ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΤΣΑΓΡΑΚΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΜΕΡΟΣ 2: ***ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ***

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2009

ΕΛΑΣΣΩΝ ΠΙΝΑΚΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω τετραγωνικός πίνακας $A=[\alpha_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Για κάθε στοιχείο α_{ij}, υπάρχει ένας πίνακας $(n-1)\times(n-1)$ ο οποίος προκύπτει αν διαγράψουμε την i-γραμμή και τη j-στήλη. Αυτός ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας ονομάζεται ελάσσων πίνακας του στοιχείου α_{ij} και συμβολίζεται A_{ij}

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

π.χ. $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 8 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ τότε: $A_{11}=\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$,

$A_{13}=\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{21}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_{22}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, $A_{23}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$,

$A_{31}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $A_{32}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A_{33}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

ΟΡΙΖΟΥΣΑ n x n ΠΙΝΑΚΑ (Ορίζουσα n-οστής τάξης)

Συμβολισμοί: $D(A)$, $\det A$, $\det(A)$, $|A|$

- $n=1$ (ορίζουσα 1ης τάξης): Έστω $A=[\alpha]$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε: $\det A=\alpha$

  π.χ. $A=[-3]$ τότε $\det A=-3$

• $n=2$ (ορίζουσα 2ης τάξης): Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$ με $\alpha, b, c, d \in \mathbb{R}$

Τότε: $\det A = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha d - cb$ ← προσοχή στο συμβολισμό της ορίζουσας (δύο κατακόρυφες γραμμές)

Π.χ. $A=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ τότε $\det A = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-4)3 - 2(-1) = -10$

• $n \geq 3$: Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$. Τότε:

α) $\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \{\text{ορίζουσα ως προς τη γραμμή } i\} =$

$$= (-1)^{i+1}\alpha_{i1}\det A_{i1} + (-1)^{i+2}\alpha_{i2}\det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}\alpha_{in}\det A_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det A_{ij}$$

β) $\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \{\text{ορίζουσα ως προς τη στήλη } j\} =$

$$= (-1)^{1+j}\alpha_{1j}\det A_{1j} + (-1)^{2+j}\alpha_{2j}\det A_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}\alpha_{nj}\det A_{nj} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det A_{ij}$$

<u>Σημείωση</u>: Η ορίζουσα του A είναι ίδια ως προς οποιαδήποτε στήλη j και ως προς οποιαδήποτε γραμμή i και να την υπολογίσουμε. Γενικά, "βολεύει" να την υπολογίζουμε ως προς στήλη ή γραμμή που έχει τα περισσότερα μηδενικά.

<u>Παράδειγμα 1</u>: $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 8 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ Πρόσημα: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

$$\det A = -7\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-7)(-15-2) + 3(-12+8) - 2(-8-40) = 119 - 12 + 96 = 203$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε εάν υπολογίσουμε την $\det A$ ως προς οποιαδήποτε άλλη γραμμή ή οποιαδήποτε στήλη. Για παράδειγμα, ως προς την 1η στήλη θα έχουμε:

$$\det A = 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-9+4) - 7(-15-2) + 8(10+3) = -20 + 119 + 104 = 203$$

<u>Παράδειγμα 2:</u>

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{Πρόσημα: } \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

"Βολεύει" να υπολογίσουμε την $\det A$ ως προς την 3η στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά. Έχουμε:

$$\det A = (-1)\begin{vmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -7 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\left\{6\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\right\} -$$

$$- 2\left\{-7\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right\} = (-1)\left\{6(-16-12) - 4(8-20) -\right.$$

$$\left. - 5(3+10)\right\} - 2\left\{-7(16-10) - 3(24+5)\right\} =$$

$$= -(168 + 48 - 65) - 2(-42 - 87) = -151 + 258 = 107$$

ΣΥΜΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ: Ο αριθμός $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ ονομάζεται <u>Αλγεβρικό Συμπλήρωμα</u> ή <u>Συμπαράγοντας</u> του στοιχείου a_{ij}

Άρα: $$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \qquad \begin{matrix} \forall\ i = 1, \ldots, n \\ \forall\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ SARRUS: Για 3×3 πίνακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά ο κανόνας του Sarrus:

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32}\\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det A=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-$$
$$-\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}-\alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}$$

π.χ. $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & -1\\ 7 & 3 & 2\\ 8 & -2 & -3\end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 4 & 5 & -1 & 4 & 5\\ 7 & 3 & 2 & 7 & 3\\ 8 & -2 & -3 & 8 & -2\\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det A=4\cdot3(-3)+5\cdot2\cdot8+(-1)\cdot7\cdot(-2)-8\cdot3\cdot(-1)-(-2)\cdot2\cdot4-(-3)\cdot7\cdot5=$$
$$=-36+80+14+24+16+105=203$$

Παρατήρηση: Η det απεικονίζει πίνακες σε αριθμούς. Συγκεκριμένα,

$$\det:\mathbb{R}^{n\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Έστω $A=[\alpha_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$

1) {Αν Α έχει μηδενική γραμμή ή μηδενική στήλη} τότε: $\det A=0$

2) {Αν Α έχει 2 τουλάχιστον ίδιες γραμμές ή 2 τουλάχιστον ίδιες στήλες}
τότε: $\det A=0$

3) Αν μία τουλάχιστον γραμμή ή στήλη ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι πολλαπλάσιο μίας άλλης γραμμής (ή αντίστοιχα στήλης) του A, τότε: detA = 0

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \\ -5 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

έχουμε detA = 0, γιατί η 3η γραμμή είναι ίση με (-5) επί την 1η γραμμή

4) Αν στον A εναλλάξουμε 2 γραμμές (ή 2 στήλες) τότε προκύπτει ένας πίνακας B με $\det B = -\det A$

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \text{εναλλαγή} \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} = B$$

$\det A = 236$ ενώ $\det B = -236$

5) Αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή (ή μία στήλη) του A με έναν αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε προκύπτει ένας πίνακας B με $\det B = \lambda \det A$

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -6 & -16 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} = B$$

$\det A = 236$, ενώ $\det B = -472 = (-2)236$

6) $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det A}$, $\forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} , \quad (-2)A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -16 \\ 8 & -2 & -4 \\ -4 & 12 & -8 \end{bmatrix}$$

$\det A = 236$ ενώ $\det[(-2)A] = -1888 = (-2)^3 \cdot 236$

7) Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του A με ένα πραγματικό αριθμό και τα προσθέσουμε σε μία άλλη γραμμή (ή στήλη αντίστοιχα) τότε προκύπτει ένας πίνακας B με

$$\det B = \det A$$

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \leftarrow (+) \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = B$$

$$\left.\begin{matrix} \det A = -28 \\ \det B = -28 \end{matrix}\right\} \text{δηλ. } \det B = \det A$$

8) $\boxed{\det(A^T) = \det A}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

9) Αν ο A είναι τριγωνικός ή διαγώνιος, τότε $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ (δηλ. το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου)

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 7(-3)(-2) = 42$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 4 \cdot 1 \cdot 5 = 20$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 6 \cdot 1 \cdot 7 = 42$$

Πόρισμα: $\boxed{\det I_n = 1}$

10) $\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B)}$, $\forall\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Πόρισμα: Αν A αντιστρέψιμος τότε: $AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det I_n \Rightarrow$

$\Rightarrow (\det A)(\det A^{-1}) = 1 \Rightarrow \boxed{\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}}$

π.χ. αν $\det A = -3$ τότε $\det A^{-1} = -\dfrac{1}{3}$

11) Γενικά: $\boxed{\det(A+B) \neq \det A + \det B}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $A+B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

Τότε: $\det A = 17$, $\det B = 14$, $\det(A+B) = 65 \neq 17 + 14$

12) $\boxed{\{A \text{ είναι αντιστρέψιμος}\} \text{ ανν } \det A \neq 0}$ *** $\left\{\begin{matrix}\text{κριτήριο} \\ \text{ύπαρξης του } A^{-1}\end{matrix}\right\}$

π.χ. Έστω $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$. Έχουμε $\det A = 0$ και άρα $\nexists\ A^{-1}$

Έστω $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$. Έχουμε $\det B = -4 \neq 0$ και άρα $\exists\ B^{-1}$ που μπορούμε να βρούμε (π.χ.) με τη μέθοδο Gauss-Jordan

13) Αν τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης του A) γραφτούν ως αθροίσματα p προσθετέων το καθένα, τότε η ορίζουσα του A ισούται με το άθροισμα p οριζουσών των οποίων η γραμμή (ή στήλη) που περιέχει τα αθροίσματα, έχει ως στοιχεία έναν από τους p προσθετέους ενώ οι υπόλοιπες $(n-1)$ γραμμές (ή αντίστοιχα στήλες) παραμένουν ίδιες.

π.χ. Η ορίζουσα του $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 12 & 7\\ 6 & 5 & -2\end{bmatrix}$ μπορεί να γραφτεί

ως: $$\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 12 & 7\\ 6 & 5 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 8-5+1-6 & 1\\ 0 & 2+3+5+2 & 7\\ 6 & -2+9-3+1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 8 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 6 & -2 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & -5 & 1\\ 0 & 3 & 7\\ 6 & 9 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 7\\ 6 & -3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & -6 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 6 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Από τις ιδιότητες (4) και (7) συμπεραίνουμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε απαλοιφές για να μετατρέψουμε έναν πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ σε ένα άνω τριγωνικό πίνακα $U\in\mathbb{R}^{n\times n}$ τότε $\boxed{\det A=(-1)^k\det U}$ **

όπου k είναι το πλήθος εναλλαγών γραμμών που χρησιμοποιήθηκε στη διαδικασία απαλοιφής από τον A στον U.
Επειδή U είναι άνω τριγωνικός, θα έχουμε επίσης ότι:

$$\det A=(-1)^k\cdot\{\text{γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του } U\}$$

Σημείωση: Αυτός ο τρόπος υπολογισμού της $\det A$ είναι πιο πρακτικός, κυρίως για μεγάλα n.

Παράδειγμα:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -3 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 6 & -2\\ 3 & -5 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 7 & 1\end{bmatrix}\ \text{εναλλαγή} \longrightarrow \begin{array}{c}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 6 & -2\\ 0 & -3 & 1 & 4\\ 3 & -5 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 7 & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{cc}3 & 2\\ & \\ (+) & \\ & (+)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 19 & -9 \\ 0 & 0 & 19 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2/3) \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 55/3 & -\frac{35}{3} \\ 0 & 0 & 19 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-57/55) \\ \leftarrow \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 55/3 & -35/3 \\ 0 & 0 & 0 & 100/11 \end{bmatrix} = U$$

Άρα: $\det A = (-1)^1 \det U \Rightarrow \det A = (-1) \cdot \left\{ (-1)(-3) \frac{55}{3} \frac{100}{11} \right\} = -500$

ADJOINT ΠΙΝΑΚΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας με στοιχεία $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ (δηλαδή, ο πίνακας που περιέχει τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A). Ο ανάστροφος του C, δηλαδή ο C^T ονομάζεται προσαρτημένος ή συζυγής ή adjoint του A και συμβολίζεται $\operatorname{adj} A$ ή $\operatorname{adj}(A)$

δηλαδή:

$$\operatorname{adj} A = C^T = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{1+2}\det A_{12} & \cdots & (-1)^{1+n}\det A_{1n} \\ (-1)^{2+1}\det A_{21} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \cdots & (-1)^{2+n}\det A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{n1} & (-1)^{n+2}\det A_{n2} & \cdots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ADJOINT

1) $\boxed{\det(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-1}}$ $\quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$ όπου $\det A = 2$. Άρα: $\det(\mathrm{adj}A) = 2^2 = 4$

μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του adjA χωρίς να βρούμε τον ίδιο τον adjA

2) $\boxed{\mathrm{adj}(A^T) = (\mathrm{adj}A)^T}$ $\quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

3) $\boxed{\mathrm{adj}(AB) = (\mathrm{adj}A)(\mathrm{adj}B)}$ $\quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\boxed{A(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A)A = (\det A)I_n}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $\det A \neq 0$, τότε $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A}$ *** Άλλος τρόπος υπολογισμού του A^{-1}

(χρειάζεται περισσότερες συνήθως πράξεις από τη μέθοδο Gauss-Jordan)

Παράδειγμα:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$. Έχουμε: $\det A = 2 \neq 0$, άρα $\exists A^{-1}$, τον οποίο

θα υπολογίσουμε από τη σχέση $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A$, όπου

$$\mathrm{adj}A = C^T = \begin{bmatrix} \det A_{11} & -\det A_{12} & \det A_{13} \\ -\det A_{21} & \det A_{22} & -\det A_{23} \\ \det A_{31} & -\det A_{32} & \det A_{33} \end{bmatrix}^T$$

Έχουμε:

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -10 \quad , \quad \det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 2 \quad ,$$

$$\det A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad , \quad \det A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 8 \, ,$$

$$\det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \det A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \, ,$$

$$\det A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \, , \quad \det A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \, ,$$

$$\det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

προσοχή (ανάστροφος)

Άρα: $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -10 & -2 & -4 \\ -8 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

και $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -10 & -8 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$