ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Μαθηματική Θεωρία Υλικών ΙΙ» (ΕΜ352) – Εαρινό Εξάμηνο 2007-08, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

1^{O} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΗ «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΥΛΙΚΩΝ Ι»)

Άσκηση 1: Έστω $\{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ μια βάση του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\underset{\sim}{v}_1 = \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3$, $\underset{\sim}{v}_2 = \underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 + 3\underset{\sim}{e}_3$, $\underset{\sim}{v}_3 = 3\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3$ δεν αποτελούν βάση του $\mathcal{E}$.

Άσκηση 2: Χρησιμοποιήστε συμβολισμό με δείκτες για να υπολογίσετε:
α) Τις συνιστώσες του $\underset{\sim}{v} \otimes \underset{\sim}{w}$ συναρτήσει των συνιστωσών των διανυσμάτων $\underset{\sim}{v}$ και $\underset{\sim}{w}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.
β) Τις συνιστώσες του γινομένου $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{u}$ συναρτήσει των συνιστωσών του τανυστή $2^{ης}$ τάξης $\underset{\sim}{T}$ και του διανύσματος $\underset{\sim}{u}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.
γ) Τις συνιστώσες του γινομένου $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{P}$ συναρτήσει των συνιστωσών των τριών τανυστών $2^{ης}$ τάξης $\underset{\sim}{T}$, $\underset{\sim}{S}$ και $\underset{\sim}{P}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.

Άσκηση 3: Χρησιμοποιώντας ως δεδομένο ότι $\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{lr} & \delta_{ls} & \delta_{lt} \\ \delta_{mr} & \delta_{ms} & \delta_{mt} \\ \delta_{nr} & \delta_{ns} & \delta_{nt} \end{vmatrix}$, να δείξετε με τη σειρά τα εξής:

α) $\varepsilon_{lmt}\varepsilon_{rst} = \delta_{lr}\delta_{ms} - \delta_{ls}\delta_{mr}$, β) $\varepsilon_{lst}\varepsilon_{rst} = 2\delta_{lr}$, γ) $\varepsilon_{rst}\varepsilon_{rst} = 6$

Άσκηση 4: Έστω τα διανυσματικά πεδία $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{w}$, και $\underset{\sim}{a}$. Χρησιμοποιήστε συμβολισμό με δείκτες για να δείξετε τα εξής:
α) $(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}) \times \underset{\sim}{w} = (\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{w})\underset{\sim}{v} - (\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w})\underset{\sim}{u}$
β) $(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}) \cdot (\underset{\sim}{w} \times \underset{\sim}{a}) = (\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{w})(\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{a}) - (\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{a})(\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w})$
γ) $(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}) \times (\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{w}) \cdot (\underset{\sim}{w} \times \underset{\sim}{u}) = (\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w})^2$
δ) $(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}) \times (\underset{\sim}{w} \times \underset{\sim}{a}) + (\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{w}) \times (\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{a}) + (\underset{\sim}{w} \times \underset{\sim}{u}) \times (\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{a}) = -2(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w})\underset{\sim}{a}$

Άσκηση 5: Έστω τα διανυσματικά πεδία $\underset{\sim}{u}$ και $\underset{\sim}{v}$, και τα βαθμωτά πεδία φ και ψ. Χρησιμοποιήστε συμβολισμό με δείκτες για να δείξετε τα εξής:
α) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\underset{\sim}{u}) = 0$
β) $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$
γ) $\operatorname{div}(\varphi\underset{\sim}{u}) = (\operatorname{grad}\varphi) \cdot \underset{\sim}{u} + \varphi \operatorname{div}\underset{\sim}{u}$
δ) $\operatorname{curl}(\varphi\underset{\sim}{u}) = (\operatorname{grad}\varphi) \times \underset{\sim}{u} + \varphi \operatorname{curl}\underset{\sim}{u}$
ε) $\operatorname{div}(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}) = (\operatorname{curl}\underset{\sim}{u}) \cdot \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{u} \cdot \operatorname{curl}\underset{\sim}{v}$
στ) $\operatorname{curl}(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}) = (\operatorname{grad}\underset{\sim}{u})\underset{\sim}{v} - (\operatorname{grad}\underset{\sim}{v})\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{u} \operatorname{div}\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{v} \operatorname{div}\underset{\sim}{u}$
ζ) $\operatorname{div}[\operatorname{grad}(\varphi\psi)] = \varphi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\varphi + 2(\operatorname{grad}\varphi) \cdot (\operatorname{grad}\psi)$

Άσκηση 6: Δείξτε ότι το ίχνος και η ορίζουσα ενός τανυστή $\underset{\sim}{T}$ $2^{ης}$ τάξης μένουν αναλλοίωτες κατά την αλλαγή βάσης $\underset{\sim}{e}'_i = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i$, με $\underset{\sim}{Q} \in Orth$.

Άσκηση 7: Δείξτε ότι η ποσότητα $\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w}$ μένει αναλλοίωτη κατά την αλλαγή βάσης $\underset{\sim}{e}'_i = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i$, με $\underset{\sim}{Q} \in Orth_+$. Είναι αναλλοίωτη κατά την αλλαγή $\underset{\sim}{e}'_i = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i$, με $\underset{\sim}{Q} \in Orth_-$;

Άσκηση 8: Έστω ένα διανυσματικό πεδίο $\underset{\sim}{u}$ και ένα τανυστικό πεδίο $2^{ης}$ τάξης $\underset{\sim}{T}$.

α) Δείξτε ότι οι αποκλίσεις $\operatorname{div}\underset{\sim}{u}$ και $\operatorname{div}\underset{\sim}{T}$ μένουν αναλλοίωτες κατά την αλλαγή βάσης $\underset{\sim}{e}_i' = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i$, με $\underset{\sim}{Q} \in Orth$.

β) Δείξτε ότι η ποσότητα $\operatorname{curl}\underset{\sim}{u}$ μένει αναλλοίωτη κατά την αλλαγή βάσης $\underset{\sim}{e}_i' = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i$, με $\underset{\sim}{Q} \in Orth_+$.

Άσκηση 9: Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να δείξετε ότι: $\det\left(\underset{\sim}{T} - \lambda\underset{\sim}{1}\right) = -\lambda^3 + I_T\lambda^2 - II_T\lambda + III_T$, όπου I_T, II_T, III_T είναι οι βασικές αναλλοίωτες του τανυστή 2ης τάξης $\underset{\sim}{T}$ οι οποίες ορίζονται ως: $I_T = \operatorname{tr}(\underset{\sim}{T})$, $II_T = \frac{1}{2}\left(\left[\operatorname{tr}(\underset{\sim}{T})\right]^2 - \operatorname{tr}(\underset{\sim}{T}^2)\right)$ και $III_T = \det\underset{\sim}{T}$.

Άσκηση 10: Έστω ότι ένας συμμετρικός τανυστής 2ης τάξης $\underset{\sim}{T}$ που έχει δυο ίσες ιδιοτιμές, δηλ. $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. Τότε η χαρακτηριστική εξίσωση γίνεται: $\det\left(\underset{\sim}{T} - \lambda\underset{\sim}{1}\right) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 = 0$. Να δειχθεί ότι ο $\underset{\sim}{T}$ ικανοποιεί την εξίσωση: $\underset{\sim}{T}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\underset{\sim}{T} + \lambda_1\lambda_2\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{O}$.

Άσκηση 11: Έστω τανυστής 2ης τάξης $\underset{\sim}{T}$ με συνιστώσες $\left(T_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{T}$,

β) Να βρεθεί ένα ορθοκανονικό σύστημα ιδιοδιανυσμάτων του $\underset{\sim}{T}$,

γ) Να βρεθεί ο $\underset{\sim}{T}^{1/2}$ και να γραφτούν οι συνιστώσες του ως προς τη βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.

Άσκηση 12: Έστω τανυστής 2ης τάξης $\underset{\sim}{F}$ με συνιστώσες $\left(F_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$. Υπολογίστε τους τανυστές $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{U}$ και $\underset{\sim}{V}$ της πολικής παραγοντοποίησης και γράψτε τις συνιστώσες τους ως προς τη βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$. Ποιες οι συνιστώσες του δεξιού Cauchy-Green τανυστή $\underset{\sim}{C}$.

Άσκηση 13: Έστω η κίνηση ενός συνεχούς μέσου: $\left\{\begin{array}{l} y_1 = e^t + x_1 - 1 \\ y_2 = x_2\cos t - x_3\sin t \\ y_3 = x_2\sin t + x_3\cos t \end{array}\right\}$. Να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα σε υλική και χωρική περιγραφή.
β) Η επιτάχυνση σε υλική και χωρική περιγραφή.
γ) Η κλίση της παραμόρφωσης και ο δεξιός Cauchy-Green τανυστής.
δ) Η κλίση της ταχύτητας, ο τανυστής ρυθμού έντασης και ο τανυστής περιδίνησης.
Εξετάστε εάν η κίνηση είναι ισόχωρη.

Άσκηση 14: Δίνεται το πεδίο ταχύτητας: $\underset{\sim}{v}\left(\underset{\sim}{y}, t\right) = -\kappa y_2\underset{\sim}{e}_1 + \kappa y_1\underset{\sim}{e}_2 + \lambda(y_1^2 + y_2^2)\underset{\sim}{e}_3$, με κ, λ σταθερές.

α) Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{f}\left(\underset{\sim}{x}, t\right)$.

β) Να γραφτεί η ταχύτητα σε υλική περιγραφή.
γ) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση σε υλική και χωρική περιγραφή.
δ) Να διαπιστωθεί ότι κάθε σωματίδιο του συνεχούς μέσου κινείται σε (κυκλική) κυλινδρική επιφάνεια με σταθερό μέτρο ταχύτητας.
ε) Να βρεθεί η υλική παράγωγος των μεγεθών:
i) $\psi = y_1 + 2t^2y_2 - 3y_3$, και ii) $\underset{\sim}{w} = (y_1t - y_2)\underset{\sim}{e}_1 + y_1y_3t^3\underset{\sim}{e}_2 - 3y_2\underset{\sim}{e}_3$

Απάντηση: α) $y_1 = x_1\cos\kappa t - x_2\sin\kappa t,\ y_2 = x_1\sin\kappa t + x_2\cos\kappa t,\ y_3 = \lambda(x_1^2 + x_2^2)t + x_3$

Άσκηση 15: Το πεδίο ταχύτητας ενός συνεχούς μέσου δίνεται ως: $\underset{\sim}{v}\left(\underset{\sim}{y},t\right)=\frac{y_1}{1+t}\underset{\sim}{e}_1+\frac{2y_2}{1+t}\underset{\sim}{e}_2+\frac{3y_3}{1+t}\underset{\sim}{e}_3$. Να υπολογιστούν: α) Το διάνυσμα επιτάχυνσης συναρτήσει των μεταβλητών του Euler και του Lagrange.

β) Οι εξισώσεις των γραμμών ροής και των τροχιών των σωματιδίων του Σ.Μ.

γ) Εξετάστε αν η κίνηση είναι αστρόβιλη και ισόχωρη. Αν δεν είναι ισόχωρη, βρείτε τα ζεύγη τιμών $\left(\underset{\sim}{x},t\right)$ για τα οποία έχουμε διαστολή όγκου.

Απάντηση: α) $\underset{\sim}{a}\left(\underset{\sim}{y},t\right)=\frac{2y_2}{(1+t)^2}\underset{\sim}{e}_2+\frac{6y_3}{(1+t)^2}\underset{\sim}{e}_3,\quad \underset{\sim}{a}\left(\underset{\sim}{x},t\right)=2x_2\underset{\sim}{e}_2+6(1+t)x_3\underset{\sim}{e}_3$

β) $y_1^2=c_1y_2,\ y_1^3=c_2y_3$ (συμπίπτουν)

γ) αστρόβιλη και μη ισόχωρη. Διαστολή όγκου για όλα τα $\left(\underset{\sim}{x},t\right)$.

Άσκηση 16 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Ιουν2007): Διατηρούμενη συνεχώς ομογενής, μια αέρια μάζα m διαστέλλεται έχοντας πεδίο ταχυτήτων:

$$\underset{\sim}{v}=y_1(y_3-t)\underset{\sim}{e}_1-y_2y_3\underset{\sim}{e}_2+3ty_3\underset{\sim}{e}_3$$

Αν σε χρόνο $t=0$ η μάζα m κατέχει όγκο V_o σε πόσο χρόνο θα διπλασιαστεί ο όγκος της;

Άσκηση 17 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Ιουν2007): Έστω το πεδίο ταχύτητας: $\underset{\sim}{v}=y_2f(y_1,y_2)\underset{\sim}{e}_1-y_1f(y_1,y_2)\underset{\sim}{e}_2$. Βρείτε τη μορφή της συνάρτησης $f(y_1,y_2)$ έτσι ώστε η ροή να είναι αστρόβιλη και το συνεχές μέσο ασυμπίεστο.

Άσκηση 18: Μια επίπεδη κίνηση ενός συνεχούς μέσου δίνεται ως: $y_1=t+x_1,\ y_2=\frac{1}{2}t^2+t+x_2$. Να βρεθούν:

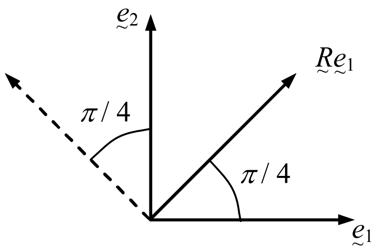
α) η τροχιά του σωματιδίου που, τη χρονική στιγμή $t=1$, βρίσκεται στην αρχή των αξόνων,

β) η γραμμή ροής που, τη χρονική στιγμή $t_o=1$, περνά από την αρχή των αξόνων.

Απάντηση: α) $y_2=2y_1+\frac{1}{2}y_1^2$, β) $y_2=2y_1$

Άσκηση 19 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Ιαν2006): α) Να βρεθεί το μητρώο συνιστωσών σε ΟΚ βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ του τανυστή $\underset{\sim}{R}$ στροφής περί άξονα $\underset{\sim}{e}_3$ κατά γωνία $\pi/4$.

β) Να βρεθεί (χωρίς υπολογισμούς) μια μόνο ιδιοτιμή και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του $\underset{\sim}{R}$



Άσκηση 20 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Ιαν2006): Η παραμόρφωση $\underset{\sim}{f}:R\to R_*$ έχει συνιστώσες (σε ΟΚ βάση) τις: $f_1(\underset{\sim}{x})=x_1+x_2$, $f_2(\underset{\sim}{x})=x_1-x_2$, $f_3(\underset{\sim}{x})=\varphi(x_3)$, όπου $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$.

α) Ποιο είναι το πρόσημο της παραγώγου $\varphi'(x_3)$;

β) Αν η $\underset{\sim}{f}$ διατηρεί τον όγκο (ισόχωρη) και $\varphi(0)=0$, βρείτε την $\varphi(x_3)\ \forall x_3\in\mathbb{R}$.

γ) Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι ισόχωρη, βρείτε το μητρώο συνιστωσών του τανυστή έκτασης $\underset{\sim}{U}=(\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F})^{1/2}$.

Άσκηση 21 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Ιαν2006): Σώμα υφίσταται χρονικά ανεξάρτητη παραμόρφωση ενώ ισχύουν τα ισοζύγια ορμών. Στην παραμορφωμένη περιοχή το πεδίο του τανυστή των τάσεων του Cauchy δίνεται ως $\underset{\sim}{T}\left(\underset{\sim}{y}\right)=\underset{\sim}{d}\otimes\underset{\sim}{y}+c\underset{\sim}{y}\otimes\underset{\sim}{d},\ \forall\underset{\sim}{y}\in R_*$, όπου $\underset{\sim}{d}=$ σταθ. $\in\mathcal{E}$, $c=$ σταθ. $\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η τιμή της c.

β) Να βρεθεί το πεδίο δύναμης σώματος στην R_*.

Άσκηση 22 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Σεπτ2006): α) Γράψτε ΧΩΡΙΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ τα βαθμωτά, διανύσματα ή τανυστές με συνιστώσες $B_{ij}a_j$, $B_{ij}a_i$, $A_{ij}B_{jk}B_{lk}$, $\varepsilon_{ijk}A_{jm}B_{kl}d_mc_l$.

β) ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ τανυστής $\underset{\sim}{A}$ έχει μητρώο συνιστωσών $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & b \\ 0 & c & 1/2 \end{pmatrix}$ σε κάποια ΟΚ βάση. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των b, c και να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία του τανυστή (με λόγια).

Άσκηση 23 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Σεπτ2006): Κίνηση σώματος δίνεται σαν $\underset{\sim}{f}\left(\underset{\sim}{x},t\right)=\underset{\sim}{R}(t)\underset{\sim}{x},\ \forall \underset{\sim}{x}\in R$, όπου $\underset{\sim}{R}(t)$ είναι χρονικά εξαρτώμενος τανυστής στροφής.

α) Δείξτε ότι ο τανυστής $\underset{\sim}{W}(t)=\underset{\sim}{R}'(t)\underset{\sim}{R}^T(t)$ είναι λοξός.

β) Γράψτε τα πεδία χωρικής ταχύτητας και χωρικής επιτάχυνσης για αυτή την κίνηση χωρίς συνιστώσες.

γ) Επειδή ο $\underset{\sim}{W}(t)$ είναι λοξός, έχει αξονικό διάνυσμα $\underset{\sim}{w}(t)$. Βρείτε εκφράσεις για τα πεδία χωρικής ταχύτητας και χωρικής επιτάχυνσης που περιέχουν μόνο το $\underset{\sim}{y}\in R_t$, το $\underset{\sim}{w}(t)$ και παραγώγους του.

Άσκηση 24 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Σεπτ2006): Σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας με πεδίο τανυστή τάσεων Cauchy $\underset{\sim}{T}\left(\underset{\sim}{y}\right)=(\underset{\sim}{y}\cdot\underset{\sim}{e})^2\underset{\sim}{e}\otimes\underset{\sim}{e}$, όπου $\underset{\sim}{e}$ είναι σταθερό διάνυσμα. Να βρεθεί το πεδίο δύναμης σώματος.

Άσκηση 25 (Παλιό θέμα Μ.Θ.Υ.): Τα $\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{n}\in\mathcal{E}$, είναι δεδομένα ορθοκανονικά διανύσματα. Έστω $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{m}\otimes\underset{\sim}{n}+\underset{\sim}{n}\otimes\underset{\sim}{m}$.

α) Βρείτε τον πίνακα συνιστωσών του $\underset{\sim}{A}$ ως προς τη βάση $\{\underset{\sim}{d}_1,\underset{\sim}{d}_2,\underset{\sim}{d}_3\}$, όπου $\underset{\sim}{d}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{n})$, $\underset{\sim}{d}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{m}+\underset{\sim}{n})$, $\underset{\sim}{d}_3=\underset{\sim}{n}\times\underset{\sim}{m}$.

β) Βρείτε τις ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του $\underset{\sim}{A}$

γ) Γράψτε τον $\underset{\sim}{A}^2$ σαν άθροισμα δύο τανυστικών γινομένων διανυσμάτων

Άσκηση 26 (Παλιό θέμα Μ.Θ.Υ.): Για τα πεδία $\underset{\sim}{u}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ και $\underset{\sim}{S}:\mathcal{E}\to Sym$, $\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{S}\in C^2(\mathcal{E})$, αποδείξτε τις ταυτότητες:

α) $\nabla\cdot(\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{u})=\underset{\sim}{S}\cdot sym\nabla\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{u}\cdot(\nabla\cdot\underset{\sim}{S})$

β) $\nabla\cdot[(\nabla\underset{\sim}{u})\underset{\sim}{u}]-(\nabla\underset{\sim}{u})^T\cdot\nabla\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}\cdot\nabla(\nabla\cdot\underset{\sim}{u})=0$

Άσκηση 27 (Παλιό θέμα Μ.Θ.Υ.): Αν $R\subset\mathcal{E}$ είναι ανοικτή περιοχή και $\underset{\sim}{f}:R\to\mathcal{E}$ είναι η απεικόνιση που σε ΟΚ βάση έχει συνιστώσες: $f_1(\underset{\sim}{x})=x_1$, $f_2(\underset{\sim}{x})=x_2+g(x_1)$, $f_3(\underset{\sim}{x})=x_3+h(x_1,x_2)$, όπου $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g\in C^1(\mathbb{R})$, $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$, αποδείξτε ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι παραμόρφωση, δηλαδή ότι $\underset{\sim}{f}\in C^1(R)$, $\det\nabla\underset{\sim}{f}>0$ εν R, και ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι ολικά αντιστρέψιμη.

Άσκηση 28: Συνεχές μέσο υφίσταται την παραμόρφωση $\underset{\sim}{f}:R\to R_*$ με συνιστώσες (σε ΟΚ βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$) τις: $f_1(\underset{\sim}{x})=x_1+\kappa(x_3^4-x_2^4+2x_1)$, $f_2(\underset{\sim}{x})=x_2+\kappa(x_1^4-x_3^4+2x_2)$, $f_3(\underset{\sim}{x})=x_3+\kappa(x_2^4-x_1^4+2x_3)$, όπου $\kappa=\text{σταθ.}\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογιστεί το μητρώο συνιστωσών του δεξιού Cauchy-Green τανυστή $\underset{\sim}{C}$ ως προς τη βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.

β) Στο υλικό σημείο (1,1,0), να υπολογιστούν οι εκτάσεις κατά τις διευθύνσεις των διανυσμάτων της ΟΚ βάσης $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ και οι γωνίες διάτμησης $\gamma(\underset{\sim}{e}_i,\underset{\sim}{e}_j),\ i\neq j$.

γ) Στο σημείο (1,1,0), να βρεθεί η έκταση κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\underset{\sim}{e}_1+\underset{\sim}{e}_2+\underset{\sim}{e}_3$.

δ) Σε ποια σημεία δύο διευθύνσεις αρχικά παράλληλες προς του άξονες x_1,x_2, αντίστοιχα, διατηρούν την καθετότητα τους;

Άσκηση 29: Δίνεται το πεδίο ταχύτητας: $\underset{\sim}{v}\left(\underset{\sim}{y},t\right)=2\kappa y_3\underset{\sim}{e}_1+3\mu y_1\underset{\sim}{e}_3$, όπου $\kappa,\mu=\text{σταθ.}\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί ο τανυστής ρυθμού έντασης. Τι συμβαίνει όταν $\mu=-\frac{2}{3}\kappa$;

β) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}$ στη γενική περίπτωση και για $\mu=-\frac{2}{3}\kappa$.

γ) Να βρεθεί η κυκλοφορία της ταχύτητας κατά μήκος της περιφέρειας $x_1^2 + x_3^2 = 1$.

Απάντηση: α) $D_{13} = (2\kappa + 3\mu)/2$, $D_{ij} = 0$, β) $\underset{\sim}{\omega} = \frac{1}{2}(3\mu \underset{\sim}{e}_1 + 2\kappa \underset{\sim}{e}_2)$, $\underset{\sim}{\omega} = \kappa(-\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2)$, γ) $\pi(3\mu - 2\kappa)$

Άσκηση 30: Δίνεται το πεδίο ταχύτητας: $\underset{\sim}{v}\left(\underset{\sim}{x},t\right) = \kappa x_2 \underset{\sim}{e}_1 - 2\kappa t x_1 \underset{\sim}{e}_2 + 3\kappa^2 t^2 x_3 \underset{\sim}{e}_3$, όπου $\kappa =$ σταθ. $\in \mathbb{R}$.

α) Αποδείξτε ότι όλα τα υλικά σημεία που, σε χρόνο $t = 0$ βρίσκονται μέσα στη μοναδιαία σφαίρα $x_i x_i \le 1$, θα βρεθούν, σε χρόνο $t = 1$, μέσα σε ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής περί τον άξονα Ox_3.

β) Για ποια τιμή του κ ο όγκος του ελλειψοειδούς είναι διπλάσιος από τον όγκο της σφαίρας;

Απάντηση: β) $\kappa = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$

Άσκηση 31: Το πεδίο ταχύτητας μιας δυναμικής ροής είναι:

$$\underset{\sim}{v}\left(\underset{\sim}{y},t\right) = (\alpha y_2 y_3 + \beta^2 y_1)\underset{\sim}{e}_1 + (\beta y_1 y_3 + \gamma^2 y_2)\underset{\sim}{e}_2 + (\gamma y_1 y_2 + \alpha^2 y_3)\underset{\sim}{e}_3$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma =$ σταθ. $\in \mathbb{R}$. Αν από το χρόνο $t = 0$ στο χρόνο $t = 1$, ο κάθε σωματιδιακός όγκος του Σ.Μ. διπλασιάζεται, τότε:

α) Υπολογίστε τις σταθερές α, β, γ

β) Βρείτε το δυναμικό φ του πεδίου ταχυτήτων.

Απάντηση: α) $\alpha = \beta = \gamma = \sqrt{\frac{1}{3}\ln 2}$, β) $\varphi = -\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}\, y_1 y_2 y_3 - \frac{\ln 2}{6}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)$

Άσκηση 32: Δίνεται το πεδίο ταχύτητας: $\underset{\sim}{v}\left(\underset{\sim}{y},t\right) = y_1 \underset{\sim}{e}_1 - y_2 \underset{\sim}{e}_2 + \dfrac{y_3}{1+t}\underset{\sim}{e}_3$. Να υπολογιστεί το μέτρο ταχύτητας του υλικού σημείου $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 + 2\underset{\sim}{e}_3$, τη χρονική στιγμή $t = \ln 2$

Απάντηση: $\left|\underset{\sim}{v}\right| = 3$

Άσκηση 33: Δίνεται το πεδίο ταχύτητας: $\underset{\sim}{v}\left(\underset{\sim}{y},t\right) = -y_2 \underset{\sim}{e}_1 + y_1 \underset{\sim}{e}_2 + 4 y_2 \underset{\sim}{e}_3$. Να βρεθεί η τροχιά που περνά από το σημείο $(1,-1,2)$.

Απάντηση: $y_1^2 + y_2^2 = 2, \quad y_3 + 4y_1 = 6$

Άσκηση 34: Το πεδίο ταχύτητας ενός ρευστού προέρχεται από το δυναμικό $\varphi = \ln r$ με $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. Είναι το ρευστό ασυμπίεστο;

Απάντηση: όχι