

**Θέματα εξέτασης προόδου στο μάθημα «Μαθηματική Θεωρία Υλικών II» (EM352)**

Ηράκλειο, 26 Ιουνίου 2008

**Θέμα 1. (μονάδες 2)**

Εστω ότι για ένα συνεχές μέσο το πεδίο τάσεων Cauchy δίνεται ως:  $[T] = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 & T_{12} & 0 \\ T_{21} & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{bmatrix}$ . Αν το συνεχές

μέσο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας απουσία δυνάμεων σώματος και αν το διάνυσμα ολικής στο επίπεδο  $y_1 = 1$  δίδεται ως  $t_n = (1 + y_2)e_1 + (6 - y_2)e_2$ , να βρεθούν οι τάσεις  $T_{12}$  και  $T_{21}$  συναρτήσει των  $y_1$  και  $y_2$ .

**Θέμα 2. (μονάδες 3.5)**

Για ένα ελαστικό υλικό, η καταστατική συνάρτηση Cauchy δίνεται ως:  $G(F) = \beta_0 I + \frac{\beta_1}{\sqrt{III_B}} B + \frac{\beta_2}{\sqrt{III_B}} B^2$

όπου  $F \in Lin_+$  είναι ο τανυστής της βαθμίδας παραμόρφωσης,  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  είναι σταθερές του υλικού, και  $I_B, II_B, III_B$  είναι οι βασικές αναλλοίωτες του αριστερού Cauchy-Green τανυστή έντασης  $B$ .

α) [μονάδες: 0.8] Υπολογίστε την καταστατική συνάρτηση Piola  $H(F)$  [η τελική μορφή να είναι γραμμένη μόνο ως προς  $F$ , δηλαδή να μην περιέχει το  $B$  και τις αναλλοίωτες του].

β) [μονάδες: 2.0] Δείξτε ότι η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα απαραμόρφωτου όγκου) δίνεται ως:  $w(B) = \beta_0(\sqrt{III_B} - 1) + \frac{\beta_1}{2}(I_B - 3) + \frac{\beta_2}{2}\left(\frac{I_B^2}{2} - II_B\right) + c$ , όπου  $c$  είναι μια άγνωστη σταθερά.

$$[\text{Δίνονται: } \nabla_F w(F) = 2 \left( \nabla_B w(B) \right) F \text{ και } \nabla_A \det A = (\det A) A^{-T}, \forall A \in Lin_+]$$

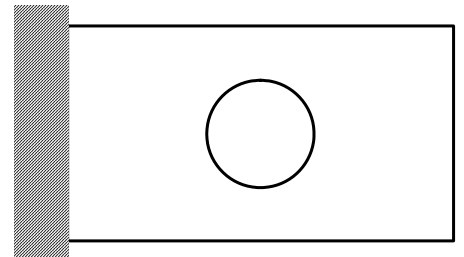
γ) [μονάδες: 0.7] Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς  $c$  έτσι ώστε στην απαραμόρφωτη κατάσταση, η ενέργεια να μηδενίζεται.

**Θέμα 3. (μονάδες 2)**

α) [μονάδες: 0.8] Να βρεθούν οι σχέσεις που δίνουν τους συντελεστές του Lamè συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας  $E$  και του λόγου Poisson  $\nu$ .

β) [μονάδες: 0.5] Έστω ένα ισότροπο γραμμικό ελαστικό υλικό με  $E = 210 \text{ GPa}$  και  $\nu = \frac{1}{3}$ . Να υπολογιστούν οι συντελεστές του Lamè και το μέτρο διόγκωσης.

γ) [μονάδες: 0.7] Στο δεξί άκρο της πλάκας του σχήματος ασκείται γνωστή οριζόντια μετατόπιση  $u_0$ , ενώ το αριστερό της άκρο παραμένει πακτωμένο σ' ένα τοίχο. Στην επιφάνεια της κυκλικής οπής ασκείται ομοιόμορφη πίεση  $P$ . Να προσδιοριστεί σε ποια τμήματα της πλάκας προκαθορίζονται συνοριακές συνθήκες μετατόπισης και σε ποια συνοριακές συνθήκες ολικής. Ποιες είναι αυτές οι συνθήκες;



**Θέμα 4. (μονάδες 3)**

Η στρέψη ενός στερεού κυλίνδρου με άξονα  $x_3$  περιγράφεται από το διάνυσμα μετατόπισης:

$$u(x) = -x_2 \varphi(x_3) e_1 + x_1 \varphi(x_3) e_2,$$

όπου  $\varphi(x_3)$  δις παραγωγίσιμη βαθμωτή συνάρτηση. Να υπολογιστούν:

α) [μονάδες: 0.6] Το διάνυσμα της παραμόρφωσης και το μητρώο συνιστωσών του τανυστή βαθμίδας παραμόρφωσης.

β) [μονάδες: 0.6] Οι εκτάσεις στις κατευθύνσεις των μοναδιαίων  $e_1, e_2, e_3$  της ορθοκανονικής βάσης.

γ) [μονάδες: 0.6] Θεωρώντας απειροστές παραμορφώσεις και ισότροπο γραμμικό ελαστικό υλικό με γνωστούς συντελεστές Lamè, να υπολογιστούν τα μητρώα συνιστωσών του τανυστή έντασης και τανυστή τάσης.

δ) [μονάδες: 0.6] Να βρεθεί η κατανομή της πυκνότητας ελαστικής ενέργειας.

ε) [μονάδες: 0.6] Ποια μορφή πρέπει να έχει η  $\varphi(x_3)$  έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας απουσία δυνάμεων σώματος;