του δ.χ. $\mathbb{R}^2$ είναι:

1) Όλο το $\mathbb{R}^2$

2) Κάθε <u>ευθεία</u> που περνά από το $\vec{0}=(0,0)$

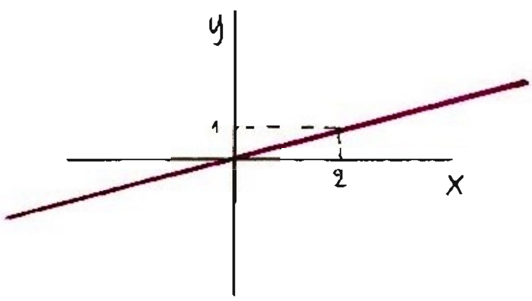
δηλ. κάθε $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus \alpha x+\beta y=0\}$

όπου τουλάχιστον ένα από τα $\alpha,\beta$ είναι $\neq 0$

Σημείωση: Εκτός από ως γραμμική εξίσωση με σταθερό όρο 0, μια ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ μπορεί να γραφτεί και ως πολλαπλάσιο ενός διανύσματος του $\mathbb{R}^2$.

π.χ. το σύνολο $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus (x,y)=\lambda(2,1)\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$

είναι η ευθεία στη διεύθυνση του διανύσματος $(2,1)$




3) Ο <u>τετριμμένος</u> υπόχωρος $\{\vec{0}\}=\{(0,0)\}$

## ΠΟΡΙΣΜΑ ($***$)

Οι διανυσματικοί υπόχωροι του δ.χ. $\mathbb{R}^3$ είναι:

1) Όλο το $\mathbb{R}^3$

2) Κάθε <u>επίπεδο</u> που περνά από το $\vec{0}=(0,0,0)$

δηλ. κάθε $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus \alpha x+\beta y+\gamma z=0\}$

όπου τουλάχιστον ένα από τα $\alpha,\beta,\gamma$ είναι $\neq 0$

3) Κάθε <u>ευθεία</u> που περνά από το $\vec{0}=(0,0,0)$

δηλ. κάθε $L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=0$ <u>και</u> $\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=0\}$

όπου τουλάχιστον ένα από τα $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ είναι $\neq 0$ και τουλάχιστον ένα από τα $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ είναι $\neq 0$ και επιπλέον $\nexists\, \lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω. $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=\lambda(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$

[Μ' άλλα λόγια η τομή δύο επιπέδων που δεν συμπίπτουν και περνάνε από το $\vec{0}=(0,0,0)$]

<u>Σημείωση:</u> Εκτός από ως τομή 2 επιπέδων, μια ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που περνά από το $\vec{0}=(0,0,0)$ μπορεί να γραφτεί και ως πολλαπλάσιο ενός διανύσματος του $\mathbb{R}^3$.

π.χ. το σύνολο $L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus (x,y,z)=\lambda(-1,0,2),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ είναι η ευθεία στη διεύθυνση του διανύσματος $(-1,0,2)$

4) Ο <u>τετριμμένος</u> υπόχωρος $\{\vec{0}\}=\{(0,0,0)\}$

# ΠΟΡΙΣΜΑ {* * * *}

Οι διανυσματικοί υπόχωροι ενός οποιουδήποτε $\mathbb{R}^n$ είναι:

1) Όλο το $\mathbb{R}^n$
2) Κάθε υπερεπίπεδο που περνά από το $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$
   δηλ. κάθε $E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \setminus \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n=0\}$
   όπου τουλάχιστον ένα από τα $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ είναι $\neq 0$
3) Οποιαδήποτε τομή 2 ή περισσότερων υπερεπιπέδων που περνούν από το $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$
4) Ο <u>τετριμμένος</u> υπόχωρος $\{\vec{0}\}=\{(0,0,\ldots,0)\}$

ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι το σύνολο $W=\{(x,y,z) \setminus x+2y-z=0 \text{ με } x,y,z\in\mathbb{R}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

## Λύση

**1ος Τρόπος (απλός):** Το $W$ παριστάνει το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $x+2y-z=0$, το οποίο περνά από το $\vec{0}=(0,0,0)$ και άρα είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

**2ος Τρόπος (με βάση τον ορισμό):**

α) Το $W$ περιέχει 3άδες πραγματικών αριθμών. Άρα, $W\subseteq\mathbb{R}^3$

β) Ένα προφανές διάνυσμα που ανήκει στο $W$ είναι το $\vec{0}=(0,0,0)$. Άρα $W\neq\emptyset$

γ) Έστω $\vec{v}_1=(x_1,y_1,z_1)$ και $\vec{v}_2=(x_2,y_2,z_2)$ δύο οποιαδήποτε διανύσματα το $W$. Τότε $x_1+2y_1-z_1=0$ και $x_2+2y_2-z_2=0$.

Θα δείξουμε ότι και το άθροισμα $\vec{v}_1+\vec{v}_2\in W$.

Έχουμε: $\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$ το οποίο για να ανήκει στο $W$ θα πρέπει: $(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=0$

Το οποίο ισχύει, αφού:

$$(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=\underbrace{(x_1+2y_1-z_1)}_{0}+\underbrace{(x_2+2y_2-z_2)}_{0}=0$$

Επομένως, $\vec{v}_1+\vec{v}_2\in W,\ \forall\ \vec{v}_1,\vec{v}_2\in W$

δηλ. το $W$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση

δ) Έστω $\vec{v}_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$.

Θα δείξουμε ότι και το γινόμενο $\lambda\vec{v}_1\in W,\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: $\lambda\vec{v}_1=\lambda(x_1,y_1,z_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$ το οποίο ανήκει στο $W$, αφού: $(\lambda x_1)+2(\lambda y_1)-(\lambda z_1)=\lambda\underbrace{(x_1+2y_1-z_1)}_{0\ (\text{αφού } \vec{v}_1\in W)}=0$

Άρα, $\lambda\vec{v}_1\in W,\ \forall\ \vec{v}_1\in W$ και $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

δηλ. το $W$ είναι κλειστό ως προς τον πολ/σμό με πραγματικό αριθμό.

Δείξαμε ότι $\begin{cases} W \subseteq \mathbb{R}^3 \\ W \neq \emptyset \\ W \text{ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση} \\ W \quad \gg \quad \gg \text{ ως προς τον πολλ/μό με πραγματικό αριθμό} \end{cases}$

Επομένως, το $W$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

---

**ΑΣΚΗΣΗ:** Να εξεταστεί αν το σύνολο $U = \{(x,y,z) \setminus 2x+y+3z=6 \text{ με } x,y,z \in \mathbb{R}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

## Λύση

**1ος Τρόπος (απλός):** Το $U$ παριστάνει το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $2x+y+3z=6$ το οποίο δεν περνά από το $\vec{0}=(0,0,0)$, αφού $2\cdot 0+0+3\cdot 0=0\neq 6$.
Άρα το σύνολο $U$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

**2ος Τρόπος (με βάση τον ορισμό):** Προφανώς, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ και $U \neq \emptyset$, αλλά αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{v}_1=(x_1,y_1,z_1)$ και $\vec{v}_2=(x_2,y_2,z_2)$ έχουμε: $\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$ για το οποίο:

$$2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)=(2x_1+y_1+3z_2)+(2x_2+y_2+3z_2)=12\neq 6$$

Άρα: $\vec{v}_1+\vec{v}_2 \notin U$

δηλ. το $U$ δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και συνεπώς δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

---

**ΑΣΚΗΣΗ:** Να εξεταστεί αν το σύνολο $V=\{(x,y) \setminus x^2+y^2=0 \text{ με } x,y\in\mathbb{R}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

## Λύση

Για κάθε $(x,y)\in V$ έχουμε: $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow \{x=0 \text{ και } y=0\}$
Άρα, το $V$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}=(0,0)$, δηλαδή $V=\{\vec{0}\}$ που είναι ο τετριμμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

# ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ
# & ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

❖ **ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ:** Τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^m$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** ανν υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ με τουλάχιστον έναν από αυτούς $\neq 0$, τέτοιοι ώστε:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

**Παρατήρηση (άλλος ορισμός):** Τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^m$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** ανν τουλάχιστον ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη

{γραμμικώς εξαρτημένα} ανν {$\exists$ τουλάχιστον ένα $\lambda_i \neq 0$ τ.ω.

$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_i\vec{v}_i \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$} $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_i = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_i}\vec{v}_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_i}\vec{v}_2 - \cdots - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_i}\vec{v}_k$

(δηλ. το $\vec{v}_i$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων).

❖ **ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ:** Τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^m$ είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** ανν δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Δηλαδή,

ανν η σχέση: $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ ισχύει **μόνο** για $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Δηλ. δεν υπάρχει ούτε ένα $\lambda_i \neq 0$ τ.ω. $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$

**Παρατήρηση:** Η σχέση $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\underbrace{\left[\vec{v}_1 \,|\, \vec{v}_2 \,|\cdots|\, \vec{v}_k\right]}_{\substack{\text{πίνακας με στήλες} \\ \text{τις συνιστώσες των} \\ \text{διανυσμάτων}}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \vec{0}$$

το οποίο είναι ένα ομογενές σύστημα της μορφής $A\vec{x} = \vec{0}$. Άρα, για να εξετάσουμε αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή γραμμικώς ανεξάρτητα, σχηματίζουμε τον πίνακα $A = \left[\vec{v}_1 \,|\, \vec{v}_2 \,|\cdots|\, \vec{v}_k\right]$ και εξετάζουμε αν το σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$ ή έχει άπειρες λύσεις. Συγκεκριμένα:

**α)** Αν $r(A) = k$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (το σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$)

**β)** Αν $r(A) < k$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα (το σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις)

**Παράδειγμα:** Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.

$$\vec{v}_1 = (1,-2,0,1)\,, \quad \vec{v}_2 = (-2,0,3,-1)\,, \quad \vec{v}_3 = (-1,-2,3,0)$$

**Λύση**

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}-2\\0\\3\\-1\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}-1\\-2\\3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3\\ -2\lambda_1 - 2\lambda_3\\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3\\ \lambda_1 - \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{\vec{0}}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \quad (-1) \\ \xleftarrow{(+)} \\ \\ \xleftarrow{(+)} \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -4 & -4\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 3/4 \quad 1/4 \\ \xleftarrow{(+)} \\ \xleftarrow{(+)} \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -4 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = U$$

$r(A) = \{$πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U\}=2$, δηλ. $r(A) < k = 3$ και επομένως, το σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις, δηλ. υπάρχει $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ τ.ω. $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$. Επομένως, τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

**Σημείωση:** Στο τελευταίο παράδειγμα, ξεκινήσαμε τη διαδικασία από τη σχέση $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$, για λόγους κατανόησης. Μπορούσαμε να ξεκινήσουμε φτιάχνοντας κατευθείαν τον πίνακα $A$ με στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

**Άσκηση:** Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.

$$\vec{v}_1 = (1,7,6,3)\,, \quad \vec{v}_2 = (2,-1,5,4)\,, \quad \vec{v}_3 = (-3,-3,0,-1)\,, \quad \vec{v}_4 = (0,4,2,1)$$

**Λύση**

Ο πίνακας με στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ γράφεται ως:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\ 7 & -1 & -3 & 4\\ 6 & 5 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Μπορούμε, να βρούμε την $r(A)$ υπολογίζοντας πρώτα τον $U$, όπως κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Εναλλακτικά, επειδή ο $A$ είναι τετραγωνικός μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του. Έχουμε (κάνετε αν θέλετε μόνοι σας τον υπολογισμό): $\det A = -56$, δηλαδή $\det A \neq 0$ και άρα το ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$. Άρα, τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

---

## ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

**1)** Κάθε διάνυσμα $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ μόνο του, είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, γιατί η σχέση $\lambda_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$ ισχύει μόνο εάν $\lambda_1 = 0$.

π.χ. η σχέση $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ισχύει μόνο για $\lambda_1 = 0$.

**2)** Αντίθετα, το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ μόνο του, είναι γραμμικώς εξαρτημένο, γιατί η σχέση $\lambda_1 \vec{0} = \vec{0}$ ισχύει και για $\lambda_1 \neq 0$.

**3)** Επίσης, αν ένα από τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ είναι το $\vec{0}$ τότε είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
π.χ. έστω $\vec{v}_1, \vec{0}, \ldots, \vec{v}_k$, τότε σίγουρα ισχύει: $0\vec{v}_1 + 1\vec{0} + \cdots + 0\vec{v}_k = \vec{0}$, δηλαδή $\lambda_2 = 1 \neq 0$

**4)** Αν $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε και τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \ldots, \vec{v}_\rho$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. **(Δηλαδή, αν σε ένα πλήθος γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων βάλουμε και άλλα διανύσματα, τότε όλα μαζί είναι και πάλι γραμμικώς εξαρτημένα).**

**5)** **Αν από ένα πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων βγάλουμε κάποια αυτά τότε όσα μένουν είναι και πάλι γραμμικώς ανεξάρτητα.**

π.χ. αν θεωρήσουμε τα διανύσματα:

$$\vec{v}_1 = (1,7,6,3), \quad \vec{v}_2 = (2,-1,5,4), \quad \vec{v}_3 = (-3,-3,0,-1), \quad \vec{v}_4 = (0,4,2,1)$$

που όπως είδαμε στην παραπάνω άσκηση είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε:
τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
τα $\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
τα $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
τα $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, κ.λ.π.

**6)** **Αν** $\boldsymbol{k > m}$ τότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$ είναι σίγουρα **γραμμικώς εξαρτημένα.**
Αυτό μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: ο πίνακας $A = \left[\vec{v}_1 \,|\, \vec{v}_2 \,|\cdots|\, \vec{v}_k\right]$ είναι $m \times k$, άρα $r(A) \le \min(m,k) = m < k$, και άρα το ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις.
Έτσι:
3 ή περισσότερα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα
4 ή περισσότερα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα
5 ή περισσότερα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα
κ.λ.π.

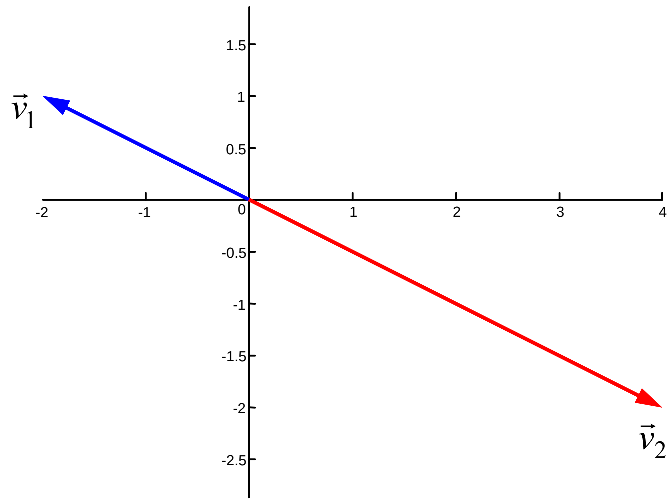
**7)** Δυο διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ανν $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1$.
π.χ. τα $\vec{v}_1 = (-2,1,0,-3)$, $\vec{v}_2 = (-4,2,0,-6)$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα, γιατί $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$
αντίθετα, τα $\vec{v}_1 = (-2,1,0,-3)$, $\vec{v}_2 = (-4,3,0,-6)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1$.

---

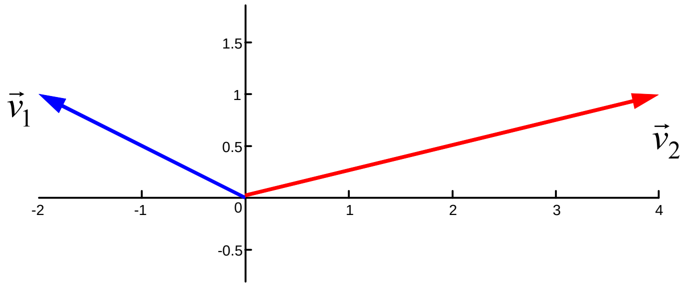
## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ & ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2$

Αν φανταστούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ ως «βελάκια» με αρχή το (0,0) και τέλος τη θέση $(x,y)$ των συνιστωσών του, τότε από την παραπάνω παρατήρηση 7, προκύπτει ότι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα ανν** είναι **συνευθειακά**

π.χ. $\vec{v}_1 = (-2,1)$ και $\vec{v}_2 = (4,-2)$, όπου $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$




Επομένως, 2 μη-συνευθειακά διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
π.χ. αν $\vec{v}_1 = (-2,1)$ και $\vec{v}_2 = (4,1)$, τότε $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1$.




Επίσης, στην παρατήρηση 6, είδαμε ότι 3 ή περισσότερα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα.

Για παράδειγμα, για 3 οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^2$, τουλάχιστον ένα από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δυο (π.χ. $\vec{v}_3 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$) και άρα τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

**Άσκηση:** Έστω $\vec{v}_1 = (-2,1)$, $\vec{v}_2 = (4,1)$, $\vec{v}_3 = \left(2, \frac{3}{2}\right)$. Βρείτε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\vec{v}_3 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$. Κατόπιν, δείξτε το σχηματικά χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

**Λύση**

$$\vec{v}_3 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

δηλ. θέλουμε να λύσουμε το σύστημα: $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$. Έχουμε:

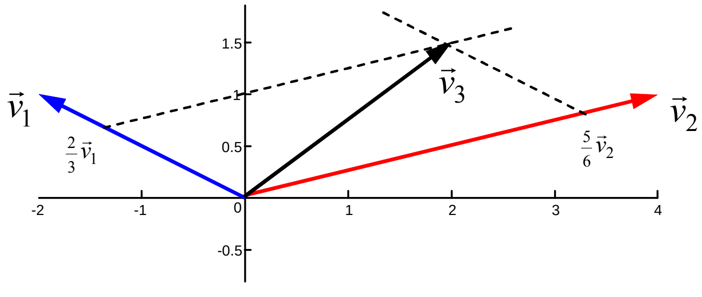
$$\left[ A \,|\, \vec{b} \right] = \begin{bmatrix} -2 & 4| & 2 \\ 1 & 1| & 3/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1/2 \\ \xleftarrow{(+)} \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4| & 2 \\ 0 & 3| & 5/2 \end{bmatrix}$$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

$2^{\eta}$ εξίσωση: $3\lambda_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{5}{6}$

$1^{\eta}$ εξίσωση: $-2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 2 \Rightarrow -2\lambda_1 + 4\frac{5}{6} = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{3}$

Επομένως: $\vec{v}_3 = \frac{2}{3}\vec{v}_1 + \frac{5}{6}\vec{v}_2$



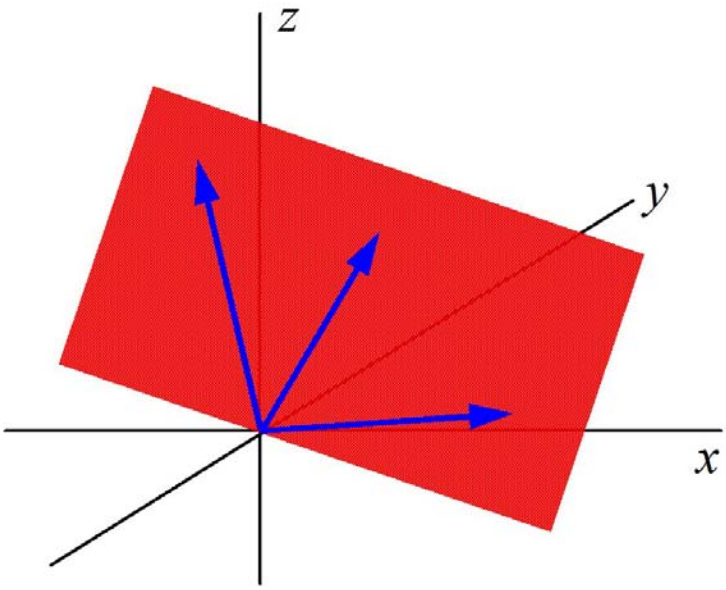
# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ & ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

Αν φανταστούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ ως «βελάκια» με αρχή το (0,0,0) και τέλος τη θέση $(x,y,z)$ των συνιστωσών του, τότε από την παραπάνω παρατήρηση 7, προκύπτει ότι **δύο διανύσματα** στον $\mathbb{R}^3$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα ανν** είναι **συνευθειακά**

π.χ. $\vec{v}_1 = (-1,3,-5)$ και $\vec{v}_2 = (3,-9,15)$, όπου $\vec{v}_2 = -3\vec{v}_1$
δηλαδή και τα δύο βρίσκονται στην ίδια ευθεία που περνά από το $\vec{0} = (0,0,0)$

Επομένως, δύο μη-συνευθειακά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
π.χ. αν $\vec{v}_1 = (-1,3,-5)$ και $\vec{v}_2 = (3,6,15)$, τότε $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1$.

**Σημείωση:** **Τρία διανύσματα** στον $\mathbb{R}^3$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα ανν** είναι **συνεπίπεδα.** Δηλαδή, ανήκουν στο ίδιο επίπεδο που περνά από το $\vec{0} = (0,0,0)$.




Επίσης, στην παρατήρηση 6, είδαμε ότι 4 ή περισσότερα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα.

Για παράδειγμα, για 4 οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in \mathbb{R}^3$, τουλάχιστον ένα από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων τριών (π.χ. $\vec{v}_4 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$) και άρα τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

---

**Θεώρημα:** Έστω τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^m$. Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών τους, δηλαδή το σύνολο:

$$V = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^m \text{ τ.ω. } \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_\kappa \vec{v}_k \quad \text{με } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa \in \mathbb{R} \right\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω $V$ ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$. Λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ του $\mathbb{R}^m$ **παράγουν** τον $V$ αν:

**1)** $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \in V$

**και**

**2)** $\forall\, \vec{v} \in V, \quad \exists\, \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\kappa \in \mathbb{R}$, τ.ω. $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_\kappa\vec{v}_k$ (δηλ. κάθε διάνυσμα του $V$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$)

**Συμβολισμός**: $V = \langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \rangle$ σημαίνει ότι τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ παράγουν το $V$

---

# ΒΑΣΕΙΣ & ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** **Βάση** ενός διανυσματικού χώρου $V$ είναι ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν το $V$.

Με άλλα λόγια, το σύνολο $\mathbb{B} = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\}$ είναι βάση του $V$ αν:

**1)** $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k \in V$

**και**

**2)** $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

**και**

**3)** $\forall\, \vec{v} \in V, \quad \exists\, \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k \in \mathbb{R}$, τ.ω. $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k$ (δηλ. κάθε διάνυσμα του $V$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$)

**Σημ.:** Σ' αυτή την περίπτωση, η $k$-άδα $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)$ είναι μοναδική για κάθε διάνυσμα $\vec{v} \in V$, και τα $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ ονομάζονται **συνιστώσες** του $\vec{v}$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}$.

**Παράδειγμα:** Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{B} = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ όπου $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$. Ποιες είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{v} = (1,-2,5)$ ως προς τη βάση $\mathbb{B}$.

**Λύση**

1) Καθένα από τα $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ είναι 3άδα πραγματικών αριθμών. Άρα: $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$

2) Ο πίνακας με τις συνιστώσες των $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

που έχει $\det A = 1$, δηλαδή $\det A \neq 0$ και άρα το ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$. Άρα, τα $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

3) Κάθε $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{δηλαδή: } \vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Έτσι, το διάνυσμα $\vec{v} = (1,-2,5)$ γράφεται ως $\vec{v} = 1\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ και άρα, οι συνιστώσες του $\vec{v}$ ως προς τη βάση $\mathbb{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι οι $1,-2,5$

**Σημείωση:** Όταν μας ενδιαφέρει η σειρά των διανυσμάτων σε μια βάση τότε αυτή ονομάζεται **διατεταγμένη βάση**. Έτσι στο τελευταίο παράδειγμα, οι συνιστώσες του $\vec{v}$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathbb{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι οι $1,-2,5$, ενώ οι συνιστώσες του $\vec{v}$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathbb{B} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3\}$ είναι οι $-2,1,5$

**Άσκηση:** Το σύνολο $\mathbb{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ με $\vec{v}_1 = (0,1,2)$, $\vec{v}_2 = (2,2,6)$, $\vec{v}_3 = (-1,-2,-8)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε τις συνιστώσες του διανύσματος $\vec{v} = (1,-2,5)$ ως προς τη $\mathbb{B}$.

**Λύση**

Ψάχνουμε τη μοναδική 3άδα $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ τ.ω. $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$. Έχουμε:

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

δηλαδή, έχουμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Απαλοιφή Gauss:

$$\left[A \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & -8 & 5 \end{array}\right] \text{εναλλαγή} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -8 & 5 \end{array}\right] \begin{matrix} (-2) \\ \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 9 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \end{array}\right] = \left[U \mid \vec{d}\right]$$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

3η εξίσωση: $-3\lambda_3 = 8 \Rightarrow \lambda_3 = -\dfrac{8}{3}$

2η εξίσωση: $2\lambda_2 - \lambda_3 = 1 \Rightarrow 2\lambda_2 + \dfrac{8}{3} = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -\dfrac{5}{6}$

1η εξίσωση: $\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = -2 \Rightarrow \lambda_1 + 2\left(-\dfrac{5}{6}\right) - 2\left(-\dfrac{8}{3}\right) = -2 \Rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{17}{3}$

Άρα, $\vec{v} = -\dfrac{17}{3}\vec{v}_1 - \dfrac{5}{6}\vec{v}_2 - \dfrac{8}{3}\vec{v}_3$, και συνεπώς οι συνιστώσες του $\vec{v} = (1,-2,5)$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathbb{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ είναι $-\dfrac{17}{3}, -\dfrac{5}{6}, -\dfrac{8}{3}$

**Παρατήρηση:** Κάθε διανυσματικός χώρος έχει **άπειρες** βάσεις. Δηλαδή, υπάρχουν άπειρα σύνολα γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν το $V$.
(Εξαίρεση αποτελεί ο τετριμμένος υπόχωρος $\{\vec{0}\}$ που το πλήθος των βάσεων του είναι 0)

**Πρόταση:** Καθεμιά από τις άπειρες βάσεις ενός διανυσματικού χώρου $V$ έχει το **ίδιο πλήθος διανυσμάτων**.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** **Διάσταση** ενός διανυσματικού χώρου $V$ είναι το πλήθος διανυσμάτων κάθε βάσης του $V$ και συμβολίζεται με $\dim(V)$.

**Σημείωση:** $\dim(V)$ = [μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $V$ ]

π.χ. σε ένα διανυσματικό χώρο με $\dim(V)$=3, μπορούμε να βρούμε:
1 γραμμικώς ανεξάρτητο διάνυσμα (που είναι κάθε μη-μηδενικό του διάνυσμα μόνο του)
2άδες με γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα
3άδες με γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα
ενώ δεν υπάρχει: 4άδα ή 5άδα ή 6άδα κ.λ.π. με γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα

**Παρατήρηση:** $\boxed{\dim(\mathbb{R}^m) = m}$
Δηλαδή: $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, κ.λ.π.

**Παρατήρηση:** Αν ο διανυσματικός χώρος $V$ παριστάνει μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$ που περνά από το (0,0) ή μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$ που περνά από το (0,0,0), τότε: $\dim(V) = 1$
π.χ. ο χώρος $L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 2x - y = 0\right\}$ έχει $\dim(L) = 1$
ενώ ο $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus 2x - y + z = 0 \;\&\; x + 2y - z = 0\right\}$ έχει $\dim(W) = 1$

**Παρατήρηση:** Αν ο διανυσματικός χώρος $V$ παριστάνει ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που περνά από το (0,0,0), τότε: $\dim(V) = 2$
π.χ. ο χώρος $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus 2x - y + z = 0\right\}$ έχει $\dim(E) = 2$

**Παρατήρηση:** Γενικά, ο χώρος $V = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\right\}$
(όπου τουλάχιστον ένα από τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ είναι $\neq 0$) έχει $\dim(V) = n - 1$
π.χ. ο χώρος $W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus 2x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0\right\}$ έχει $\dim(W) = 3$

**Παρατήρηση:** Ο τετριμμένος υπόχωρος $W = \{\vec{0}\}$ οποιουδήποτε $\mathbb{R}^n$ αποτελείται μόνο από το γραμμικώς εξαρτημένο διάνυσμα $\vec{0}$. Άρα, $\dim W = 0$

**Παρατήρηση:** Αν $\dim(V)=k$, τότε **οποιοδήποτε σύνολο $k$ γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $V$ είναι βάση του.**
π.χ.
-- οποιοδήποτε σύνολο 2 γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$ (δηλ. 2 μη-συνευθειακών διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$) είναι βάση του.
-- οποιοδήποτε σύνολο 3 γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ (δηλ. 3 μη-συνεπίπεδων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$) είναι βάση του.
-- οποιοδήποτε σύνολο 4 γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^4$ είναι βάση του.
-- οποιοδήποτε σύνολο 5 γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^5$ είναι βάση του.
κ.λ.π.
Επίσης,
-- οποιοδήποτε μη-μηδενικό διάνυσμα μιας ευθείας του $\mathbb{R}^2$ που περνά από το (0,0) ή μιας ευθείας του $\mathbb{R}^3$ που περνά από το (0,0,0), είναι βάση της.
-- οποιοδήποτε σύνολο 2 γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων ενός επιπέδου του $\mathbb{R}^3$ που περνά από το (0,0,0) είναι βάση του.

**Συμπέρασμα:** Αν για ένα διανυσματικό χώρο $V$ ξέρουμε ότι $\dim(V)=k$, τότε για να δείξουμε ότι ένα σύνολο $\mathbb{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\}$ (που έχει $k$ διανύσματα) είναι βάση του $V$, αρκεί να δείξουμε ότι:
**1)** $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\in V$
**και**
**2)** $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

**Σημείωση:** Έστω $W$ είναι υπόχωρος του $V$, τότε:
α) $\dim W\le\dim V$
β) αν $\dim W=\dim V$, τότε $W=V$

**π.χ.** Έστω $W$ είναι υπόχωρος του $V=\mathbb{R}^3$ και τότε:
1) $W=\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim W=3$
2) αν $W$ επίπεδο που περνά από το $\vec{0}=(0,0,0)$ τότε $\dim W=2<\dim V$
3) αν $W$ ευθεία που περνά από το $\vec{0}=(0,0,0)$ τότε $\dim W=1<\dim V$
4) αν $W=\{\vec{0}\}$ τότε $\dim W=0<\dim V$

**Θεώρημα:** Οι στήλες κάθε αντιστρέψιμου $n\times n$ πίνακα $A$, αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$
Εξήγηση: $\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος πίνακας$\}$ ανν $\{\det A\neq 0\}$ ανν {το σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x}=\vec{0}$} ανν {οι $n$ στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα}. Όμως, οποιαδήποτε $n$ ανεξάρτητα διανύσματα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$. Άρα, οι στήλες του $A$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

**Παράδειγμα:** Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ με $\vec{v}_1=(0,1,2)$, $\vec{v}_2=(2,2,6)$, $\vec{v}_3=(-1,-4,-8)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

## Λύση

Έχουμε: $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -4\\ 2 & 6 & -8\end{bmatrix}$ και άρα:

$$\det A=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & -8\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-(-16+6)+2(-8+2)=-2$$

δηλ. $\det A\neq 0$ και άρα το $\mathbb{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$

**Παρατήρηση:** $\det I_n=1\neq 0$. Άρα, οι στήλες του $I_n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** **Κανονική βάση** ενός διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι η βάση που έχει ως διανύσματα τις στήλες του $I_n$.

π.χ. η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι η $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$

η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι η $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

η κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ είναι η $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

κ.λ.π.

---

**Άσκηση:** Έστω ο διανυσματικός υπόχωρος $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \backslash \ x-2y+z=0\right\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά;

β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του.

γ) Ελέγξτε αν το διάνυσμα $\vec{b}=(-1,1,3)$ ανήκει στον $V$. Αν ναι, τότε βρείτε τις συνιστώσες του ως προς τη βάση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

## Λύση

α) ο $V$ παριστάνει ένα επίπεδο που περνά από το $\vec{0}=(0,0,0)$.

β) για κάθε διάνυσμα $\vec{v}=(x,y,z)\in V$ τα $x,y,z$ ικανοποιούν την εξίσωση:

$x-2y+z=0 \Leftrightarrow x=2y-z$

δηλ. τα διανύσματα $\vec{v}\in V$ είναι της μορφής: $\vec{v}=\begin{bmatrix}2y-z\\ y\\ z\end{bmatrix}$, με $y,z\in\mathbb{R}$.

δηλ. $\vec{v}=y\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, με $y,z\in\mathbb{R}$ (*)

δηλ. κάθε διάνυσμα του $V$ μπορεί να γραφτεί ως **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, τα οποία επιπλέον **ανήκουν** στον $V$ αφού ικανοποιούν την εξίσωση $x - 2y + z = 0$

Άρα, $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ (δηλ. ο $V$ παράγεται από τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$)

Ελέγχουμε αν τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα. Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-1/2)R_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-2)R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα, $r(A) = 2$ δηλαδή $r(A) = n$ και άρα τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα**.

Επομένως, έχουμε δείξει ότι:

**1)** $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, και

**2)** τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και

**3)** κάθε διάνυσμα του $V$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

Επομένως, το σύνολο $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ είναι μια βάση του $V$.

Άρα, κάθε βάση του $V$ έχει 2 διανύσματα. Άρα, $\dim(V) = 2$

<u>**Σημείωση:**</u> Η εξίσωση $x - 2y + z = 0$ μπορεί να θεωρηθεί ως ομογενές σύστημα $1 \times 3$ με πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = U$ και άρα βασική μεταβλητή τη $x$ και ελεύθερες τις $y, z$. Η γενική λύση του $A\vec{x} = \vec{0}$ είναι η (*). Γενικά, σε μια τέτοια λύση τα μη-μηδενικά διανύσματα που πολλαπλασιάζονται με τις ελεύθερες μεταβλητές είναι πάντα βάση του $V$ (δεν χρειάζεται να το δείχνουμε όπως κάναμε πιο πάνω για λόγους κατανόησης).

γ) Το $\vec{b} = (-1, 1, 3)$ ανήκει στον $V$ γιατί $-1 - 2 \cdot 1 + 3 = 0$, δηλαδή οι συνιστώσες του ικανοποιούν την εξίσωση $x - 2y + z = 0$.

Επειδή λοιπόν $\vec{b} \in V$ και $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ μια βάση του $V$, αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει μοναδική 2άδα $(\lambda_1, \lambda_2)$ τ.ω. $\vec{b} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$. Έχουμε:

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή, έχουμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Επειδή, έχουμε ήδη κάνει τη διαδικασία $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$, δεν χρειάζεται να κάνουμε όλη τη διαδικασία απαλοιφής Gauss $\left[ A \,|\, \vec{b} \right] \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} \left[ U \,|\, \vec{d} \right]$. Αρκεί να εφαρμόσουμε στο $\vec{b}$ τα ίδια στάδια απαλοιφής που εφαρμόσαμε στη διαδικασία $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$. Έχουμε:

$$\vec{b}=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}\xleftarrow[(+)]{(-1/2)} \longrightarrow \begin{bmatrix}-1\\3/2\\3\end{bmatrix}\xleftarrow[(+)]{-2} \longrightarrow \begin{bmatrix}-1\\3/2\\0\end{bmatrix}=\vec{d}$$

Άρα: $\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1/2\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3/2\\0\end{bmatrix}$

Ανάδρομη αντικατάσταση:
$3^{\eta}$ εξίσωση: $0\lambda_1+0\lambda_2=0$, που ισχύει $\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$
$2^{\eta}$ εξίσωση: $\frac{1}{2}\lambda_2=\frac{3}{2} \Rightarrow \lambda_2=3$
$1^{\eta}$ εξίσωση: $2\lambda_1-\lambda_2=-1 \Rightarrow 2\lambda_1-3=-1 \Rightarrow \lambda_1=1$

Άρα, $\vec{b}=\vec{v}_1+3\vec{v}_2$, και συνεπώς οι συνιστώσες του $\vec{b}=(-1,1,3)$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ είναι $1,3$.

**Παρατήρηση:** επειδή $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, το $\vec{b}=(-1,1,3)$ ως διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ που είναι, θα έχει 3 συνιστώσες ως προς μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα, οι συνιστώσες του ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι $-1,1,3$. Όμως, το $\vec{b}$ ανήκει και στο επίπεδο $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x-2y+z=0\}$ του $\mathbb{R}^3$ και επειδή $\dim(V)=2$, το $\vec{b}$ θα έχει 2 συνιστώσες ως προς μια βάση του $V$.

---

**Θεώρημα:** Έστω $V$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_k\}$ μια βάση του $V$. Έστω $\vec{u}\in V$ με $\vec{u}=\mu_1\vec{v}_1+...+\mu_i\vec{v}_i+...+\mu_k\vec{v}_k$ όπου $\mu_i\neq 0$. Τότε και το σύνολο $\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_{i-1},\vec{u},\vec{v}_{i+1},...,\vec{v}_k\}$ είναι βάση του $V$.

**Παράδειγμα:** Στην παραπάνω άσκηση βρήκαμε ότι μια βάση του διανυσματικού χώρου $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x-2y+z=0\}$ είναι η $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$, με $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ και $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

Μια άλλη βάση του $V$ μπορούμε να βρούμε αν αντικαταστήσουμε το $\vec{v}_1$ με ένα διάνυσμα $\vec{u}$ της μορφής: $\vec{u}=\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2$, όπου $\mu_1\neq 0$,

π.χ. $\vec{u}=2\vec{v}_1-3\vec{v}_2=2\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\2\\-3\end{bmatrix}$ και άρα, μια άλλη βάση του $V$ είναι η $\{\vec{u},\vec{v}_2\}$

Επίσης, μια άλλη βάση παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε το $\vec{v}_2$ με ένα διάνυσμα $\vec{w}$ της μορφής: $\vec{u}=\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2$, όπου $\mu_2\neq 0$.

π.χ. $\vec{w}=\vec{v}_1+\vec{v}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ και άρα, μια άλλη βάση του $V$ είναι η $\{\vec{v}_1,\vec{w}\}$.

Μ' αυτόν τον τρόπο, εφόσον γνωρίζουμε ήδη μια βάση του $V$, μπορούμε να βρούμε **άπειρες άλλες βάσεις του**.

**Άσκηση:** Έστω ο διανυσματικοί υπόχωροι $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x-2y+z=0\}$ και $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x-y=0\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α) Γράψτε το σύνολο $V\cap W$. Είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και γιατί;
β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του $V\cap W$
γ) Τι παριστάνει γεωμετρικά το $V\cap W$;

**Λύση**

α) $V\cap W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x-2y+z=0 \ \& \ x-y=0\}$.

Η τομή δύο υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του ίδιου χώρου. Οι $V$ και $W$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$, άρα και η τομή $V\cap W$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

β) για κάθε διάνυσμα $\vec{v}=(x,y,z)\in V\cap W$ τα $x,y,z$ ικανοποιούν το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}x-2y+z=0\\x-y=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}_{\vec{0}}$$

Έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\\(+)\end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}=U$$

Όμως, $A\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

βασικές μεταβλητές: $x,y$
ελεύθερη μεταβλητή: $z$

Ανάδρομη αντικατάσταση:
$2^{η}$ εξίσωση: $y-z=0 \Rightarrow y=z$
$1^{η}$ εξίσωση: $x-2y+z=0 \Rightarrow x-2z+z=0 \Rightarrow x=z$

δηλ. τα διανύσματα $\vec{v}\in V\cap W$ είναι της μορφής: $\vec{v}=\begin{bmatrix}z\\z\\z\end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$.

δηλ. $\vec{v}=z\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, με $z\in\mathbb{R}$

Επομένως, μια βάση του $V\cap W$ είναι το μονοσύνολο $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Άρα, κάθε βάση του $V\cap W$ έχει 1 διάνυσμα. Άρα, $\dim(V\cap W)=1$

γ) Όλα τα διανύσματα του $V\cap W$ γράφονται ως $\vec{v}=z\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ με $z\in\mathbb{R}$. Άρα, το $V\cap W$ παριστάνει την **ευθεία** του διανύσματος (1,1,1) του $\mathbb{R}^3$
[δηλ. την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (0,0,0) και το σημείο (1,1,1)]

---

**<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 1:</u> Σε κάθε κλιμακωτό πίνακα *U*, οι μη-μηδενικές γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.**

**π.χ.** αν $U=\begin{bmatrix}0&3&1&4&7&6\\0&0&2&1&4&5\\0&0&0&0&2&3\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$, τότε τα διανύσματα $\vec{r}_1=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\4\\7\\6\end{bmatrix}$, $\vec{r}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\2\\1\\4\\5\end{bmatrix}$, $\vec{r}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\2\\3\end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Εξήγηση:</u> ο πίνακας με στήλες τα $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ είναι ο $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&0&0\\1&2&0\\4&1&0\\7&4&2\\6&5&3\end{bmatrix}$. Για να βρούμε την τάξη του δεν χρειάζεται να τον κάνουμε κλιμακωτό. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $A^T=\begin{bmatrix}0&3&1&4&7&6\\0&0&2&1&4&5\\0&0&0&0&2&3\end{bmatrix}$ που είναι κλιμακωτός με 3 μη-μηδενικές γραμμές. Άρα, $r\left(A^T\right)=3$. Όμως, για κάθε πίνακα $A$, ισχύει $r\left(A^T\right)=r(A)$. Επομένως, $r(A)=3$ (όσες δηλαδή και οι στήλες του) και συνεπώς τα $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

**<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 2:</u> Σε κάθε κλιμακωτό πίνακα *U*, οι στήλες που περιέχουν οδηγούς είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα**

**π.χ.** αν $U=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, τότε τα διανύσματα $\vec{v}_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3=\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Εξήγηση:</u> ο πίνακας με στήλες τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ είναι ο $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, που είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή και έχει οδηγούς σε κάθε στήλη. Άρα, $r(A)=3$ (όσες δηλαδή και οι στήλες του) και συνεπώς τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

## <u>ΧΩΡΟΣ ΣΤΗΛΩΝ ενός ΠΙΝΑΚΑ</u>

Έστω ένας πίνακας $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Οι $n$ στήλες του $A$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$. Αυτά <u>παράγουν</u> έναν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ που ονομάζεται <u>**χώρος στηλών**</u> του $A$, και συμβολίζεται ως $\mathcal{R}(A)$.

Δηλ. αν $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ οι στήλες του $A$, τότε $\mathcal{R}(A)=\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\rangle$

Δηλ. ο $\mathcal{R}(A)$ περιέχει όλα τα διανύσματα $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$ που γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$.

**π.χ.** αν $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ τότε $\mathcal{R}(A)=\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}\right\rangle$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Για να ανήκει ένα διάνυσμα $\vec{b}$ στον $\mathcal{R}(A)$, πρέπει να υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\vec{b}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\cdots+\lambda_n\vec{v}_n$ το οποίο είναι ισοδύναμο με:

$$\vec{b}=\underbrace{[\vec{v}_1\,|\,\vec{v}_2\,|\cdots|\,\vec{v}_n]}_{\text{πίνακας με στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων}}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{b}=A\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} \Leftrightarrow A\vec{x}=\vec{b}$$

Δηλαδή, $\vec{b}\in\mathcal{R}(A)$ ανν {το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει λύση (μοναδική ή άπειρες)}

<u>**Άσκηση:**</u> Εξετάστε αν το διάνυσμα $\vec{b}=(-1,0,4)$ ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

## Λύση

Για να ανήκει το διάνυσμα $\vec{b}=(-1,0,4)$ στον $\mathcal{R}(A)$, πρέπει να υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$

τ.ω. $\begin{bmatrix}-1\\0\\4\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}3\\6\\-3\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}3\\9\\3\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\4\end{bmatrix}}_{\vec{b}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix}}_{\vec{x}}$

Δηλαδή, πρέπει το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ να έχει λύση (μοναδική ή άπειρες).
Έχουμε:

$$\left[A\,|\,\vec{b}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&3&2&-1\\2&6&9&5&0\\-1&-3&3&0&4\end{array}\right]\begin{array}{l}(-2)\quad 1\\ \leftarrow(+)\\ \leftarrow(+)\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&3&2&-1\\0&0&3&1&2\\0&0&6&2&3\end{array}\right]\begin{array}{l}\\(-2)\\ \leftarrow(+)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&3&2&-1\\0&0&3&1&2\\0&0&0&0&-1\end{array}\right]=\left[U\,|\,\vec{d}\right]$$

όπου $A\vec{x}=\vec{b}\Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{d}$. Η $3^{\eta}$ εξίσωση δίνει $0=-1$ και άρα το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ δεν έχει καμία λύση. Επομένως, το $\vec{b}$ δεν ανήκει στον $\mathcal{R}(A)$.

**Παρατήρηση:** Αν $r(A)=m$ (δηλ. ο $U$ δεν έχει καμία μηδενική γραμμή) τότε έχουμε δει ότι το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει λύση (μοναδική αν $m=n$ ή άπειρες αν $m<n$) για κάθε $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$. Δηλαδή, σ' αυτήν την περίπτωση: $\mathcal{R}(A)\equiv\mathbb{R}^m$

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Για ένα κλιμακωτό πίνακα $U$ οι στήλες που περιέχουν οδηγούς αποτελούν **μια βάση του $\mathcal{R}(U)$**. Άρα: $\dim\mathcal{R}(U)=r(U)$
- Αν $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$ τότε:

  {ένα υποσύνολο των στηλών του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα} ανν {οι αντίστοιχες στήλες του $U$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα}
- **Συμπέρασμα:** Αν $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$ τότε οι στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ που έχουν τους οδηγούς αποτελούν **μια βάση του $\mathcal{R}(A)$**. Άρα: $\boxed{\dim\mathcal{R}(A)=r(A)}$
- Γενικά, $\mathcal{R}(A)\neq\mathcal{R}(U)$

**Παράδειγμα:** Δείξτε ότι $\mathcal{R}(A)\neq\mathcal{R}(U)$, για τον πίνακα $A=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix}$

## Λύση

Είδαμε παραπάνω ότι $U=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

Άρα: {μια βάση του $\mathcal{R}(U)$} = {$1^{\eta}$ & $3^{\eta}$ στήλη του $U$} = $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}\right\}$

Επομένως, ο $\mathcal{R}(U)$ περιέχει διανύσματα της μορφής:

$$\vec{v} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ δηλ. της μορφής: } \vec{v} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 3\lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Όμως, π.χ. η $3^{\eta}$ στήλη του $A$, δηλαδή η $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ δεν μπορεί να γραφτεί σ' αυτή τη μορφή.

Άρα, $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \mathcal{R}(U)$ και επομένως $\mathcal{R}(A) \neq \mathcal{R}(U)$.

**Άσκηση:** Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του διανυσματικού χώρου $V$ που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (1,-2,4)$, $\vec{v}_2 = (3,0,-1)$, $\vec{v}_3 = (0,6,-13)$, $\vec{v}_4 = (1,4,-9)$. Τι παριστάνει ο $V$ γεωμετρικά;

**Λύση**

*Σημείωση:* $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$ και $V$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

Σχηματίζουμε τον πίνακα $A$ με στήλες τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$. Δηλαδή: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & -13 & -9 \end{bmatrix}$.

Άρα: $V \equiv \mathcal{R}(A)$

Έπειτα, βρίσκουμε τον αντίστοιχο κλιμακωτό πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & -13 & -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \quad -4 \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & -13 & -13 & -13 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (13/6) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Επομένως, έχουμε $r(A) = 2$ (= πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U$)

Άρα, $\dim \mathcal{R}(A) = 2 \Rightarrow \dim V = 2$

{μια βάση του $V$} = {μια βάση του $\mathcal{R}(A)$} = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ (δηλ. οι στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ που έχουν τους οδηγούς)

Γεωμετρικά, ο $V$ παριστάνει το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τα σημεία $\vec{0}, \vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$, δηλαδή από τα σημεία: $(0,0,0)$, $(1,-2,4)$ και $(3,0,-1)$.

Αν θέλουμε να βρούμε μια εξίσωση αυτού του επιπέδου, εργαζόμαστε ως εξής:

Κάθε επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που περνά από το $(0,0,0)$ έχει εξίσωση της μορφής: $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ με τουλάχιστον ένα από τα $\alpha, \beta, \gamma$ να είναι $\neq 0$. Επειδή, περνά και από τα $(1,-2,4)$ και $(3,0,-1)$ θα πρέπει:

$$\left.\begin{matrix} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (-2) + \gamma \cdot 4 = 0 \\ \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot (-1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \\ 3\alpha - \gamma = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Όμως,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: $\alpha, \beta$

Ελεύθερη μεταβλητή: $\gamma$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

$2^η$ εξίσωση: $6\beta - 13\gamma = 0 \Rightarrow \beta = \frac{13}{6}\gamma$

$1^η$ εξίσωση: $\alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \Rightarrow \alpha - 2\frac{13}{6}\gamma + 4\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\gamma$

Άρα, το ζητούμενο επίπεδο έχει εξίσωση:

$$\gamma\left(\frac{1}{3}x + \frac{13}{6}y + z\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{13}{6}y + z = 0 \Rightarrow 2x + 13y + 6z = 0$$

$$\text{δηλαδή,} \quad V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus 2x + 13y + 6z = 0\right\}$$

# ΧΩΡΟΣ ΓΡΑΜΜΩΝ ενός ΠΙΝΑΚΑ

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Οι $m$ γραμμές του $A$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Αυτά παράγουν έναν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ που ονομάζεται **χώρος γραμμών** του $A$. **Συμβολίζεται ως $\mathcal{R}(A^T)$, γιατί συμπίπτει με το χώρο στηλών του $A^T$**

**π.χ.** αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ τότε $\mathcal{R}(A^T) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

δηλ. ο $\mathcal{R}(A^T)$ περιέχει όλα τα διανύσματα $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ που μπορούν να γραφτούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλ. ως $\vec{b} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

**Παρατήρηση:** Είδαμε παραπάνω ότι $\vec{b} \in \mathcal{R}(A)$ ανν {το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει λύση (μοναδική ή άπειρες)}.

Συμπέρασμα: $\vec{b} \in \mathcal{R}(A^T)$ ανν {το σύστημα $A^T\vec{x} = \vec{b}$ έχει λύση (μοναδική ή άπειρες)}

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Για ένα κλιμακωτό πίνακα $U$, οι μη-μηδενικές γραμμές αποτελούν **μια βάση του $\mathcal{R}(U^T)$**. Άρα: $\dim \mathcal{R}(U^T) = r(U)$
- Αν $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$ τότε: $\mathcal{R}(A^T) \equiv \mathcal{R}(U^T)$

  (δηλαδή σε αντίθεση με τους χώρους στηλών των $A$ και $U$ που γενικά διαφέρουν, **οι χώροι γραμμών τους ταυτίζονται**)
- **Συμπέρασμα:** Αν $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$ τότε οι μη-μηδενικές γραμμές του $U$ αποτελούν **μια βάση του $\mathcal{R}(A^T)$**. Άρα: $\boxed{\dim \mathcal{R}(A^T) = r(A)}$

**π.χ.** Έστω $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Είδαμε παραπάνω ότι $U=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Άρα: $\dim \mathcal{R}(A^T)=2$ (=πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U$)

και {μια βάση του $\mathcal{R}(A^T)$} = {οι μη-μηδενικές γραμμές του $U$ } = $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

# ΜΗΔΕΝΟΧΩΡΟΣ ενός ΠΙΝΑΚΑ

Έστω ένας πίνακας $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που συμβολίζεται ως $\mathcal{N}(A)$ και ονομάζεται **μηδενόχωρος** του $A$.

**Απόδειξη:** προφανώς $\mathcal{N}(A)\neq\varnothing$, αφού μια λύση του $A\vec{x}=\vec{0}$ είναι η $\vec{x}=\vec{0}\in\mathbb{R}^n$.
Επίσης, $\mathcal{N}(A)\subseteq\mathbb{R}^n$ αφού τα διανύσματα $\vec{x}$ που ικανοποιούν το σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$.

Επιπλέον, έστω $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ δύο οποιεσδήποτε λύσεις του $A\vec{x}=\vec{0}$. Δηλαδή, $\vec{x}_1,\vec{x}_2\in\mathcal{N}(A)$. Τότε: $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=A\vec{x}_1+A\vec{x}_2=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$. Άρα, και $(\vec{x}_1+\vec{x}_2)\in\mathcal{N}(A)$. Δηλαδή το $\mathcal{N}(A)$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Επίσης, $A(\lambda\vec{x}_1)=\lambda(A\vec{x}_1)=\lambda\vec{0}=\vec{0}$. Άρα, και $(\lambda\vec{x}_1)\in\mathcal{N}(A)$, $\forall\vec{x}_1\in\mathcal{N}(A)$ & $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. Δηλαδή το $\mathcal{N}(A)$ είναι και κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό.
Συνεπώς, το $\mathcal{N}(A)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αν $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\longrightarrow} U$ τότε ξέρουμε ότι $A\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0}$. Επομένως: $\mathcal{N}(A)\equiv\mathcal{N}(U)$
- $\boxed{\dim\mathcal{N}(A)=n-r(A)}$ = (πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών)
- Αν $r(A)=n$ (δηλ. οδηγοί σε κάθε στήλη του $U$, δηλ. καμία ελεύθερη μεταβλητή) τότε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x}=\vec{0}$.
  Άρα: $\mathcal{N}(A)=\{\vec{0}\}$ (δηλ, ο τετριμμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$) και $\dim\mathcal{N}(A)=0$
  Σ' αυτήν την περίπτωση ο $\mathcal{N}(A)$ **δεν έχει καμία βάση**

**Άσκηση:** Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του μηδενόχωρου του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

## **Λύση**

Είδαμε παραπάνω ότι $U=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

Άρα: $\dim\mathcal{N}(A)=n-r(A)\ \Rightarrow\ \dim\mathcal{N}(A)=4-2\ \Rightarrow\ \dim\mathcal{N}(A)=2$

Για να βρούμε μια βάση του $\mathcal{N}(A)$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$, το οποίο έχει τις ίδιες λύσεις με το $U\vec{x}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}1&3&3&2\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

Βασικές μεταβλητές: $x,z$
Ελεύθερες μεταβλητές: $y,w$
Ανάδρομη αντικατάσταση:
$3^{\eta}$ εξίσωση: ικανοποιείται $\forall(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$

$2^{\eta}$ εξίσωση: $3z+w=0\ \Rightarrow\ z=-\dfrac{1}{3}w$

$1^{\eta}$ εξίσωση: $x+3y+3z+2w=0\ \Rightarrow\ x+3y+3\left(-\dfrac{1}{3}w\right)+2w=0\ \Rightarrow\ x=-3y-w$

Άρα, ο $\mathcal{N}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\vec{x}=\begin{bmatrix}-3y-w\\y\\-\frac{1}{3}w\\w\end{bmatrix}$, δηλαδή της μορφής:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-3y-w\\y\\-\frac{1}{3}w\\w\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}-1\\0\\-1/3\\1\end{bmatrix},\quad \text{με}\quad y,w\in\mathbb{R}$$

Επομένως, μια βάση του $\mathcal{N}(A)$ είναι η $\left\{\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\-1/3\\1\end{bmatrix}\right\}$.

**Παρατήρηση:** Το σύνολο λύσεων ενός **μη-ομογενούς** συστήματος $A\vec{x}=\vec{b}$ **δεν είναι διανυσματικός χώρος**, αφού αν $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ δύο οποιεσδήποτε λύσεις του, τότε: $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=A\vec{x}_1+A\vec{x}_2=\vec{b}+\vec{b}=2\vec{b}\neq\vec{b}$, δηλ. το $(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$ δεν είναι λύση του $A\vec{x}=\vec{b}$. Άρα, το σύνολο λύσεων της $A\vec{x}=\vec{b}$ δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση. Άρα, δεν είναι διανυσματικός χώρος.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ο μηδενόχωρος του $A^T$, δηλαδή ο $\mathcal{N}(A^T)$ ονομάζεται **αριστερός μηδενόχωρος** του $A$.

**Παρατήρηση:** από τη σχέση $\dim \mathcal{N}(A) = n - r(A)$ προκύπτει ότι $\boxed{\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r(A)}$ [μιας και ο $A^T$ έχει $m$ στήλες και επιπλέον $r(A^T) = r(A)$]

**Άσκηση:** Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του αριστερού μηδενόχωρου του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Τι παριστάνει γεωμετρικά αυτός ο χώρος;

**Λύση**

Από την προηγούμενη άσκηση, ξέρουμε ότι $r(A) = 2$. Άρα, για τη διάσταση του $\mathcal{N}(A^T)$ έχουμε: $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r(A) \Rightarrow \dim \mathcal{N}(A^T) = 3 - 2 \Rightarrow \dim \mathcal{N}(A^T) = 1$

Για να βρούμε μια βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα $A^T \vec{x} = \vec{0}$. Έχουμε:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-3)\ (-3)\ (-2) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{εναλλαγή} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ (+) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U'$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό $U'$ για να ξεχωρίζουμε τον κλιμακωτό που μας δίνει ο $A^T$, από τον κλιμακωτό $U$ που μας δίνει ο $A$.

$$A^T \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U' \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: $x, y$

Ελεύθερη μεταβλητή: $z$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

4η & 3η εξίσωση: ικανοποιούνται $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

2η εξίσωση: $y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z$

1η εξίσωση: $x + 2y - z = 0 \Rightarrow x + 2(-2z) - z = 0 \Rightarrow x = 5z$

Άρα, ο $\mathcal{N}(A^T)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5z \\ -2z \\ z \end{bmatrix}$, δηλαδή της μορφής:

$\vec{x} = z \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $z \in \mathbb{R}$. Επομένως, μια βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ είναι η $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Ο $\mathcal{N}(A^T)$ παριστάνει την <u>ευθεία</u> του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τα σημεία $(0,0,0)$ και $(5,-2,1)$.

## ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Για να βρούμε τις διαστάσεις και βάσεις των $\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(A^T), \mathcal{N}(A)$ και $\mathcal{N}(A^T)$ εργαζόμαστε ως εξής:

**1)** $A \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U$

**2)** $r(A) =$(πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $U$)

**3)** Υπολογίζουμε τις διαστάσεις των $\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(A^T), \mathcal{N}(A)$ και $\mathcal{N}(A^T)$ από τις σχέσεις:

$$\boxed{\dim \mathcal{R}(A) = r(A), \quad \dim \mathcal{R}(A^T) = r(A), \ \dim \mathcal{N}(A) = n - r(A), \ \ \dim \mathcal{N}(A^T) = m - r(A)}$$

**4)** {μια βάση του $\mathcal{R}(A)$} = {οι στήλες του $A$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ που έχουν τους οδηγούς}

**5)** {μια βάση του $\mathcal{R}(A^T)$} = {οι μη-μηδενικές γραμμές του $U$}

**6)** Αν $\dim \mathcal{N}(A) = 0$, τότε $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ και άρα ο $\mathcal{N}(A)$ δεν έχει βάση.

Αν $\dim \mathcal{N}(A) > 0$, τότε λύνουμε το σύστημα $U\vec{x} = \vec{0}$ ως προς τις βασικές μεταβλητές (εκείνες δηλαδή τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες του $U$ που έχουν τους οδηγούς) σε συνάρτηση με τις ελεύθερες μεταβλητές. Η γενική λύση γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός «κάποιων» διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ έχοντας ως συντελεστές τις ελεύθερες μεταβλητές. Αυτά τα «κάποια» διανύσματα αποτελούν όλα μαζί μια βάση του $\mathcal{N}(A)$.

**7)** Αν $\dim \mathcal{N}(A^T) = 0$, τότε $\mathcal{N}(A^T) = \{\vec{0}\}$ και άρα ο $\mathcal{N}(A^T)$ δεν έχει βάση.

Αν $\dim \mathcal{N}(A^T) > 0$, τότε $A^T \underset{\text{απαλοιφές}}{\rightarrow} U'$ και κατόπιν, λύνουμε το σύστημα $U'\vec{x} = \vec{0}$ ως προς τις βασικές μεταβλητές (εκείνες δηλαδή τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες του $U'$ που έχουν τους οδηγούς) σε συνάρτηση με τις ελεύθερες μεταβλητές. Η γενική λύση γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός «κάποιων» διανυσμάτων του $\mathbb{R}^m$ έχοντας ως συντελεστές τις ελεύθερες μεταβλητές. Αυτά τα «κάποια» διανύσματα αποτελούν όλα μαζί μια βάση του $\mathcal{N}(A^T)$.

<u>**Παρατήρηση:**</u> Οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο μπορούμε να τον γράψουμε ως το χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$ ή ως μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$ κάποιου πίνακα $A$. Συγκεκριμένα:

- Αν ξέρουμε ότι ένας χώρος $V$ έχει ως βάση ή τουλάχιστον παράγεται από τα διανύσματα $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \rangle$ τότε θέτουμε $A$=[πίνακας με στήλες τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$] και άρα, $V \equiv \mathcal{R}(A)$.
- Αν ξέρουμε ότι τα διανύσματα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ του $V$ ικανοποιούν μια ή περισσότερες εξισώσεις της μορφής $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, τότε θέτουμε $A$=[πίνακας με στήλες τους συντελεστές κάθε μεταβλητής σ' αυτές τις εξισώσεις] και άρα, $V \equiv \mathcal{N}(A)$.

π.χ. αν $V=\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4\rangle$ με $\vec{v}_1=(1,-2,4)$, $\vec{v}_2=(3,0,-1)$, $\vec{v}_3=(0,6,-13)$, $\vec{v}_4=(1,4,-9)$, τότε $V\equiv\mathcal{R}(A)$, όπου $A=\begin{bmatrix}1&3&0&1\\-2&0&6&4\\4&-1&-13&-9\end{bmatrix}$ ο πίνακας με στήλες τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4$.

π.χ. αν $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus 2x-y+6z=0\}$ τότε ο $V$ αποτελείται από τις λύσεις $(x,y,z)$ της εξίσωσης $2x-y+6z=0$ η οποία ισοδύναμα γράφεται ως $\begin{bmatrix}2&-1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=[0]$. Δηλαδή, $V\equiv\mathcal{N}(A)$ όπου $A=\begin{bmatrix}2&-1&6\end{bmatrix}$

π.χ. αν $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x=2y=-z\}$ τότε ο $V$ αποτελείται από τις λύσεις του συστήματος $\begin{cases}x=2y\\x=-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=0\\x+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. Δηλαδή, $V\equiv\mathcal{N}(A)$ όπου $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 1:** Έστω ένας πίνακας $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Οι χώροι $\mathcal{R}(A)$ και $\mathcal{N}(A^T)$ είναι **συμπληρωματικοί** ο ένας στον άλλο στον $\mathbb{R}^m$. Δηλαδή, ικανοποιούν και τις 3 επόμενες ιδιότητες:

- $\mathcal{R}(A)\subseteq\mathbb{R}^m$ & $\mathcal{N}(A^T)\subseteq\mathbb{R}^m$
- $\dim\mathcal{R}(A)+\dim\mathcal{N}(A^T)=\dim\mathbb{R}^m$
- $\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{N}(A^T)=\{\vec{0}\}$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 2:** Έστω ένας πίνακας $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Οι χώροι $\mathcal{R}(A^T)$ και $\mathcal{N}(A)$ είναι **συμπληρωματικοί** ο ένας στον άλλο στον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, ικανοποιούν και τις 3 επόμενες ιδιότητες:

- $\mathcal{R}(A^T)\subseteq\mathbb{R}^n$ & $\mathcal{N}(A)\subseteq\mathbb{R}^n$
- $\dim\mathcal{R}(A^T)+\dim\mathcal{N}(A)=\dim\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{R}(A^T)\cap\mathcal{N}(A)=\{\vec{0}\}$

**Πόρισμα:** $\mathcal{R}(A)\equiv\mathbb{R}^m$ ανν $\dim\mathcal{N}(A^T)=0$ [δηλ. $r(A)=m$]

**Άσκηση (παλαιότερο θέμα):** Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί υπόχωροι $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x+2y=0\}$ και $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x-y+z=0\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α) Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι χώροι $V$ και $W$ και ποια η διάσταση του καθενός;

β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του υποχώρου $V\cap W$. Τι παριστάνει αυτός ο χώρος γεωμετρικά;

γ) Βρείτε μια βάση του υποχώρου του $\mathbb{R}^3$ που είναι συμπληρωματικός του $V\cap W$.

## Λύση

α) Και οι δυο χώροι περιέχουν 3άδες $(x, y, z)$ πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Άρα, καθένας από τους χώρους $V$ και $W$ παριστάνει ένα επίπεδο που περνά από το $\vec{0} = (0,0,0)$.
Επομένως, $\dim V = 2$ και $\dim W = 2$

β) $V \cap W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x + 2y = 0 \ \& \ x - y + z = 0\right\}$
δηλαδή ο $V \cap W$ αποτελείται από τις λύσεις του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{0}}$$

δηλαδή, ο $V \cap W \equiv \mathcal{N}(A)$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \leftarrow\!\lrcorner_{(+)} \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Όμως, $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0}$
Βασικές μεταβλητές: $x, y$
Ελεύθερη μεταβλητή: $z$
<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>
$2^{\eta}$ εξίσωση: $-3y + z = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}z$
$1^{\eta}$ εξίσωση: $x + 2y = 0 \Rightarrow x + 2\frac{1}{3}z = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}z$

Άρα, ο $V \cap W$ έχει διανύσματα της μορφής: $\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}z \\ z \end{bmatrix}$, δηλαδή της μορφής:

$$\vec{x} = z \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με} \quad z \in \mathbb{R}$$

Επομένως, μια βάση του $V \cap W$ είναι το μονοσύνολο $\left\{ \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Επειδή η βάση έχει 1 διάνυσμα, συμπεραίνουμε ότι $\dim(V \cap W) = 1$

Ο $V \cap W$ παριστάνει την <u>ευθεία</u> του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τα σημεία $(0,0,0)$ και $(-2/3, 1/3, 1)$. Δηλαδή, τα επίπεδα $V$ και $W$ τέμνονται σε αυτήν την ευθεία.

γ) Επειδή $V \cap W \equiv \mathcal{N}(A)$, συμπεραίνουμε ότι ο συμπληρωματικός στον $V \cap W$ είναι ο χώρος γραμμών του $A$, δηλαδή ο $\mathcal{R}(A^T)$. Μια βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ είναι οι μη-μηδενικές γραμμές του $U$, δηλαδή

$$\{\text{μια βάση του } \mathcal{R}(A^T)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$