ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΤΣΑΓΡΑΚΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΜΕΡΟΣ 3: ***ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ & ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ***

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2009

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ (ή ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ) ΧΩΡΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο $V \neq \emptyset$ είναι πραγματικός διανυσματικός (ή γραμμικός χώρος) αν:

1] Είναι εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη πρόσθεσης, δηλαδή:

$$\boxed{\vec{x}+\vec{y} \in V} \quad , \quad \forall\ \vec{x},\vec{y} \in V$$

με τις ιδιότητες:

α) $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x} \quad , \quad \forall\ \vec{x},\vec{y} \in V$

β) $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) = (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} \quad , \quad \forall\ \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V$

γ) $\exists$ ένα στοιχείο $\vec{0} \in V$ τέτοιο ώστε:

$$\vec{x}+\vec{0} = \vec{x} \quad , \quad \forall\ \vec{x} \in V$$

δ) $\forall\ \vec{x} \in V$, $\exists$ στοιχείο $(-\vec{x}) \in V$ τ.ω.

$$\vec{x}+(-\vec{x}) = \vec{0}$$

<u>ΚΑΙ</u>

2] Είναι εφοδιασμένο με μια εξωτερική πράξη πολλαπλασιασμού των V και $\mathbb{R}$ πάνω στο V (δηλαδή: $V \times \mathbb{R} \to V$)

Συγκεκριμένα: $\boxed{(\lambda\vec{x}) \in V}$, $\forall\ \vec{x} \in V$ και $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

με τις ιδιότητες:

α) $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x}+\mu\vec{x} \quad , \quad \forall\ \vec{x} \in V$ και $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

β) $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y} \quad , \quad \forall\ \vec{x},\vec{y} \in V$ και $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

γ) $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x} \quad , \quad \forall\ \vec{x} \in V$ και $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

δ) $1\vec{x} = \vec{x} \quad , \quad \forall\ \vec{x} \in V$

Σημείωση: Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζονται <u>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

1) Το σύνολο όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων σε ένα διάστημα $[\alpha, b]$

$$C_{[\alpha,b]} : \{ f \setminus f:[\alpha, b] \to \mathbb{R} \text{ και } f \text{ συνεχής} \}$$

2) Κάθε σύνολο $\mathbb{R}^{m\times n}$

π.χ. το $\mathbb{R}^{4\times 3}$ είναι πραγματικός δ.χ.

3) Κάθε σύνολο $\mathbb{R}^n$ (με $n \in \mathbb{N}^*$), το οποίο ορίζεται ως:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} \setminus \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ με } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

π.χ. $\mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{x} \setminus \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ με } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ $\mathbb{R}^n$

Όπως είδαμε παραπάνω ένας δ.χ. $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από <u>όλες</u> τις n-άδες πραγματικών αριθμών της μορφής:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{με } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Για παράδειγμα ο δ.χ. $\mathbb{R}^3$ αποτελείται από όλες τις 3άδες πραγματικων αριθμών της μορφής:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{με } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

<u>Σημείωση:</u> Τα διανύσματα $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ συχνά για λόγους τυπογραφικής οικονομίας γράφονται ως $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

π.χ. το $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ γράφεται και ως $\vec{x} = (-1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ με κόμματα

Άρα, οι δ.χ. $\mathbb{R}^n$ γράφονται και ως:

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{x} \setminus \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ με } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

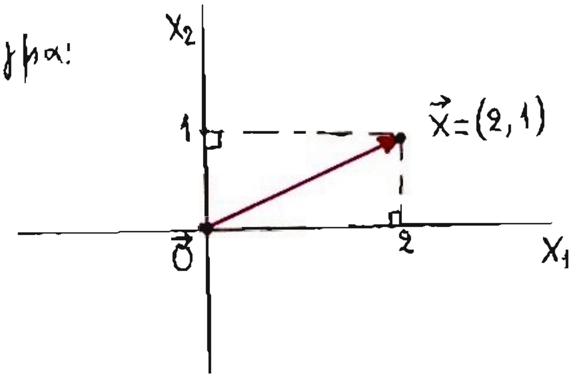
Σημείωση: Οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_n$ ονομάζονται ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ή ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ του $\vec{x}$ (ως προς συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων)

π.χ. το $\vec{x} = (3, -1, 2)$ έχει συντεταγμένες $(3, -1, 2)$ (μ' αυτή τη σειρά).

Σημείωση: Κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ μπορούμε να το φανταζόμαστε ως:

1) "Σημείο" με συντεταγμένες $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
2) "Ευθύγραμμο βέλος" με αρχή το σημείο $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ και τέλος το σημείο $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
3) Διατεταγμένη n-άδα πραγματικών αριθμών

Παράδειγμα:



Το διάνυσμα $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ το φανταζόμαστε είτε ως σημείο με συντεταγμένες $(2,1)$ είτε ως ευθύγραμμο βέλος που έχει αρχή το $\vec{0}$ και τέλος το σημείο με συντεταγμένες $(2,1)$ είτε ως τη διατεταγμένη δυάδα $(2,1)$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

δηλ. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ το άθροισμα $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

π.χ. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$ το $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^4$

Παράδειγμα:
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

δηλαδή $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$, το γινόμενο $\lambda \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

π.χ. αν $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ τότε το $\lambda \vec{x} \in \mathbb{R}^4$

Παράδειγμα: $(-2) \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 2 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$

Σημείωση: Αποδεικνύεται σχετικά εύκολα (άσκηση για το σπίτι) ότι για οποιοδήποτε σύνολο $\mathbb{R}^n$, η πρόσθεση διανυσμάτων και ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό ικανοποιούν τις ιδιότητες του ορισμού ενός διανυσματικού χώρου. Άρα, κάθε $\mathbb{R}^n$ είναι δ.χ.

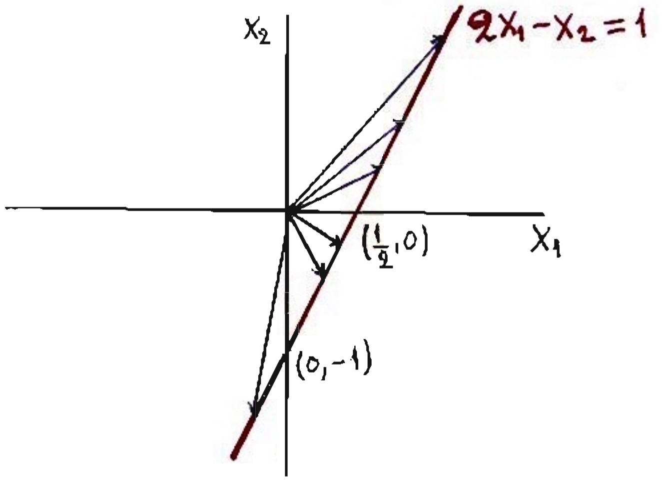
ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}^2$

Έστω ο δ.χ. $\mathbb{R}^2 = \{\vec{x} \setminus \vec{x} = (x_1, x_2)$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Κάθε υποσύνολο $E \subset \mathbb{R}^2$ της μορφής: $E = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma\}$ όπου α, β, γ συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί με τουλάχιστον ένα από τα α και β να είναι διαφορετικό του μηδενός, παριστάνει γεωμετρικά μία ευθεία στον $\mathbb{R}^2$

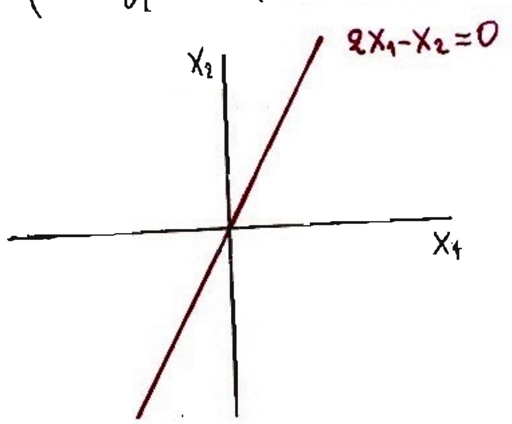
(*) Δηλαδή, κάθε γραμμική αλγεβρική εξίσωση της μορφής $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ με $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ παριστάνει μια ευθεία στον $\mathbb{R}^2$

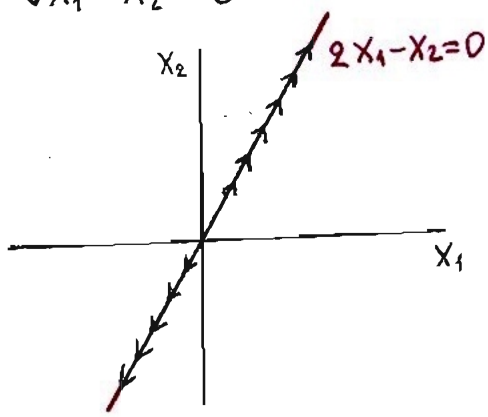
π.χ. Το σύνολο $E = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus 2x_1 - x_2 = 1\}$ παριστάνει την ευθεία $2x_1 - x_2 = 1$. Με άλλα λόγια, το E περιέχει όλα τα σημεία (x_1, x_2) που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $2x_1 - x_2 = 1$, ή ισοδύναμα όλα τα βελάκια με αρχή το $\vec{0} = (0,0)$ και τέλος τα σημεία της ευθείας $2x_1 - x_2 = 1$



η ευθεία $2x_1-x_2=1$
(ως σύνολο σημείων ή βελάκια)

Άλλο παράδειγμα: $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ με $2x_1-x_2=0$





(ως σύνολο σημείων) ή (ως βελάκια)

ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}^3$

Έστω ο δ.χ. $\mathbb{R}^3=\{\vec{x} \setminus \vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ με $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}^3\}$

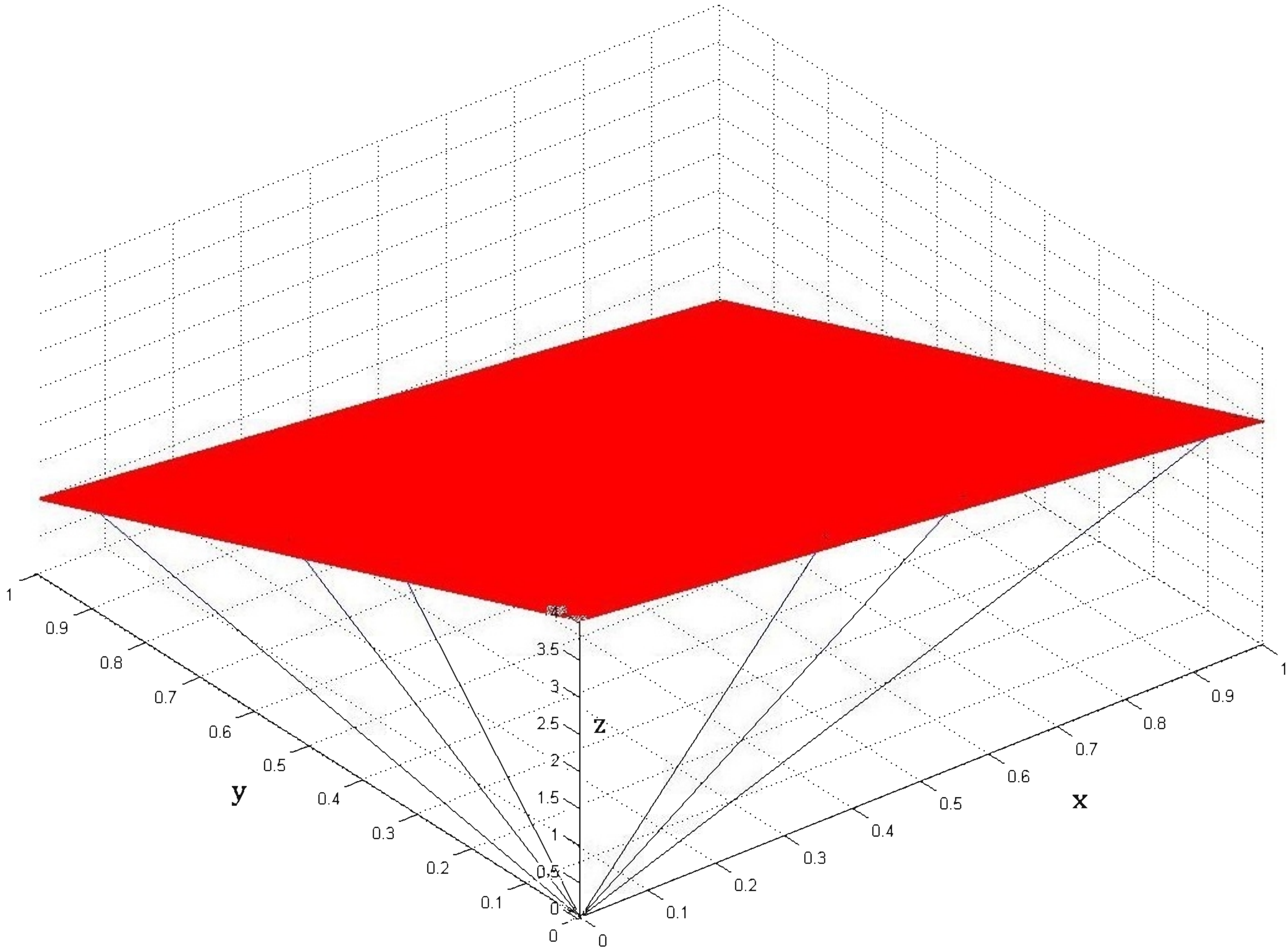
Κάθε υποσύνολο $E\subset\mathbb{R}^3$ της μορφής:

$$E=\{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \setminus \alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3=\delta\}$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ <u>συγκεκριμένοι</u> πραγματικοί αριθμοί με τουλάχιστον ένα από τα α,β,γ διαφορετικό του μηδενός, παριστάνει γεωμετρικά ένα <u>επίπεδο</u> στον χώρο $\mathbb{R}^3$

(*) Δηλαδή, κάθε γραμμική αλγεβρική εξίσωση της μορφής $\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3=\delta$ με $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ παριστάνει ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.

Π.χ. Το σύνολο $E=\{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \setminus x_1+3x_2+x_3=4\}$ παριστάνει το επίπεδο με εξίσωση $x_1+3x_2+x_3=4$. Με άλλα λόγια, το Ε περιέχει όλα τα σημεία (x_1,x_2,x_3) που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο $x_1+3x_2+x_3=4$, ή ισοδύναμα όλα τα βελάκια με αρχή $\vec{O}=(0,0,0)$ και τέλος τα σημεία του επιπέδου $x_1+3x_2+x_3=4$.



ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 4)$

Έστω ο δ.χ. $\mathbb{R}^n = \{\vec{x} \setminus \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ με $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ με $n \geq 4$

Κάθε υποσύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ της μορφής:

$$E = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta\}$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί με τουλάχιστον ένα από τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ να είναι $\neq 0$, παριστάνει ένα υπερεπίπεδο στο χώρο $\mathbb{R}^n$.

(*) Δηλαδή, κάθε γραμμική αλγεβρική εξίσωση $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$ με $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ παριστάνει ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$

π.χ. Το σύνολο $E = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \setminus x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 - x_5 = 4\}$ παριστάνει ένα υπερεπίπεδο με εξίσωση $x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 - x_5 = 4$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κάθε γραμμική αλγεβρική εξίσωση $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$ σε ένα οποιοδήποτε χώρο $\mathbb{R}^n$ παριστάνει ένα "γεωμετρικό αντικείμενο" με "γεωμετρική διάσταση" ίση με $n-1$. Για παράδειγμα:

$2x_1 = 7$ με $x_1 \in \mathbb{R}^1$ παριστάνει το σημείο $x_1 = 7/2$ (διάσταση: 0)

$4x_1 - 3x_2 = -1$ με $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ παριστάνει ευθεία (διάσταση: 1)

$-3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2$ με $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ παριστάνει επίπεδο (διάσταση: 2)

$x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 1$ με $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ παριστάνει υπερεπίπεδο διάστασης 3

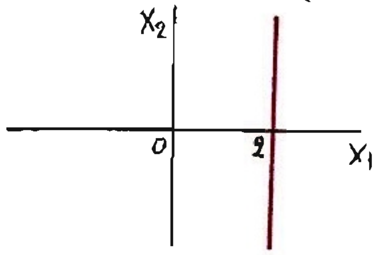
$-2x_1 + x_2 - 7x_3 + 4x_4 - x_5 = 2$ με $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ παριστάνει υπερεπίπεδο διάστασης 4

κ.λ.π.

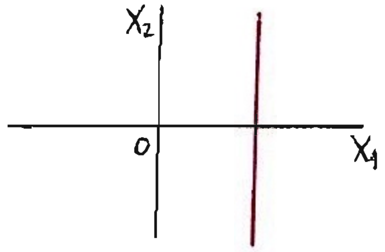
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η ίδια εξίσωση παριστάνει διαφορετικό αντικείμενο σε διαφορετικούς $\mathbb{R}^n$. Για παράδειγμα:

$x_1 = 2$ παριστάνει σημείο στον $\mathbb{R}^1$

$\underbrace{x_1 = 2}_{x_1+0x_2=2}$ παριστάνει ευθεία (παράλληλη στον άξονα x_2) στον $\mathbb{R}^2$



$\underbrace{x_1 = 2}_{x_1+0x_2+0x_3=2}$ παριστάνει επίπεδο (παράλληλο στους άξονες x_2 και x_3) στον $\mathbb{R}^3$



αν θεωρήσουμε τον άξονα x_3 κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού, το $x_1=2$ παριστάνει το επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία $x_1=2$ του επιπέδου Ox_1x_2 και είναι κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού

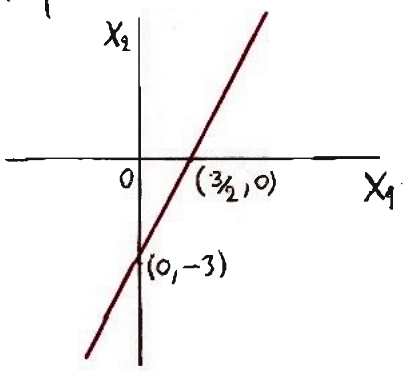
$x_1 = 2$ παριστάνει υπερεπίπεδο διάστασης 3 στον $\mathbb{R}^4$

$x_1 = 2$ » » » 4 στον $\mathbb{R}^5$

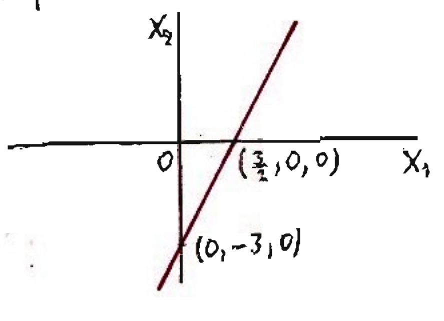
κ.ο.κ.

Άλλο Παράδειγμα:

$2x_1 - x_2 = 3$ παριστάνει ευθεία στον $\mathbb{R}^2$



$\underbrace{2x_1 - x_2 = 3}_{\Updownarrow \; 2x_1 - x_2 + 0x_3 = 3}$ παριστάνει επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$



αν θεωρήσουμε τον άξονα x_3 κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού, το $2x_1 - x_2 = 3$ παριστάνει το επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία $2x_1 - x_2 = 3$ του επιπέδου Ox_1x_2 και είναι κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού

$2x_1 - x_2 = 3$ παριστάνει υπερεπίπεδο διάστασης 3 στον $\mathbb{R}^4$

$2x_1 - x_2 = 3$ >> >> >> 4 στον $\mathbb{R}^5$

κ.ο.κ.

Άλλο Παράδειγμα:

$-2x_1 + x_2 - 5x_3 = 7$ παριστάνει επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$

$-2x_1 + x_2 - 5x_3 = 7$ παριστάνει το υπερεπίπεδο $-2x_1 + x_2 - 5x_3 + 0x_4 = 7$ στον $\mathbb{R}^4$

$-2x_1 + x_2 - 5x_3 = 7$ >> >> >> $-2x_1 + x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 7$ στον $\mathbb{R}^5$

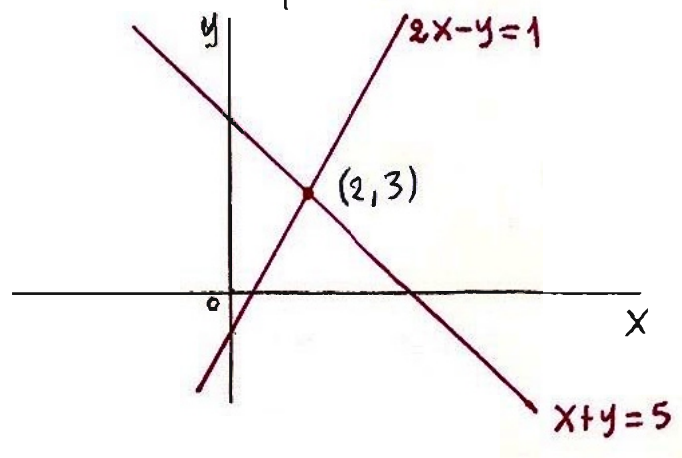
κ.ο.κ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1) ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 2×2 (2 εξισώσεων με 2 αγνώστους)

Π.χ. $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{array}\right\}$ σύστημα 2×2 (2 εξισώσεις με 2 αγνώστους)

Λύση του συστήματος: κάθε ζευγάρι $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιεί και τις 2 εξισώσεις

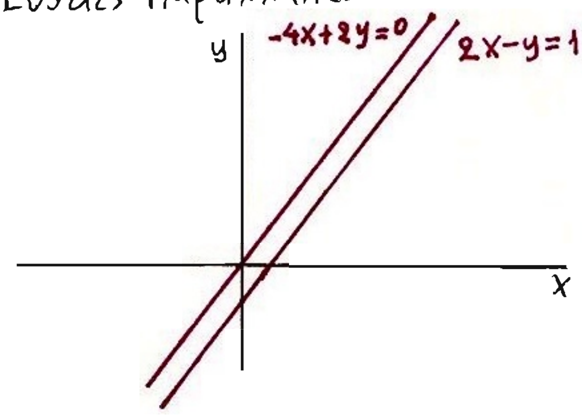


Οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $(2,3)$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $\vec{x} = (2,3) \in \mathbb{R}^2$

2η Περίπτωση: Ευθείες παράλληλες

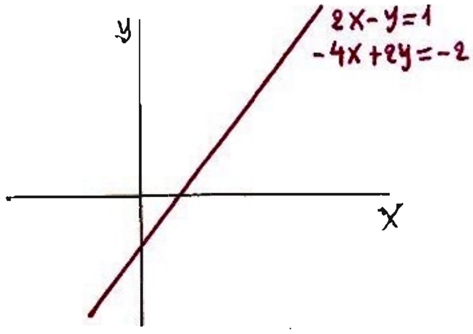
Π.χ. $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = 0 \end{array}\right\}$



Οι ευθείες δεν τέμνονται σε κανένα σημείο και άρα το σύστημα δεν έχει λύση

3η Περίπτωση: Ευθείες που συμπίπτουν

Π.χ. $\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -4x+2y=-2 \end{array}\right\}$



Όλα τα σημεία $\vec{x}=(x,y)$ της ευθείας είναι λύσεις του συστήματος.
Το σύστημα, δηλαδή, έχει <u>άπειρες λύσεις</u>

---

2) ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 2Χ3 (2 εξισώσεων με 3 αγνώστους)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = b_1 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}y = b_2 \end{array}\right\} \text{ σύστημα } 2\times 3$$

όπου α_{ij}, b_i συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί

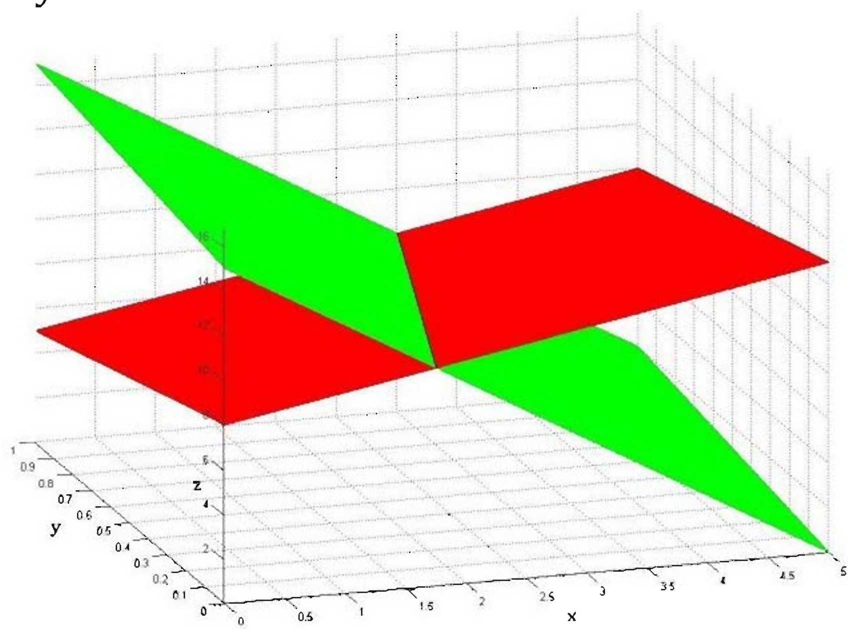
Λύση συστήματος: κάθε τριάδα $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ που ικανοποιεί και τις 2 εξισώσεις

Όπως είδαμε, κάθε εξίσωση του παραπάνω συστήματος περιγράφει ένα επίπεδο στο σ.χ. $\mathbb{R}^3$

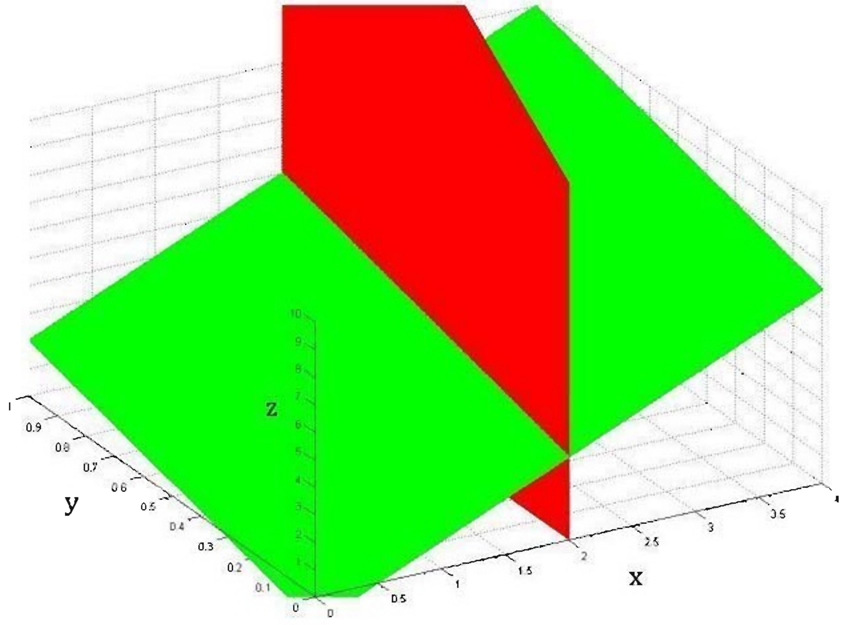
<u>Περιπτώσεις:</u>

α) Τα δύο επίπεδα τέμνονται σε μια <u>ευθεία</u>, και άρα το σύστημα έχει <u>άπειρες λύσεις</u> (όλα τα σημεία (x,y,z) της ευθείας αυτής)

Π.χ. $\left.\begin{array}{l} x-3y-z=-8 \\ 3x-2y+z=15 \end{array}\right\}$

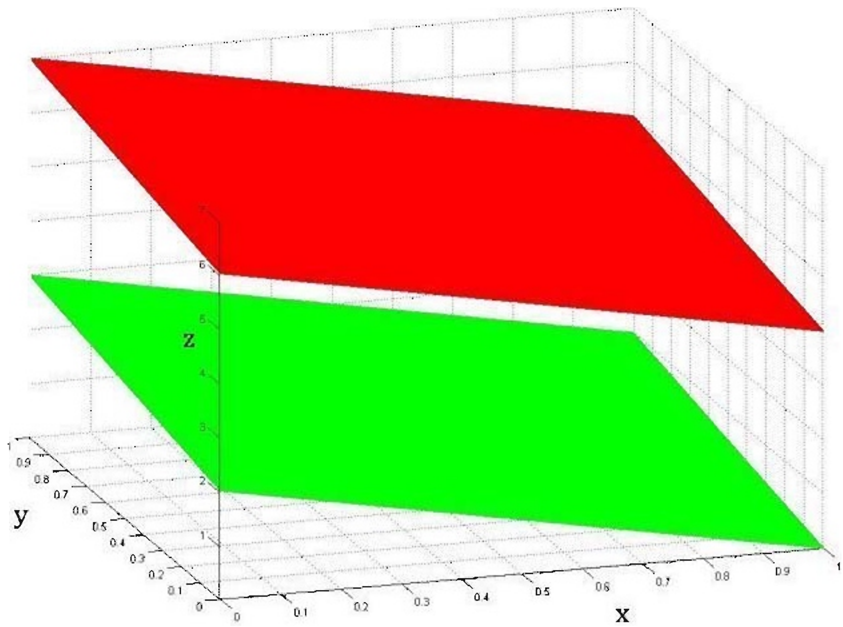


Π.χ. $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=1 \\ -2x=-4 \end{array}\right\}$



β) Τα δύο επίπεδα είναι <u>παράλληλα</u>, και άρα το σύστημα <u>δεν έχει λύση.</u>

Π.χ. $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=6 \\ -4x+2y-2z=-4 \end{array}\right\}$



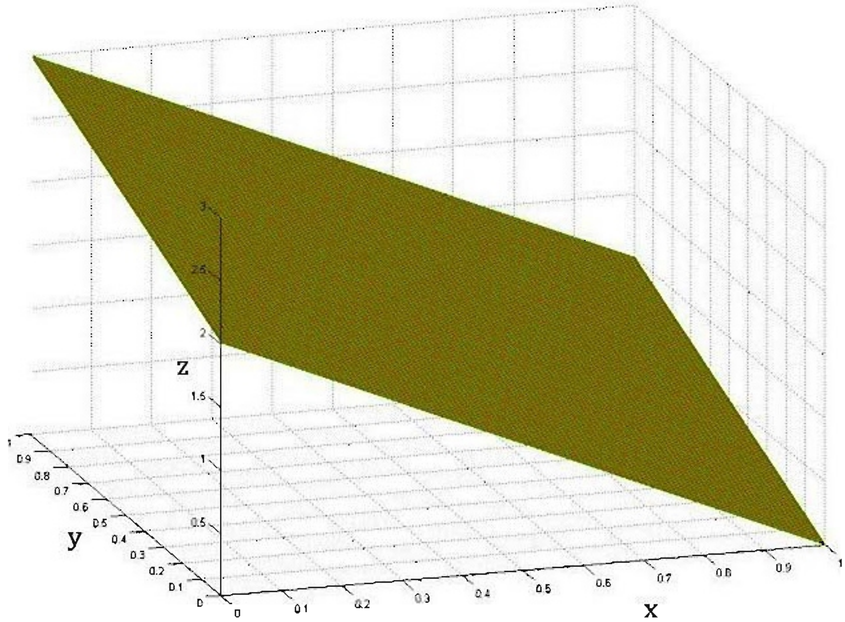
Σημείωση: Γενικά, δύο επίπεδα είναι παράλληλα <u>ανν</u> $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ τ.ω. $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) = \lambda(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$ <u>και</u> $b_1 \neq \lambda b_2$

Για παράδειγμα, στο σύστημα $\left\{\begin{array}{r} 2x-y+z=6 \\ -4x+2y-2z=-4 \end{array}\right\}$ έχουμε:

$(2,-1,1) = -\frac{1}{2}(-4,2,-2)$ και $6 \neq -\frac{1}{2}(-4)$

γ) Τα δύο επίπεδα συμπίπτουν, και άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (όλα τα (x,y,z) του συγκεκριμένου επιπέδου)

Π.χ. $2x-y+z=2$
$-4x+2y-2z=-4$



Σημείωση: Γενικά, δύο επίπεδα συμπίπτουν αvv $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ τ.ω.

$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) = \lambda(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$ και $b_1 = \lambda b_2$

Για παράδειγμα, στο σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=2 \\ -4x+2y-2z=-4 \end{array}\right\}$ έχουμε:

$(2,-1,1) = -\frac{1}{2}(-4,2,-2)$ και $2 = -\frac{1}{2}(-4)$

---

3) ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 3Χ3 (3 εξισώσεις με 3 αγνώστους)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = b_1 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z = b_2 \\ \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z = b_3 \end{array}\right\} \text{σύστημα } 3\times 3$$

όπου α_{ij}, b_i συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί

Λύση του συστήματος: κάθε τριάδα $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ που ικανοποιεί και τις 3 εξισώσεις

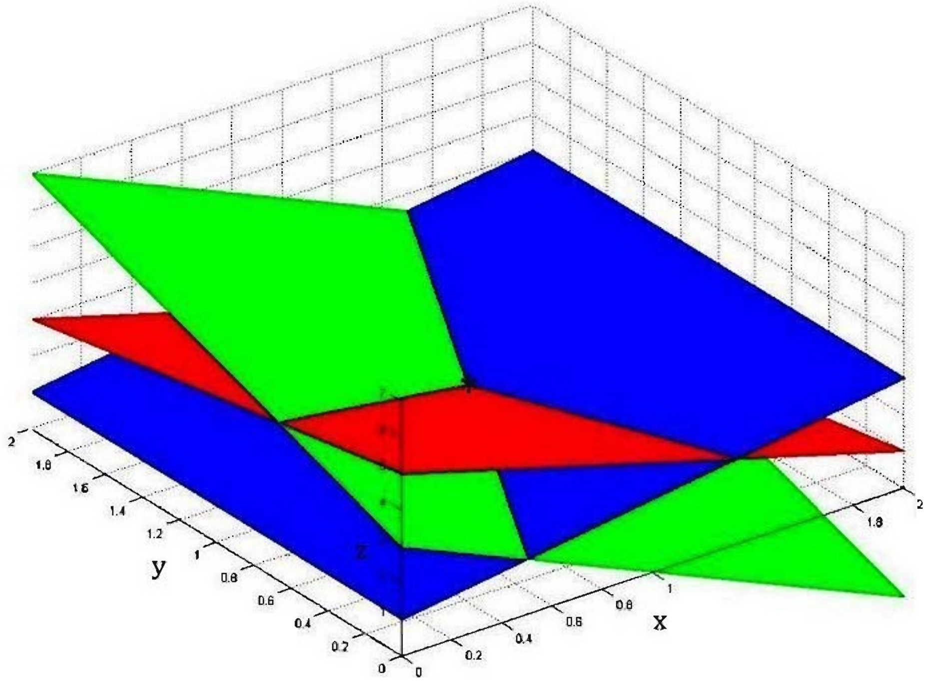
Όπως είδαμε, κάθε εξίσωση του παραπάνω συστήματος αντιπροσωπεύει ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Το σύστημα έχει μοναδική λύση

Τα 3 επίπεδα τέμνονται σε ένα κοινό (και για τα 3) σημείο.
Τότε το σύστημα έχει <u>μοναδική λύση</u>

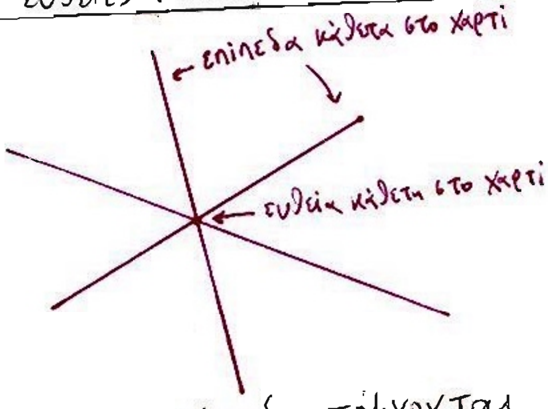
Π.χ. $\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ 3x - 2y + z &= 3 \\ -2x + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$ οποιαδήποτε 2 από τα 3 επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία και το άλλο επίπεδο τέμνει την ευθεία αυτή στο σημείο $\vec{v} = (1,1,2)$

Άρα το $\vec{v} = (1,1,2) \in \mathbb{R}^3$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος

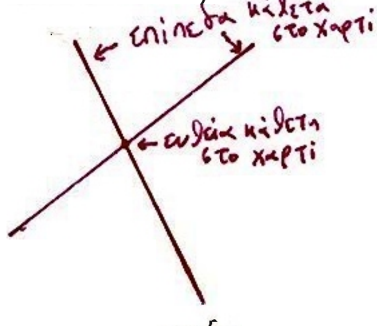


2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

Σημείωση: Για λόγους χειρόγραφης ευκολίας θα θεωρήσουμε επίπεδα κάθετα στο επίπεδο του χαρτιού. Έτσι, στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες γραμμές σημαίνουν επίπεδα κάθετα στο χαρτί, και τα σημεία τομής σημαίνουν ευθείες κάθετες στο χαρτί.



(α) Τα 3 επίπεδα τέμνονται σε μια κοινή ευθεία

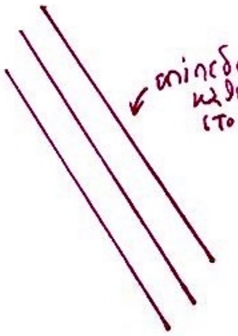


Τα δύο επίπεδα συμπίπτουν και το άλλο τα τέμνει σε μία ευθεία (β)

Τα 3 επίπεδα συμπίπτουν (γ)

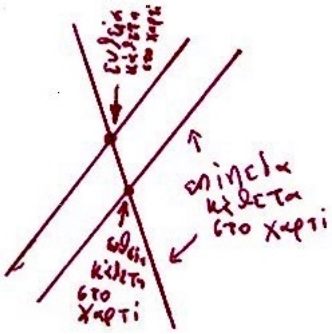
3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Το σύστημα δεν έχει λύση

Σημείωση: Όπως και παραπάνω, για λόγους ευκολίας θεωρούμε επίπεδα κάθετα στο επίπεδο του χαρτιού, οπότε και πάλι έχουμε 3 υποπεριπτώσεις:



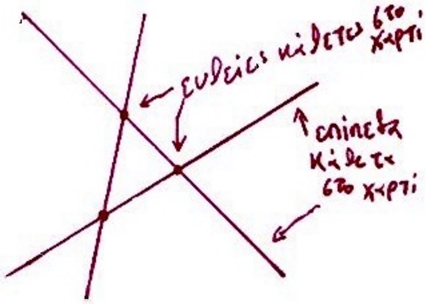
Τα 3 επίπεδα είναι παράλληλα

(α)



δύο επίπεδα παράλληλα και ένα που τα τέμνει σε δύο παράλληλες ευθείες

(β)



Τα 3 επίπεδα τέμνονται ανά δύο σε δύο παράλληλες ευθείες.
(ή ισοδύναμα, κάθε επίπεδο είναι παράλληλο στην ευθεία τομής των άλλων δύο επιπέδων)

(γ)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι παραπάνω περιπτώσεις ισχύουν γενικά (όχι μόνο για επίπεδα κάθετα στο χαρτί).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα 3 επίπεδα: $\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = b_1 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z = b_2 \\ \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z = b_3 \end{array}\right\}$ τέμνονται

σε μία κοινή ευθεία (βλ. περίπτωση 2α) ανν $\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ και $\mu \neq 0$ τ.ω. $(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, b_3) = \lambda(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, b_1) + \mu(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, b_2)$

Π.χ.
$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = -1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 3x - 5y + 10z = -4 \end{array}\right\}$$

έχουμε: $(3, -5, 10, -4) = 2(2, -1, 3, -1) + (-1)(1, 3, -4, 2)$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα 3 επίπεδα: $\begin{cases} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = b_1 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z = b_2 \\ \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z = b_2 \end{cases}$ τέμνονται

ανά δύο σε δύο παράλληλες ευθείες (βλ. περίπτωση 3γ) ανν $\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ και $\mu \neq 0$ τ.ω.

$(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) = \lambda(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) + \mu(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$, αλλά

$b_3 \neq \lambda b_1 + \mu b_2$

Π.χ. $\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -1 \\ x + 3y - 4z &= 2 \\ 3x - 5y + 10z &= 5 \end{aligned}\right\}$

έχουμε: $(3, -5, 10) = 2(2, -1, 3) + (-1)(1, 3, -4)$

αλλά $\quad 5 \neq 2(-1) + (-1)2$