

Θέμα 1. (μονάδες 2.5)

Έστω ένα ελαστικό υλικό για το οποίο η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα απαραμόρφωτου όγκου) δίδεται ως $w = w(I_B, III_B)$, δηλαδή είναι μια συνάρτηση της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ βασικής αναλλοίωτης του αριστερού Cauchy-Green τανυστή έντασης B .

α) [μονάδες: 1.7] Δείξτε ότι η καταστατική συνάρτηση Cauchy δίνεται ως: $G(F) = a_0 \mathbf{1} + a_1 B$, όπου

$$a_0 = 2\sqrt{III_B} \frac{\partial w}{\partial III_B} \text{ και } a_1 = \frac{2}{\sqrt{III_B}} \frac{\partial w}{\partial I_B}$$

$$[\text{Δίνονται: } \nabla_F w(F) = 2 \left(\nabla_B w(B) \right) F \text{ και } \nabla_A \det A = (\det A) A^{-T}, \forall A \in Lin_+]$$

β) [μονάδες: 0.8] Έστω $w = \mu(\det F - 1)(I_B - 3)$, όπου μ είναι μια σταθερά του υλικού. Γράψτε την w στη μορφή $w(I_B, III_B)$ και υπολογίστε τις συναρτήσεις a_0, a_1 .

Θέμα 2. (μονάδες 4.3)

Έστω ότι για ένα ισότροπο γραμμικό ελαστικό υλικό το οποίο υφίσταται απειροστές παραμορφώσεις το πεδίο τάσεων Cauchy δίνεται ως: $S_{11} = ay_1, S_{12} = ay_2, S_{13} = ay_3, S_{22} = S_{33} = S_{23} = 0$, όπου a είναι μια θετική σταθερά.

α) [μονάδες: 0.5] Να υπολογιστεί το διάνυσμα ολκής στο επίπεδο $y_1 = 1$

β) [μονάδες: 0.7] Να υπολογιστεί το διάνυσμα δύναμης σώματος θεωρώντας ότι το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

γ) [μονάδες: 0.7] Να υπολογιστεί το μητρώο συνιστωσών του τανυστή έντασης.

δ) [μονάδες: 0.6] Να εξετάσετε σε ποιες περιοχές του χώρου έχουμε διαστολή όγκου και σε ποιες συστολή όγκου.

ε) [μονάδες: 1.0] Να βρεθεί η κατανομή της πυκνότητας ελαστικής ενέργειας.

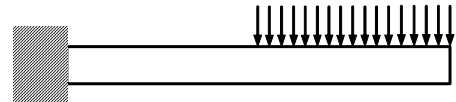
στ) [μονάδες: 0.8] Με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (ε), να υπολογιστεί η συνολική ελαστική ενέργεια του κύβου $K = \{(y_1, y_2, y_3) \mid 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1, 0 \leq y_3 \leq 1\}$.

Θέμα 3. (μονάδες 2)

α) [μονάδες: 0.5] Να βρεθούν οι σχέσεις που δίνουν τους συντελεστές του Lamè συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας E και του λόγου Poisson ν .

β) [μονάδες: 0.5] Έστω ένα ισότροπο γραμμικό ελαστικό υλικό με $E = 200 \text{ GPa}$ και $\nu = 0.25$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές του Lamè και το μέτρο διάγκωσης.

γ) [μονάδες: 1.0] Έστω η ράβδος του σχήματος, η οποία έχει τετράγωνη εγκάρσια διατομή (κάθετα στο επίπεδο του χαρτιού). Στο δεξί άκρο της ασκείται γνωστή οριζόντια μετατόπιση u_0 , ενώ το αριστερό της άκρο παραμένει πακτωμένο σ' ένα τοίχο. Επιπλέον, στη μισή πάνω επιφάνεια ασκείται ομοιόμορφη πίεση P όπως φαίνεται στο σχήμα. Να προσδιοριστεί σε ποια τμήματα της ράβδου προκαθορίζονται συνοριακές συνθήκες μετατόπισης και σε ποια συνοριακές συνθήκες ολκής. Ποιες είναι αυτές οι συνθήκες;



Θέμα 4. (μονάδες 1.2)

Ένα στερεό σώμα υφίσταται τη μετατόπιση: $\underline{u}(x) = -x_2 x_3^2 \underline{e}_1 + x_1 x_3^2 \underline{e}_2$.

Να υπολογιστούν:

α) [μονάδες: 0.6] Το διάνυσμα της παραμόρφωσης και το μητρώο συνιστωσών του τανυστή βαθμίδας παραμόρφωσης.

β) [μονάδες: 0.6] Οι εκτάσεις στις κατευθύνσεις των μοναδιαίων $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ της ορθοκανονικής βάσης.