ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΤΣΑΓΡΑΚΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ-119)

ΜΕΡΟΣ 1: ***ΠΙΝΑΚΕΣ***

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2009

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΗΥ 119)

Ιστοσελίδα: http://www.tem.uoc.gr/~itsagrakis/teaching.html

Βιβλία:
- Ν. Καδιανάκης & Σ. Καρανάσιος, Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία & Εφαρμογές, Αθήνα 2003.
- Gilbert Strang, Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές, Π.Ε.Κ., 1996

Γραμμική Άλγεβρα: ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ κομμάτι των Μαθηματικών, απαραίτητη στις θετικές επιστήμες

Εφαρμογές: Φυσική, Επιστήμη υπολογιστών, Μηχανική, Βιολογία, κλπ

Αντικείμενο: Γραμμικοί χώροι (κυρίως οι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ γραμμικών χώρων)

ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός: (πραγματικός) Πίνακας $m \times n$ (m επί n) ή πίνακας με m γραμμές και n στήλες είναι μια ορθογώνια διάταξη mn πραγματικών αριθμών της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

όπου $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ονομάζονται ΣΤΟΙΧΕΙΑ του πίνακα A (α_{ij} είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην γραμμή i και τη στήλη j)

Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 4 \\ \sqrt{2} & -5/2 & 0 \end{bmatrix}$$

πίνακας 2×3

όπου $\alpha_{11} = 7$, $\alpha_{12} = -2$, $\alpha_{13} = 4$, $\alpha_{21} = \sqrt{2}$, $\alpha_{22} = -5/2$, $\alpha_{23} = 0$

Σημείωση: Για συντομία πολλές φορές γράφουμε $A = [\alpha_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots m$, $j = 1, 2, \ldots n$

Σχόλιο: Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς συμβολίζεται ως $\mathbb{R}^{m \times n}$ ή $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ή $gl(m \times n, \mathbb{R})$

π.χ. Το σύνολο $\mathbb{R}^{5\times 2}$ αποτελείται από όλους τους πραγματικούς πίνακες που έχουν 5 γραμμές και 2 στήλες.

Στοιχεία κύριας διαγωνίου: $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{\kappa\kappa}$, όπου $\kappa = \min(m,n)$

π.χ.
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 7 & 8 & -3 \end{bmatrix} \qquad \alpha_{11} = 5, \quad \alpha_{22} = 8$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_{11} = 8, \quad b_{22} = 7$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ \sqrt{2} & 8 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \qquad \gamma_{11} = -3, \quad \gamma_{22} = -5, \quad \gamma_{33} = \sqrt{5}$$

Σχόλιο: Όταν $m = n \rightarrow$ <u>ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ</u>

π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ πίνακας 2×2

$\begin{bmatrix} -6 & 7 & \sqrt{5} \\ 4 & 3 & 8 \\ \frac{5}{8} & -\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$ πίνακας 3×3

Σχόλιο: Όταν $m = 1 \rightarrow$ πίνακας-γραμμή

π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow 1\times 4$

Σχόλιο: Όταν $n = 1 \rightarrow$ πίνακας-στήλη

π.χ. $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \\ -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow 5\times 1$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $A=[\alpha_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, $\begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}$ πίνακες $m\times n$

Άθροισμα: $A+B$ είναι πίνακας $m\times n$ με στοιχεία της μορφής

$\alpha_{ij}+b_{ij}$

π.χ. $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 8 & -7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 5 \\ 10 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Πρόσθεση ορίζεται <u>ΜΟΝΟ</u> μεταξύ πινάκων ΙΔΙΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ !!

π.χ. σε ένα πίνακα 7×4 μπορούμε να προσθέσουμε <u>μόνο</u> πίνακα επίσης 7×4.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1) Προσεταιριστική ιδιότητα: $(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)$, $\forall A,B,\Gamma \in \mathbb{R}^{m\times n}$
2) Αντιμεταθετική ιδιότητα: $A+B=B+A$, $\forall A,B \in \mathbb{R}^{m\times n}$
3) Ύπαρξη Ουδέτερου στοιχείου (μηδενικός πίνακας $\mathbf{0}$)

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$

π.χ. $\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ μηδενικός πίνακας 2×3

4) Ύπαρξη Αντιθέτου: $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\exists (-A) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

τ.ω. $A+(-A)=\mathbf{0}$

π.χ. $A=\begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 2 & -12 & 5 \end{bmatrix}$ τότε $(-A)=\begin{bmatrix} -8 & -4 & 3 \\ -2 & 12 & -5 \end{bmatrix}$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } A=[\alpha_{ij}] \text{ πίνακας } m\times n \\ \text{και } \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{ τότε } \lambda A = [\lambda \alpha_{ij}] \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{array}$$

Π.χ.
$$2\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 10 & 2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες

1) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A \quad , \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad , \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$
2) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \quad , \quad \forall A,B \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad , \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad , \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$
4) $1A = A \quad , \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, τότε το γινόμενο AB είναι ένας πίνακας $\Gamma \in \mathbb{R}^{m\times k}$ με στοιχεία $\gamma_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} b_{lj}$

(δηλ. το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων της γραμμής i του A με της στήλης j του B)

Π.χ.
$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} \end{bmatrix}$$

πίνακας 3×4 $\qquad$ 4×2 $\qquad$ 3×2

ΠΡΟΣΟΧΗ !!: Το γινόμενο AB ορίζεται ΜΟΝΟ όταν το πλήθος των στηλών του A είναι ίσο με το πλήθος γραμμών του B. !!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & \sqrt{3} \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} =$$

4×3 $\quad$ 3×2

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot 1 + (\sqrt{2})\cdot 3 + 7\cdot 5 & 4\cdot 7 + (\sqrt{2})4 + 7\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 + (-2)\cdot 5 & 0\cdot 7 + 1\cdot 4 + (-2)2 \\ 6\cdot 1 + 0\cdot 3 + \sqrt{3}\cdot 5 & 6\cdot 7 + 0\cdot 4 + (\sqrt{3})\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 4\cdot 3 + 8\cdot 5 & (-1)\cdot 7 + 4\cdot 4 + 8\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39+3\sqrt{2} & 42+4\sqrt{2} \\ -7 & 0 \\ 6+5\sqrt{3} & 42+2\sqrt{3} \\ 51 & 25 \end{bmatrix}$$

4×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 7\cdot 3 + 4\cdot 8 + 1\cdot 7 \\ 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 0\cdot 8 + 2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(2×4) $\quad$ (4×1) $\quad$ (2×1)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΙΝΑΚΩΝ

1) Έστω $A\in\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$ και $B,\Gamma\in\mathbb{R}^{\nu\times\kappa}$

Τότε $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$ (επιμεριστική ιδιότητα)

2) Έστω $A\in\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$, $B\in\mathbb{R}^{\nu\times\kappa}$, $\Gamma\in\mathbb{R}^{\kappa\times\rho}$

Τότε: $(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

3) Γενικά, <u>ΔΕΝ</u> ισχύει η αντιμετάθεση

δηλ. $AB \neq BA$ (εφόσον ορίζεται)

$\underbrace{(m \times n)(n \times k)}_{m \times k}$ $\quad (n \times k)(m \times n)$ ορίζεται μόνο όταν $k = m$

π.χ. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 6 & 10 \\ 48 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$(2 \times 3) \quad (3 \times 3) \quad \rightarrow \quad (2 \times 3)$

Όμως, το BA δεν ορίζεται αφού $(3 \times 3)(2 \times 3)$ όχι ίδια

παράδειγμα 2: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 5 \\ 61 & 4 \end{bmatrix}$

$(2 \times 3) \quad (3 \times 2) \quad \rightarrow \quad (2 \times 2)$

ενώ $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 8 & 32 & 24 \\ 1 & 34 & 17 \end{bmatrix}$

$(3 \times 2) \quad (2 \times 3) \quad \rightarrow \quad (3 \times 3)$

παράδειγμα 3: $AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 22 & 6 \end{bmatrix}$

ενώ $BA = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -8 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

ΥΨΩΣΗ ΣΕ ΦΥΣΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ: $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{\text{k φορές}}$ όπου $k \in \mathbb{N}$

π.χ. $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, $A^4 = AAAA$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ τότε γενικά: $\boxed{(AB)^2 \neq A^2B^2}$

↑ΠΡΟΣΟΧΗ

$$\left[(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B \underset{\uparrow \text{γενικά}}{\neq} A(AB)B = (AA)(BB) = A^2B^2\right]$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ένας πίνακας A είναι τετραγωνικός τύπου n όταν είναι $n\times n$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι τετραγωνικός τύπου 2

ΙΧΝΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε το <u>ίχνος</u> του A ορίζεται ως: $tr(A) = trace(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}$

(δηλ. το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου)

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ τότε $tr(A) = 5 + 6 + (-1) = 10$

$B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}$ τότε $tr(B) = 8 + (-11) = -3$

ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ: {Πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ονομάζεται διαγώνιος} ανν $\{\alpha_{ij} = 0$ όταν $i \neq j\}$

(δηλ. όλα τα στοιχεία έξω από την κύρια διαγώνιο είναι 0)

π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ n (Συμβολισμός: I_n)

Είναι ο $n \times n$ διαγώνιος πίνακας με $(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i=j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases}$

δηλ. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, κ.ο.κ.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ: $\boxed{A I_n = I_n A = A}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Επίσης, $A I_n = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

και $I_n A = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times k}$

ΑΝΩ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ:

Ένας πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται άνω τριγωνικός ανν $\{\alpha_{ij} = 0$ όταν $i > j\}$

(δηλ. όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0)

π.χ. $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & -8 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

ΚΑΤΩ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ:

Ένας πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται κάτω τριγωνικός ανν $\{\alpha_{ij} = 0$ όταν $i < j\}$

(δηλ. όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0) π.χ. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ: ανν {είναι άνω ή κάτω τριγωνικός}

ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Ορισμός: Ένας <u>τετραγωνικός</u> πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος εάν $\exists$ <u>τετραγωνικός</u> πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τ.ω.

$$BA = I \quad \text{και} \quad AB = I$$

Σ' αυτήν την περίπτωση ο B ονομάζεται <u>αντίστροφος</u> του A και συμβολίζεται A^{-1}

δηλ. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

<u>Σχόλιο:</u> Δεν είναι όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντιστρέψιμοι (θα δούμε παρακάτω σχετικά κριτήρια)

<u>Πρόταση:</u> Αν A αντιστρέψιμος, τότε <u>A^{-1} μοναδικός</u>

Παρατήρηση: Αν A αντιστρέψιμος, τότε $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Το άθροισμα $A+B$ μπορεί να είναι ή όχι αντιστρέψιμος, ανεξάρτητα από την αντιστρεψιμότητα των A και B.

$\left\{\begin{array}{l}\text{δηλ. μπορεί να υπάρχουν τα } A^{-1} \text{ και } B^{-1} \text{ αλλά όχι το } (A+B)^{-1} \\ \text{ή μπορεί να υπάρχει το } (A+B)^{-1} \text{ αλλά όχι τα } A^{-1}, B^{-1} \\ \text{ή μπορεί να υπάρχουν και τα } A^{-1}, B^{-1} \text{ και το } (A+B)^{-1} \\ \text{ή μπορεί να μην υπάρχει ούτε το } A^{-1} \text{ ούτε το } B^{-1} \text{ ούτε το } (A+B)^{-1} \\ \text{κ.ο.κ.}\end{array}\right\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\{A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι$\} \Rightarrow \{AB$ αντιστρέψιμος με $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}\}$

ΓΕΝΙΚΑ: $\{A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι$\} \Rightarrow \{(A_1A_2\ldots A_m)$ αντιστρέψιμος με $(A_1A_2\ldots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}\}$

π.χ. $\{A, B, \Gamma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι$\}$ τότε $\boxed{(AB\Gamma)^{-1} = \Gamma^{-1}B^{-1}A^{-1}}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$, τότε: $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου άνω (ή κάτω) τριγωνικού πίνακα είναι επίσης άνω (ή, αντίστοιχα, κάτω) τριγωνικός

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & -1/6 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ 9/28 & 6/7 & 1/7 \end{bmatrix}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\{A$ αντιστρέψιμος$\} \Rightarrow A^{-k} = (A^{-1})^k \ , \ \forall \ k \in \mathbb{N}$

π.χ. $A^{-3} = (A^{-1})^3 = A^{-1}A^{-1}A^{-1}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με μία τουλάχιστον στήλη (ή γραμμή) μηδενικών <u>δεν</u> είναι αντιστρέψιμος.

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ τότε οποιονδήποτε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ και να πολλ/σουμε με τον A θα έχουμε:

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2b_{11}+3b_{12}-b_{13} & 0 & 4b_{11}-b_{12}+7b_{13} \\ 2b_{21}+3b_{22}-b_{23} & 0 & 4b_{21}-b_{22}+7b_{23} \\ 2b_{31}+3b_{32}-b_{33} & 0 & 4b_{31}-b_{32}+7b_{33} \end{bmatrix}}_{\neq I_3, \ \forall \ B \in \mathbb{R}^{3\times3}}$$

Άρα, $\nexists A^{-1}$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ

1) $\{ A = [\alpha] \in \mathbb{R}^{1\times1}$ είναι αντιστρέψιμος$\}$ ανν $\alpha \neq 0$, τότε $A^{-1} = [1/\alpha]$

π.χ. $A = [5] \Rightarrow A^{-1} = [1/5]$

$B = [2/3] \Rightarrow B^{-1} = [3/2]$

$\Gamma = [0] \Rightarrow \nexists \Gamma^{-1}$

2) $\left\{ A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}\right.$ είναι αντιστρέψιμος$\}$ ανν $\{ \underbrace{\alpha d - cb}_{\substack{\text{ορίζουσα} \\ \text{του } A \\ \text{συμβολισμός: } \det A}} \neq 0 \}$

Τότε: $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha d - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ έχουμε $\det A = 5\cdot4 - 8(-2) = 36 \neq 0$, άρα $\exists A^{-1}$

και είναι $A^{-1} = \dfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/36 & 2/36 \\ -8/36 & 5/36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/18 \\ -2/9 & 5/36 \end{bmatrix}$

3) {ένας διαγώνιος πίνακας $n \times n$ είναι αντιστρέψιμος} ανν {όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι $\neq 0$}. Σ' αυτήν την περίπτωση,

αν $A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$, τότε $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \nexists \, \Gamma^{-1}$$

Παρατήρηση: $I_n^{-1} = I_n$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS-JORDAN

Συνοπτικά: Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid I_n]$. Προσθέτουμε κατάλληλα πολλαπλάσια μιας γραμμής σε μία άλλη. Κάνουμε εναλλαγές γραμμών όποτε χρειάζεται. Σκοπός μας σε πρώτο στάδιο να καταλήξουμε σε έναν πίνακα της μορφής $[U \mid B]$ όπου U άνω κλιμακωτός με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο, και σε δεύτερο στάδιο σε έναν πίνακα της μορφής $[I_n \mid \Gamma]$. Τότε ο Γ είναι ο A^{-1} (το γιατί θα εξηγηθεί σε επόμενο μάθημα που αφορά την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων)

Παράδειγμα 1

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

$$\left[A \mid I_4\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1/2 & 1/2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Βήματα

1) Εξετάζουμε αν το στοιχείο στη θέση (1,1) είναι $\neq 0$. Αν δεν είναι, τότε εναλλάσσουμε την 1η γραμμή με μία από τις πιο κάτω από αυτήν γραμμές, έτσι ώστε στη θέση (1,1) να έχουμε μη-μηδενικό στοιχείο. Το μη-μηδενικό στοιχείο στη θέση (1,1) ονομάζεται 1ος Οδηγός.
{Στο παράδειγμα μας έχουμε $\alpha_{11}=2\neq 0$ και άρα δεν χρειάζεται εναλλαγή γραμμών. Το 2 είναι ο 1ος Οδηγός.}

2) Προσθέτουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της 1ης γραμμής στις επόμενες γραμμές, έτσι ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία της 1ης στήλης που βρίσκονται κάτω από τον 1ο οδηγό. Έτσι,

α) Πολλ/ζουμε την 1η γραμμή με (-2) & την προσθέτουμε στη 2η γραμμή.

β) » » 1η » » 1 & » » » 3η »

γ) » » 1η » » $\left(-\frac{3}{2}\right)$ & » » » 4η »

και προκύπτει:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -3/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3) Εξετάζουμε αν το νέο στοιχείο στη θέση (2,2) είναι $\neq 0$. Αν δεν είναι, τότε εναλλάσσουμε τη 2η γραμμή με μία από τις πιο κάτω από αυτήν, έτσι ώστε στη θέση (2,2) να έχουμε μη-μηδενικό στοιχείο. Το μη-μηδενικό στοιχείο στη θέση (2,2) ονομάζεται 2ος οδηγός.

{Στο παράδειγμα μας έχουμε -8 (που είναι $\neq 0$) στη θέση (2,2) και άρα δεν χρειάζεται εναλλαγή γραμμών. Το -8 είναι ο 2ος οδηγός.}

4) Προσθέτουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της 2ης γραμμής στις επόμενες γραμμές, έτσι ώστε να μηδενιστούν όλα τα στοιχεία της 2ης στήλης που βρίσκονται κάτω από το 2ο οδηγό. Έτσι,

α) Πολλ/ζουμε τη 2η γραμμή με 1 και την προσθέτουμε στην 3η γραμμή

β) » » 2η » » $\left(-\frac{1}{4}\right)$ και » » » 4η »

Και προκύπτει:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -7/4 & -1 & -1/4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

5) Εξετάζουμε αν το νέο στοιχείο στη θέση (3,3) είναι $\neq 0$. Αν δεν είναι, τότε εναλλάσσουμε την 3η γραμμή με μία από τις πιο κάτω από αυτήν, έτσι ώστε στη θέση (3,3) να έχουμε μη-μηδενικό στοιχείο. Το μη-μηδενικό στοιχείο στη θέση (3,3) ονομάζεται 3ος οδηγός.

Στο παράδειγμα μας έχουμε 1 στη θέση (3,3) και άρα δεν χρειάζεται εναλλαγή γραμμών. Το 1 είναι ο 3ος οδηγός.

6) Προσθέτουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της 3ης γραμμής στις επόμενες γραμμές, έτσι ώστε να μηδενιστούν όλα τα στοιχεία της 3ης στήλης που βρίσκονται κάτω από τον 3ο οδηγό. Έτσι,

πολλ/ζουμε την 3η γραμμή με $1/2$ και την προσθέτουμε στην 4η γραμμή.

Προκύπτει:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9/4 & -3/2 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Τώρα ο επαυξημένος πίνακας έχει τη μορφή $[U \mid B]$, όπου

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9/4 \end{bmatrix}$$

είναι άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία (τους οδηγούς) στη διαγώνιο. Αυτό συνεπάγεται ότι ο αρχικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: ο A <u>δεν</u> θα ήταν αντιστρέψιμος αν κατά τη διάρκεια της παραπάνω διαδικασίας συναντούσαμε 0 σε μια από τις διαγώνιες θέσεις $(1,1), (2,2), \ldots, (n-1,n-1)$ και όλα τα στοιχεία στην ίδια στήλη και κάτω από αυτή τη θέση ήταν επίσης 0. Επίσης, ο A <u>δεν</u> θα ήταν αντιστρέψιμος αν συναντούσαμε 0 στην τελευταία (n,n) διαγώνια θέση.

7) Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος, η διαδικασία συνεχίζεται εφαρμόζοντας απαλοιφές στον $[U \mid B]$ έτσι ώστε να μηδενιστούν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από τους οδηγούς. Ξεκινάμε απαλείφοντας τα στοιχεία που βρίσκονται στη στήλη πάνω από τον τελευταίο οδηγό. Έτσι,

α) Πολ/ζουμε την 4η γραμμή με $\left(-\frac{4}{9}\right)$ και την προσθέτουμε στην 3η γραμμή.

β) >> >> 4η >> με $\left(-\frac{20}{9}\right)$ >> >> >> >> 2η γραμμή.

γ) >> >> 4η >> με $4/3$ >> >> >> >> 1η γραμμή

Προκύπτει:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1/3 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & -8 & -2 & 0 & 4/3 & 4/9 & -10/9 & -20/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 8/9 & 7/9 & -4/9 \\ 0 & 0 & 0 & -9/4 & -3/2 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Συνεχίζουμε απαλείφοντας τα στοιχεία πάνω από τον 3ο οδηγό. Έτσι,

α) Πολ/ζουμε την 3η γραμμή με 2 και την προσθέτουμε στη 2η γραμμή,

β) >> >> 3η >> >> (-1) >> >> >> >> 1η >>

Προκύπτει:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & -2/3 & -5/9 & -1/9 & 16/9 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 2/3 & 20/9 & 4/9 & -28/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 8/9 & 7/9 & -4/9 \\ 0 & 0 & 0 & -9/4 & -3/2 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Συνεχίζουμε απαλείφοντας το στοιχείο πάνω από το 2ο οδηγό. Έτσι, πολλ/ζουμε τη 2η γραμμή με $\frac{1}{8}$ και την προσθέτουμε στην 1η γραμμή.

Προκύπτει:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -7/12 & -5/18 & -1/18 & 25/18 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 2/3 & 20/9 & 4/9 & -28/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 8/9 & 7/9 & -4/9 \\ 0 & 0 & 0 & -9/4 & -3/2 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

8) Διαιρούμε κάθε γραμμή με τον οδηγό της. Έτσι,

α) Πολλ/ζουμε την 1η γραμμή με 1/2

β) >> >> 2η >> >> $-1/8$

γ) >> >> 3η >> >> 1

δ) >> >> 4η >> >> $(-4/9)$

Προκύπτει:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -7/24 & -5/36 & -1/36 & 25/36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/12 & -5/18 & -1/18 & 7/18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 8/9 & 7/9 & -4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/9 & -2/9 & -4/9 \end{array}\right] = \left[I_4 \mid A^{-1} \right]$$

Δηλ. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/24 & -5/36 & -1/36 & 25/36 \\ -1/12 & -5/18 & -1/18 & 7/18 \\ -1/3 & 8/9 & 7/9 & -4/9 \\ 2/3 & -1/9 & -2/9 & -4/9 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$\left[A \,\vdots\, I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι στη θέση (1,1) έχουμε 0. Γι' αυτό εναλλάσσουμε την 1η γραμμή με μια από τις επόμενες. Εναλλάσσοντας την 1η με την 2η γραμμή προκύπτει:

1ος οδηγός

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

2ος οδηγός

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 1 \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

U με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο άρα, ο A αντιστρέφεται. Το 3 είναι ο 3ος οδηγός $\Rightarrow$ συνεχίζουμε στην απαλοιφή των στοιχείων πάνω από τους οδηγούς

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (+) \\ (+) \\ (-1/3) \quad (1/3) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -2 & 0 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(1/2) \\ \cdot(-1/2) \\ \cdot(1/3) \end{array} \Bigg\} \text{διαιρούμε κάθε γραμμή με τον οδηγό της}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & A^{-1} \end{array}\right]$$

Άρα: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/3 & -1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

<u>Παράδειγμα 3</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & -6 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(2) \quad (-3) \\ (+) \\ (+) \end{array} \longrightarrow$$

1ος <u>οδηγός</u>

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι στη διαγώνια θέση (2,2) έχουμε 0 και κάτω από αυτό στην ίδια στήλη δεν υπάρχει μη-μηδενικό στοιχείο. Άρα, δεν μπορούμε να εναλλάξουμε τη 2η γραμμή με επόμενη γραμμή, έτσι ώστε να έχουμε μη-μηδενικό στοιχείο στη θέση (2,2). Επομένως, ο πίνακας A <u>δεν</u> είναι αντιστρέψιμος (δηλ. $\nexists A^{-1}$). Η διαδικασία σταματά εδώ.

ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΣ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Ονομάζουμε ανάστροφο (transpose) του A και συμβολίζουμε A^T τον πίνακα $n\times m$ που έχει ως στήλες τις γραμμές του A. Δηλαδή, αν $(A)_{ij}$ είναι τα στοιχεία του A και $(A^T)_{ij}$ τα στοιχεία του A^T, τότε:

$$\boxed{(A^T)_{ij} = (A)_{ji}}$$

Σηλ. $(A^T)_{11} = (A)_{11}$
$(A^T)_{12} = (A)_{21}$
$(A^T)_{13} = (A)_{31}$
κ.ο.κ.

π.χ. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -8 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες αναστρόφου

α) $(A+B)^T = A^T + B^T \quad , \ \forall\ A,B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

β) $(A^T)^T = A \quad , \ \forall\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

γ) $(AB)^T = B^T A^T \quad , \ \forall\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times k}$

και γενικά: $(\underbrace{A_1 A_2 \dots A_p}_{\text{γινόμενο } p \text{ πινάκων}})^T = A_p^T A_{p-1}^T \dots A_2^T A_1^T$

π.χ. $(AB\Gamma)^T = \Gamma^T B^T A^T$

δ) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε: $\boxed{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5-6}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

και $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ & ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός: Ένας <u>τετραγωνικός</u> πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι <u>συμμετρικός</u> ανν $\boxed{A^T = A}$. Δηλαδή: $(A)_{ij} = (A)_{ji}$, $\forall\, i,j$

Π.χ. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

δηλ. πίνακες συμμετρικοί ως προς την κύρια διαγώνιο.

Ορισμός: Ένας <u>τετραγωνικός</u> πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι <u>αντισυμμετρικός</u> ανν $\boxed{A^T = -A}$. Δηλαδή: $(A)_{ij} = -(A)_{ji}$, $\forall\, i,j$

Παρατήρηση: Επειδή $(A)_{ij} = -(A)_{ji}$, $\forall\, i,j$, για τα διαγώνια στοιχεία (όπου $j=i$) έχουμε $(A)_{ii} = -(A)_{ii} \Rightarrow 2(A)_{ii} = 0 \Rightarrow (A)_{ii} = 0$

Παραδείγματα αντισυμμετρικών πινάκων:

$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 & -7 \\ -6 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & -8 \\ 7 & -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

Θεώρημα: Κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός <u>συμμετρικού</u> πίνακα S και ενός <u>αντισυμμετρικού</u> πίνακα W. Δηλαδή $A = S + W$

όπου $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ [συμμετρικός, αφού: $S^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = S$]

και $W = \frac{1}{2}(A - A^T)$ [αντισυμμετρικός, αφού $W^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -W$]