ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΤΣΑΓΡΑΚΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΜΕΡΟΣ 4: ***ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ***

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2009

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Γενική μορφή (σύστημα $m\times n$):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$ σύστημα $m\times n$ (m εξισώσεις με n αγνώστους)

όπου α_{ij}, b_j συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί.

Το σύστημα μπορεί, κατ' αρχάς, να γραφτεί ως ισότητα δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^m$. Δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}}_{\substack{A \\ (m\times n)}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{\vec{x} \\ (n\times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\substack{\vec{b} \\ (m\times 1)}}$$

Δηλαδή το σύστημα ανάγεται στο γινόμενο ενός πίνακα $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ με στήλες τους συντελεστές κάθε αγνώστου επί ένα διάνυσμα $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ με συνιστώσες τους αγνώστους και το γινόμενο αυτό είναι ίσο με το διάνυσμα $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$ με τους σταθερούς όρους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 7 \\ 6x + 4z = 0 \end{array}\right\} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\left.\begin{aligned}2x-y&=-1\\x+y&=5\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\left.\begin{aligned}3x-5y&=0\\x+y-z&=1\\3z&=2\\-5x+y+z&=-3\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}3&-5&0\\1&1&-1\\0&0&3\\-5&1&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\2\\-3\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\left.\begin{aligned}5x_1-3x_2+x_3-x_4&=-1\\8x_1+x_2-2x_3+6x_4&=7\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}5&-3&1&-1\\8&1&-2&6\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΕ ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ (ή κλιμακωτοί πίνακες)

Ορισμός: Ένας πίνακας $U\in\mathbb{R}^{m\times n}$ είναι κλιμακωτός (ή έχει κλιμακωτή μορφή) αν $\exists\, p\in\mathbb{N}$ ($p=$ πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών) με $0\le p\le m$ και $\forall\, i=1,\dots,p$, $\exists\, j_i\in\mathbb{N}$ ($j_i=$ στήλη του 1ου μη-μηδενικού στοιχείου της γραμμής i) τ.ω.

1) $j_1\ge 1$ και $j_{i+1}>j_i$, $\forall\, i=1,\dots,p-1$

   δηλαδή, η στήλη του 1ου μη-μηδενικού στοιχείου κάθε γραμμής βρίσκεται πιο δεξιά από εκείνη της προηγούμενης γραμμής

2) $u_{ik}=0$, $\forall\, k<j_i$ και $\forall\, i=1,\dots,p$

   δηλαδή, σε κάθε γραμμή i, όλα τα στοιχεία πριν την j_i στήλη είναι μηδέν

3) $u_{ik}=0 \quad \forall\, i>p\,, \ \forall\, k=1,\dots,n$

δηλαδή, όλα τα στοιχεία των γραμμών που βρίσκονται κάτω από τις p πρώτες γραμμές είναι ίσα με μηδέν

Σ' αυτήν την περίπτωση το u_{ij_i} (δηλ. το 1ο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής) λέγεται <u>οδηγός</u>

Γενική μορφή κλιμακωτού:

οποιοσδήποτε αριθμός

$$U=\begin{bmatrix}
0 & \cdots & u_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & u_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & u_{pj_p} \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \cdots & 0
\end{bmatrix}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

$$U=\begin{bmatrix}
0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 6 & 8 \\
0 & 0 & 7 & -1 & 2 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 6 & -2 & 1 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

δηλ. το 1ο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής είναι πιο δεξιά από αυτό της προηγούμενης

οδηγοί: 2, 7, 6, 3

$$U=\begin{bmatrix}
-3 & 1 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -6
\end{bmatrix}, \qquad U=\begin{bmatrix}
1 & 4 & 0 & 7 \\
0 & 8 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}
-2 & 1 & 7 & -5 & 6 \\
0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}, \qquad U=\begin{bmatrix}
3 & -1 & 0 \\
0 & 7 & -4 \\
0 & 0 & -2
\end{bmatrix}$$

Σημείωση: Από το τελευταίο παράδειγμα είναι προφανές ότι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο είναι και κλιμακωτός.

Από την άλλη, ένας άνω τριγωνικός πίνακας με κάποια μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, μπορεί να είναι ή να μην είναι κλιμακωτός. Αυτό εξαρτάται από τη θέση των μηδενικών της κύριας διαγωνίου και από τη μηδενικότητα των στοιχείων που βρίσκονται πάνω από αυτήν

Π.Χ.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 8 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

← άνω τριγωνικός και κλιμακωτός

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

← άνω τριγωνικός αλλά όχι κλιμακωτός (Το 1ο μη-μηδενικό στοιχείο της 3ης γραμμής δεν είναι πιο δεξιά από αυτό της 2ης)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

← άνω τριγωνικός αλλά όχι κλιμακωτός (Το 1ο μη-μηδενικό στοιχείο της 3ης γραμμής δεν είναι πιο δεξιά από αυτό της 2ης)

ΑΠΑΛΟΙΦΗ GAUSS

Είναι μια γενική μέθοδος **επίλυσης** συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

Έστω ένα $m\times n$ σύστημα: $A\vec{x}=\vec{b}$

Διαδικασία: α) Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid \vec{b}]$

β) Εφαρμόζουμε απαλοιφές μεταξύ γραμμών μέχρι ο πίνακας να έρθει στη μορφή $[U \mid \vec{d}]$, όπου

$U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ πίνακας σε κλιμακωτή μορφή

$\vec{d} \in \mathbb{R}^{m}$ διάνυσμα που προκύπτει μετά τις απαλοιφές

γ) Το αρχικό σύστημα έχει τις ίδιες λύσεις με το $U\vec{x}=\vec{d}$

δηλ. $\boxed{A\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{d}}$

δ) Όσες από τις άγνωστες μεταβλητές $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ αντιστοιχούν σε στήλες του U με οδηγούς ονομάζονται <u>βασικές μεταβλητές</u> ενώ οι υπόλοιπες (αν υπάρχουν) ονομάζονται <u>ελεύθερες μεταβλητές</u>

ε) Το σύστημα $U\vec{x}=\vec{d}$ λύνεται (εύκολα) ως προς τις βασικές μεταβλητές χρησιμοποιώντας <u>ανάδρομη αντικατάσταση</u>

Παράδειγμα

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 6x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 &= 9 \\ 3x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ σύστημα } 4\times 4$$

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \quad 1 \quad (-3/2) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -8 & -2 & -5 & -12\\ 0 & 8 & 3 & 4 & 14\\ 0 & -3/2 & -5/2 & -9/2 & -13/2 \end{array}\right] \begin{array}{ll} & \\ 1 & (-3/16) \\ (+) & \\ & (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -8 & -2 & -5 & -12\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -17/8 & -\frac{57}{16} & -17/4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 17/8 \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -8 & -2 & -5 & -12\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -91/16 & 0 \end{array}\right] = \left[\, U \;\vdots\; \vec{d} \,\right]$$

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -8 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -91/16 \end{array}}_{U} \quad \underbrace{\begin{array}{c} 5\\ -12\\ 2\\ 0 \end{array}}_{\vec{d}}$$

Οδηγοί: $2, -8, 1, -91/16$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4

Ελεύθερες μεταβλητές: καμία

Κάθε γραμμή του $[U \,\vdots\, \vec{d}\,]$ αντιπροσωπεύει μία εξίσωση.

Ανάδρομη αντικατάσταση:

από την 4η εξίσωση: $-\frac{91}{16}x_4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_4 = 0}$

» » 3η εξίσωση: $x_3 - x_4 = 2 \Rightarrow \boxed{x_3 = 2}$

» » 2η εξίσωση: $-8x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -12 \Rightarrow -8x_2 - 4 = -12 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

» » 1η εξίσωση: $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \Rightarrow 2x_1 + 1 + 2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

Δηλαδή, το σύστημα έχει μοναδική **λύση** την $\vec{x} = (1, 1, 2, 0)$

Παρατήρηση: Η απαλοιφή Gauss βασίζεται στο γεγονός ότι το αρχικό σύστημα έχει την ίδια λύση με κάθε άλλο σύστημα που προκύπτει εάν:

- Αλλάξουμε τη σειρά των εξισώσεων
- Πολλαπλασιάσουμε μια εξίσωση με ένα πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$
- Προσθέσουμε μια εξίσωση σε μια άλλη

Άλλο παράδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \qquad &= 5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[A \,|\, \vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \quad 1 \\ (+) \\ \quad (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-2) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Οδηγοί: 1, 3

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_3

Ελεύθερες μεταβλητές: x_2, x_4

Ανάδρομη αντικατάσταση:

3η εξίσωση: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$ που ισχύει $\forall\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

2η » : $3x_3 + x_4 = 3 \Leftrightarrow \boxed{x_3 = 1 - \frac{1}{3}x_4}$

1η εξίσωση: $x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + 3x_2 + 3\left(1 - \frac{1}{3}x_4\right) + 2x_4 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -2 - 3x_2 - x_4}$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 3x_2 - x_4 \\ x_2 \\ 1 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

οι οποίες, ισοδύναμα, γράφονται και ως:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\vec{x}_{\varepsilon\iota\delta.} \\ \text{ειδική λύση} \\ (\text{για } x_2 = x_4 = 0) \\ \text{του } A\vec{x}=\vec{b}}} + \underbrace{x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\vec{x}_0 \text{ γενική λύση} \\ \text{του ομογενούς} \\ \text{συστήματος } A\vec{x}=\vec{0}}} \quad \text{με } x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή, η γενική λύση $\vec{x}_\gamma$ του $A\vec{x}=\vec{b}$ γράφεται ως άθροισμα $\vec{x}_\gamma = \vec{x}_{\varepsilon\iota\delta} + \vec{x}_0$ μιας ειδικής λύσης $\vec{x}_{\varepsilon\iota\delta}$ του $A\vec{x}=\vec{b}$ και της γενικής λύσης $\vec{x}_0$ του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$

<u>Άλλο παράδειγμα:</u>

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

(ίδιο με πριν εκτός από το σταθερό όρο στην τελευταία εξίσωση)

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \quad 1 \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-2) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Η 3η εξίσωση δίνει: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -2$ το οποίο είναι αδύνατο $\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Άρα, το σύστημα <u>Δεν έχει λύση</u>

ΤΑΞΗ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και έστω $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ η κλιμακωτή μορφή που προκύπτει από τον A χρησιμοποιώντας απαλοιφές. Τότε:

{τάξη του A} = {πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών του U}

Συμβολισμός: $r(A)$ ή $\operatorname{rank}(A)$

Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(βλ. παραπάνω)}]{\text{απαλοιφές}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα: $r(A) = 2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $A \xrightarrow[\text{απαλοιφή}]{} U$ τότε $r(U) = r(A)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $r(A)$ = {πλήθος οδηγών του U}

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$. Τότε:

{πλήθος βασικών μεταβλητών} = $r(A)$

{πλήθος ελεύθερων μεταβλητών} = $n - r(A)$

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ $m\times n$ $(A\vec{x} = \vec{0})$

Προφανής λύση: $\boxed{\vec{x} = \vec{0}} \in \mathbb{R}^n$

Άρα, ένα ομογενές σύστημα δεν μπορεί να είναι <u>αδύνατο</u>

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ $A\vec{x} = \vec{0}$
- είτε μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$
- είτε άπειρες λύσεις

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $A \xrightarrow[\text{απαλοιφ.}]{} U$ τότε: $\boxed{A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0}}$

αφού $[A \,\vdots\, \vec{0}] \xrightarrow[\text{απαλοιφ.}]{} [U \,\vdots\, \vec{0}]$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$ <u>ανν</u> $r(A) = n$ (δηλ. αν ο U έχει οδηγούς σε όλες τις στήλες). (*)

Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \quad (-3) \quad 1 \\ (+) \\ \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \quad (-1) \\ (+) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (1/4) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα $r(A)=3$ (δηλ. $r(A)=n$) και το ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x}=(0,0,0)$.

Πόρισμα: Από τον ορισμός της τάξης ενός πίνακα, προκύπτει ότι $r(A)\leq \min(m,n)$ (π.χ. για ένα πίνακα 3×4, θα έχουμε αναγκαστικά $r(A)\leq 3$). Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την τελευταία παρατήρηση συνεπάγεται ότι ένα ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ με $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ και $n>m$ (δηλ. περισσότερες στήλες από γραμμές) έχει άπειρες λύσεις, αφού αναγκαστικά $r(A)\leq m<n$ δηλ. $r(A)\neq n$.

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3-x_4&=0\\ 8x_1+x_2-5x_3+7x_4&=0\\ x_1-2x_2+4x_3-6x_4&=0 \end{aligned}\right\}\ 3\times 4$$

και άρα χωρίς να την υπολογίσουμε, ξέρουμε ότι η τάξη $r(A)$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 3. Άρα, $r(A)\neq 4$ και το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση: Προσδιορίστε την κλιμακωτή μορφή U, τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές, και τη γενική λύση του συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$ για

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2)\ (-1) \\ (+) \\ \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ (+) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2 (αντιστοιχούν στις στήλες που έχουν οδηγό)

Ελεύθερη μεταβλητή: x_3 (αντιστοιχεί στη στήλη που δεν έχει οδηγό)

$r(A)=2\neq 3$ δηλ. $r(A)\neq n$, άρα το σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις τις οποίες βρίσκουμε ως εξής: $A\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 & \text{(2η εξίσωση)} \\ x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_3 & \text{(1η εξίσωση)} \\ \text{(η 3η και η 4η εξίσωση ικανοποιούνται ταυτοτικά)} \end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ με $x_3 \in \mathbb{R}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Για ένα τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ισχύει ότι:

* $\boxed{r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0}$ * * *

αφού αν $\det A \neq 0$ τότε $A \xrightarrow[\text{απαλοιφ.}]{} U$ = άνω τριγωνικός με μη-μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, και άρα ο U είναι κλιμακωτός με οδηγούς σε όλες τις στήλες, δηλ. $r(A) = n$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Ένα τετραγωνικό $n \times n$ ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$ ανν $\det A \neq 0$

(δηλ. έχει άπειρες λύσεις ανν $\det A = 0$)

<u>ΑΣΚΗΣΗ:</u> Έστω το σύστημα $\begin{cases} x + y + \lambda z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$, με αγνώστους $x, y, z \in \mathbb{R}$ και με γνωστή παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$

β) Για τις τιμές του λ που το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, να βρεθούν οι λύσεις αυτές.

<u>Λύση</u>

α) <u>1ος τρόπος:</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 - 6 - (-3 - 4) + \lambda(9 - 8) = -3 + \lambda$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = \vec{0}$ ανν $\det A \neq 0$ δηλ. ανν $\lambda \neq 3$

2ος Τρόπος

$$A=\left[\begin{array}{ccc}1 & 1 & \lambda\\ 3 & 4 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{array}\right]\begin{array}{l}(-3)\quad(-2)\\ \leftarrow(+)\\ \leftarrow(+)\end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc}1 & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & 2-3\lambda\\ 0 & 1 & -1-2\lambda\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ (-1)\\ \leftarrow(+)\end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc}1 & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & 2-3\lambda\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{array}\right]=U$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $\vec{x}=\vec{0}$ ανν

$$r(A)=n \Leftrightarrow r(A)=3 \Leftrightarrow \lambda-3\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 3$$

β) Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις ανν $\lambda=3$. Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

με $\begin{cases}\text{ελεύθερη μεταβλητή: } z\\ \text{βασικές μεταβλητές: } x, y\end{cases}$

Ανάδρομη Αντικατάσταση:

$$y-7z=0 \Rightarrow y=7z$$

$$x+y+3z=0 \Rightarrow x+7z+3z=0 \Rightarrow x=-10z$$

Άρα, οι λύσεις του συστήματος έχουν τη μορφή:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10z\\ 7z\\ z\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}-10\\ 7\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{με } z\in\mathbb{R}$$

Γεωμετρικά, σ' αυτήν την περίπτωση οι λύσεις είναι όλα τα σημεία (x,y,z) του $\mathbb{R}^3$ που βρίσκονται πάνω στην ευθεία του διανύσματος $(-10,7,1)$.

ΜΗ - ΟΜΟΓΕΝΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ $m \times n$ $(A\vec{x} = \vec{b})$

Μη - Ομογενές σύστημα $(A\vec{x}=\vec{b})$ — είτε μοναδική λύση / είτε άπειρες λύσεις / είτε καμία λύση

Είδαμε ότι

Επίλυση: $[A \mid \vec{b}] \xrightarrow[\text{απαλοιφή Gauss}]{} [U \mid \vec{d}] \xrightarrow[\text{ανάδρομη αντικατάσταση}]{}$ λύση (αν υπάρχει)

όπου $\boxed{A\vec{x}=\vec{b} \iff U\vec{x}=\vec{d}}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν $r(A)=m$ τότε
- όταν και $m=n \to$ μοναδική λύση
- όταν και $m<n \to$ άπειρες λύσεις

[Σημείωση: στην περίπτωση που $m>n$, δεν μπορεί να έχουμε $r(A)=m$, αφού είδαμε ότι $r(A) \le \min(m,n)$]

2) Αν $r(A)=n$ τότε
- όταν και $m=n \to$ μοναδική λύση
- όταν και $n<m \to$ μοναδική λύση / είτε καμία λύση

Σημείωση: Αναγκαία (αλλά όχι ικανή) προϋπόθεση για να έχουμε μοναδική λύση είναι $r(A)=n$ (πλήθος ελεύθερων μεταβλητών $=0$)

Παρατήρηση: Δεν υπάρχει περίπτωση να έχουμε μοναδική λύση αν οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους, δηλαδή αν $m<n$.
[αν $m<n$, τότε $r(A) \le \min(m,n) \Rightarrow r(A) \le m < n$ δηλ. $r(A) \ne n$]

Άσκηση

Έστω το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+3x_2+3x_3+2x_4=b_1 \\ 2x_1+6x_2+9x_3+5x_4=b_2 \\ -x_1-3x_2+3x_3 \qquad\quad = b_3 \end{array}\right\} 3\times 4$$

α) Υπάρχει περίπτωση το σύστημα να έχει μοναδική λύση;

β) Για ποια διανύσματα $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ το σύστημα δεν έχει λύση;

γ) Για ποια διανύσματα $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις; Βρείτε τη μορφή αυτών των λύσεων διαλέγοντας ένα τέτοιο διάνυσμα $\vec{b}$.

Λύση

α) Το σύστημα έχει 3 εξισώσεις και 4 αγνώστους, δηλαδή είναι 3×4, άρα η τάξη $r(A)$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 3. Χωρίς, λοιπόν, να την υπολογίσουμε, ξέρουμε ότι $r(A)\leq 3$, άρα $r(A)\neq 4$ δηλ. $r(A)\neq n$ οπότε το σύστημα δεν γίνεται να έχει μοναδική λύση.

β)
$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & b_1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & b_2 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & b_3 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & b_1+b_3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-2) \\ (+) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5b_1-2b_2+b_3 \end{array}\right] = [U \mid \vec{d}\,]$$

Αν $5b_1-2b_2+b_3\neq 0$, τότε η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη και άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

γ) Αν $5b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

π.χ. για $\vec{b} = (1, 1, -3)$ έχουμε:

$$[U \,\vdots\, \vec{d}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\begin{cases} \text{Βασικές μεταβλητές: } X_1, X_3 \\ \text{Ελεύθερες μεταβλητές: } X_2, X_4 \end{cases}$

<u>Ανάδρομη αντικατάσταση:</u>

2η εξίσωση: $3X_3 + X_4 = -1 \Rightarrow \boxed{X_3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}X_4}$

1η εξίσωση: $X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 2X_4 = 1 \Rightarrow X_1 + 3X_2 + 3\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}X_4\right) + 2X_4 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 = 2 - 3X_2 - X_4}$$

Δηλαδή, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 3X_2 - X_4 \\ X_2 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}X_4 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

δηλαδή: $$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{X_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + X_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Γενική λύση του } A\vec{X} = \vec{0}}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ $n \times n$ (δηλ. $m = n$)

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει μοναδική λύση $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ανν $\det A \neq 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση η μοναδική λύση είναι ίση με $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Συνοπτικά:

α) $\boxed{\{A\vec{x}=\vec{b} \text{ έχει μοναδική λύση και είναι ίση με } \vec{x}=A^{-1}\vec{b}\} \iff \det A \neq 0 \iff r(A)=n}$

β) Αν $\det A = 0$ [δηλ. αν $r(A)<n$] τότε το $A\vec{x}=\vec{b}$ < είτε άπειρες λύσεις / είτε καμία λύση

Παράδειγμα

Το σύστημα $\begin{cases} x+4y+2z=1 \\ -2x-8y+3z=0 \\ \quad\; y+z=-1 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση, γιατί

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -(3+4)+(-8+8) = -7$$

δηλ. $\det A \neq 0$

Σημείωση: Αν ξέρουμε ήδη τον A^{-1} μπορούμε να υπολογίσουμε τη λύση από τη σχέση $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Αλλιώς, από θέμα έκτασης των πράξεων, Βολεύει η απαλοιφή Gauss

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & -10 & 4 \\ 6 & -15 & 6 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

α) Υπολογίστε τον A^{-1}

β) Βρείτε τη λύση του συστήματος $A\vec{x}=\vec{b}$, όπου $\vec{b}=(-1,4,3)$

Λύση

α) Άσκηση για το σπίτι

$\left\{\begin{array}{l}\text{Χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss-Jordan ή} \\ \text{υπολογίζοντας τον } adj A \\ \text{και χρησιμοποιώντας τη σχέση} \\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, adj A\end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 & 0 \\ 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ 5/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

β) Αφού $\exists$ ο A^{-1} το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

δηλ. $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 & 0 \\ 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ 5/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{8}{3} \\ -\frac{3}{5} - \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \\ -\frac{5}{2} - \frac{12}{2} - \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ -14/5 \\ -10 \end{bmatrix}$

Άσκηση: Έστω το σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 6y - 5z = 5 \\ -3x - 8y + (\lambda^2+7)z = \lambda - 8 \end{array}\right\}$$ με αγνώστους $x, y, z \in \mathbb{R}$ και με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση. Υπολογίστε τη λύση αυτή συναρτήσει της παραμέτρου λ. Δώστε παραδείγματα για συγκεκριμένες τιμές του λ

β) Υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα δεν έχει λύση;

γ) Υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Αν ναι, ποια η μορφή αυτών των λύσεων;

Λύση

α) $[A \,\vdots\, \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 5 \\ -3 & -8 & \lambda^2+7 & \lambda-8 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \;\; 3 \\ \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{array} \rightarrow$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda^2-2 & \lambda-2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 1 \\ \leftarrow (+) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{array}\right] = [U \mid \vec{d}]$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση <u>ανν</u> $r(A)=n$ δηλ. ανν $r(A)=3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 1 \\ \text{και} \\ \lambda\neq -1 \end{cases}$$

[Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση <u>ανν</u>
$\det A \neq 0 \Leftrightarrow (-1)^k \det U \neq 0 \Leftrightarrow (-1)^0 \cdot 1\cdot 2\cdot(\lambda^2-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2-1\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda\neq -1 \\ \text{και} \\ \lambda\neq 1\end{cases}$]

Σ' αυτή την περίπτωση, η μοναδική λύση (συναρτήσει του λ) υπολογίζεται με ανάδρομη αντικατάσταση ως:

3η Εξίσωση: $(\lambda^2-1)z=\lambda-1 \Leftrightarrow z=\dfrac{\lambda-1}{\lambda^2-1} \Leftrightarrow \boxed{z=\dfrac{1}{\lambda+1}}$

2η Εξίσωση: $2y+z=1 \Rightarrow 2y+\dfrac{1}{\lambda+1}=1 \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+1)}}$

1η Εξίσωση: $x+2y-3z=2 \Rightarrow x+\dfrac{\lambda}{\lambda+1}-\dfrac{3}{\lambda+1}=2 \Rightarrow \boxed{x=\dfrac{\lambda+5}{\lambda+1}}$

Δηλαδή για $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda+5}{\lambda+1} \\ \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} \\ \frac{1}{\lambda+1} \end{bmatrix} \qquad \text{δηλ.} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda+1}\begin{bmatrix} \lambda+5 \\ \lambda/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

π.χ. Αν βάλουμε $\lambda=0$ στο αρχικό σύστημα, τότε αυτό έχει τη μοναδική λύση $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Αν βάλουμε $\lambda=2$ στο αρχικό σύστημα, τότε αυτό έχει τη μοναδική λύση $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix}$ κ.ο.κ.

β) Για $\lambda=-1$, έχουμε:

$$[U \mid \vec{d}\,]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right]$$

όπου η τελευταία εξίσωση είναι:

$0x+0y+0z=-2 \Rightarrow 0=-2 \rightarrow$ αδύνατον.

Άρα, για $\lambda=-1$ το σύστημα δεν έχει λύση

γ) Για $\lambda=1$, έχουμε:

$$[U \mid \vec{d}\,]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Βασικές μεταβλητές: x, y
Ελεύθερες μεταβλητές: z

<u>Ανάδρομη Αντικατάσταση:</u>

3η εξίσωση: $0x+0y+0z=0$ που ισχύει $\forall\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

2η » : $2y+z=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z}$

1η εξίσωση: $x+2y-3z=2 \Rightarrow x+(1-z)-3z=2 \Rightarrow \boxed{x=1+4z}$

Άρα, για $\lambda=1$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+4z\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\\ z\end{bmatrix}$$

δηλαδή:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1/2\\0\end{bmatrix}+\underbrace{z\begin{bmatrix}4\\-1/2\\1\end{bmatrix}}_{\text{γενική λύση του } A\vec{x}=\vec{0}},\ \text{με } z\in\mathbb{R}$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ CRAMER

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κανόνας του Cramer): Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\det A \neq 0$. Τότε η μοναδική λύση του συστήματος $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι το διάνυσμα $\vec{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ με $x_j = \dfrac{\det B_j}{\det A}$, όπου B_j είναι ο πίνακας που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τη j-στήλη του A με το διάνυσμα $\vec{b}$

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} 3x+5y-z&=1\\ x-y+4z&=0\\ 2x+y-7z&=-1\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}3&5&-1\\1&-1&4\\2&1&-7\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Έχουμε: $\det A = \begin{vmatrix}3&5&-1\\1&-1&4\\2&1&-7\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}-1&4\\1&-7\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}1&4\\2&-7\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix} = 81 \neq 0$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση. Για να βρούμε αυτή τη λύση με τη μέθοδο Cramer, χρειαζόμαστε τις ορίζουσες $\det B_j$. Έχουμε:

$$\det B_1 = \begin{vmatrix}1&5&-1\\0&-1&4\\-1&1&-7\end{vmatrix} = -16 \quad , \quad \det B_2 = \begin{vmatrix}3&1&-1\\1&0&4\\2&-1&-7\end{vmatrix} = 28$$

$$\det B_3 = \begin{vmatrix}3&5&1\\1&-1&0\\2&1&-1\end{vmatrix} = 11$$

Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η εξής:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\det B_1}{\det A} = -\dfrac{16}{81}\\[2ex] y = \dfrac{\det B_2}{\det A} = \dfrac{28}{81}\\[2ex] z = \dfrac{\det B_3}{\det A} = \dfrac{11}{81}\end{cases} \qquad \text{δηλ.} \quad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-16/81\\28/81\\11/81\end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν $\det A = 0$ τότε
   - άπειρες λύσεις όταν και $\det B_j = 0 \;\forall\; j = 1, 2, \ldots, n$
   - καμία λύση όταν τουλάχιστον μία $\det B_j \neq 0$

2) Η μέθοδος Cramer δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τη μορφή των άπειρων λύσεων. Δηλαδή, αν $\det A = 0$ και $\det B_j = 0 \;\forall\; j = 1, 2, \ldots, n$ ξέρουμε ότι έχουμε άπειρες λύσεις, αλλά δεν μπορούμε να βρούμε τη μορφή τους (Μειονέκτημα σε σχέση με την απαλοιφή Gauss)

3) Η μέθοδος Cramer εφαρμόζεται μόνο σε συστήματα $n \times n$ ← ΠΡΟΣΟΧΗ!

4) Η μέθοδος Cramer έχει συνήθως περισσότερες πράξεις από την απαλοιφή Gauss

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Γενικά, καλύτερα να χρησιμοποιείτε Απαλοιφή Gauss