

**Θέμα 1. (μονάδες 3)**

Να διατυπωθεί με λόγια το θεώρημα ισχύος. Να γραφεί η αντίστοιχη εξίσωση σε χωρική μορφή και να γραφεί ποιο φυσικό μέγεθος εκφράζει κάθε όρος της. Τέλος, να αποδειχθεί η εξίσωση αυτή. [Σημείωση: να γράφετε κάθε φορά ποια ποσότητα αντιπροσωπεύουν τα σύμβολα που χρησιμοποιείτε]

**Θέμα 2. (μονάδες 1.5)**

Έστω μια βαθμωτή συνάρτηση  $\psi(B)$  όπου  $B$  είναι ο αριστερός Cauchy-Green τανυστής έντασης και έστω  $\psi(F) = \hat{\psi}(B)$ , όπου  $F \in Lin_+$  είναι ο τανυστής της βαθμίδας παραμόρφωσης. Να δειχθεί ότι: 
$$\nabla_F \psi(F) = 2 \left( \nabla_B \hat{\psi}(B) \right) F$$

**Θέμα 3. (μονάδες 3.5)**

Για ένα ελαστικό υλικό η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας (ενέργεια / μονάδα απαραμόρφωτου όγκου) δίνεται ως:

$$w(F) = (\det F) \left[ \frac{\mu_1}{2} (I_B - 3) + \frac{\mu_2}{2} (II_B - \kappa) \right]$$

όπου  $F \in Lin_+$  είναι ο τανυστής της βαθμίδας παραμόρφωσης,  $\mu_1, \mu_2$  είναι σταθερές του υλικού,  $I_B, II_B$  είναι οι δύο πρώτες βασικές αναλλοίωτες του αριστερού Cauchy-Green τανυστή έντασης  $B$ , και  $\kappa$  είναι μια άγνωστη σταθερά.

- α) [μονάδες: 0.7] Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς  $\kappa$  έτσι ώστε στην απαραμόρφωτη κατάσταση η ενέργεια να μηδενίζεται.
- β) [μονάδες: 2.2] Υπολογίστε την καταστατική συνάρτηση Piola  $H(F)$ . (Υπόδειξη: για ευκολία χρησιμοποιείτε αν σας χρειαστεί τη σχέση  $\nabla_F \psi(F) = 2 \left( \nabla_B \hat{\psi}(B) \right) F$  του Θέματος 1).
- γ) [μονάδες: 0.6] Υπολογίστε την καταστατική συνάρτηση Cauchy  $G(F)$ .

**Θέμα 4. (μονάδες 2.0)**

Έστω μια παραμόρφωση με πεδίο μετατόπισης  $u(x)$  που έχει τις συνιστώσες:

$$u_1(x) = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2(x) = \alpha x_1 x_3, \quad u_3(x) = \varphi(x_1, x_2)$$

όπου  $\alpha$  σταθερά και  $\varphi(x_1, x_2)$  δις παραγωγίσιμη γνωστή βαθμωτή συνάρτηση δυο μεταβλητών.

Να υπολογιστούν:

- α) [μονάδες: 0.5] Οι συνιστώσες της παραμόρφωσης
- β) [μονάδες: 0.8] Τα μητρώα των τανυστών: βαθμίδα μετατόπισης, βαθμίδα παραμόρφωσης, δεξιού Cauchy-Green τανυστή έντασης.
- γ) [μονάδες: 0.7] Οι εντάσεις στις κατευθύνσεις των μοναδιαίων  $e_1, e_2, e_3$  της ορθοκανονικής βάσης και τις αντίστοιχες γωνίες διάτμησης.