ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μαθηματική Προσομοίωση Ι» (ΕΜ281)

Ηράκλειο, 5 Σεπτεμβρίου 2006

Θέμα 1. (μονάδες 4.0)

Η χρονική εξέλιξη της πυκνότητας x του πληθυσμού των θηραμάτων και της πυκνότητας y του πληθυσμού των κυνηγών τους, σε μια δασική περιοχή, περιγράφεται από το αυτόνομο σύστημα εξισώσεων

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\left(\frac{5}{2}x - 1 - x^2\right) - \frac{3}{10}xy, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = xy - \frac{3}{2}y.$$

α) Να προσδιοριστούν όλα τα κρίσιμα σημεία του συστήματος. [*μονάδες: 1.0*]

β) Εφαρμόζοντας ανάλυση γραμμικής ευστάθειας, προσδιορίστε το είδος κάθε κρίσιμου σημείου για το γραμμικοποιημένο σύστημα και χαρακτηρίστε την ευστάθεια του. Τι συμπεράσματα μπορείτε να εξάγετε για το είδος και την ευστάθεια κάθε κρίσιμου σημείου για το μη-γραμμικό σύστημα; [*μονάδες: 2.0*]

γ) Εξηγήστε αν μπορεί να συμβεί ή όχι καθένα από τα παρακάτω γεγονότα, όταν $t \to \infty$:
i) εξαφάνιση των θηραμάτων κατά την πλήρη απουσία κυνηγών,
ii) επιβίωση των κυνηγών κατά την πλήρη απουσία θηραμάτων,
iii) εξαφάνιση και των δύο ξεκινώντας από μη-μηδενικές αρχικές τιμές x, y,
iv) επιβίωση και των δύο ξεκινώντας από μη-μηδενικές αρχικές τιμές x, y. [*μονάδες: 1.0*]

Θέμα 2. (μονάδες 3.5)

α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς k για την οποία το πεδίο δυνάμεων που ορίζεται από τη σχέση $\vec{\boldsymbol{F}} = \left(3z\,\mathrm{e}^{xz} + kxy^3\right)\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \left(3x^2y^2\right)\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \left(3x\,\mathrm{e}^{xz}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_3$ είναι συντηρητικό, και να βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικού $V(x,y,z)$. Επίσης, υπολογίστε το έργο που παράγεται από το πεδίο $\vec{\boldsymbol{F}}$ κατά την κίνηση ενός σωματιδίου από το σημείο Α(2,–3,1) στο Β(–1,1, –2). [*μονάδες: 2.0*]

β) Να βρείτε την εξίσωση διασποράς, καθώς και την ταχύτητα φάσεως και ταχύτητα ομάδας συναρτήσει του κυματικού αριθμού, για καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha\frac{\partial u}{\partial x} - \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \qquad ih\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

όπου α, β, h, m είναι φυσικές σταθερές, και $i^2 = -1$. [*μονάδες: 1.5*]

Θέμα 3. (μονάδες 3.5)

Ένα σημειακό σαπούνι ολισθαίνει χωρίς τριβές σε ένα νιπτήρα σχήματος ημισφαιρίου ακτίνας R. Υποθέτοντας ότι το σαπούνι βρίσκεται πάντοτε σε επαφή με το νιπτήρα, να υπολογιστεί το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του συστήματος. Επίσης, να βρεθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης, ως προς κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας εξισώσεις Lagrange.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ Ι (ΕΜ 281)
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1

α) Θέτουμε:
$$\begin{cases} F(x,y) = x\left(\frac{5}{2}x - 1 - x^2\right) - \frac{3}{10}xy \\ G(x,y) = xy - \frac{3}{2}y \end{cases}$$

Στα κρίσιμα σημεία (x_*, y_*) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} F(x_*,y_*) &= 0 \\ G(x_*,y_*) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &[y_* = 0 \text{ ή } x_* = 3/2] \\ &\text{και} \\ &x_*\left(\frac{5}{2}x_* - 1 - x_*^2\right) - \frac{3}{10}x_* y_* = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\left[y_* = 0 \text{ και } x_*\left(x_*^2 - \frac{5}{2}x_* + 1\right) = 0\right] \\ &\text{ή} \\ &\left[x_* = \frac{3}{2} \text{ και } \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2} - 1 - \frac{9}{4}\right) - \frac{3}{10}\frac{3}{2}y_* = 0\right] \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &(x_*,y_*) = (0,0) \text{ ή } (x_*,y_*) = \left(\frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2}, 0\right) \\ &\text{ή } (x_*,y_*) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_*,y_*) = (0,0) \\ (x_*,y_*) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ (x_*,y_*) = (2,0) \\ (x_*,y_*) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

β) Θέτουμε $u = x - x_*$, $v = y - y_*$

Γραμμικοποίηση του αυτόνομου συστήματος Δ.Ε. γύρω από το (x_*, y_*) δίνει:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_x(x_*, y_*) & F_y(x_*, y_*) \\ G_x(x_*, y_*) & G_y(x_*, y_*) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

όπου: $F_x(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} = 5x - 3x^2 - 1 - \frac{3}{10}y$

$F_y(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{3}{10}x$, $G_x(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x} = y$

$G_y(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y} = x - \frac{3}{2}$

Άρα: $$A = \begin{bmatrix} 5x_* - 3x_*^2 - 1 - \frac{3}{10}y_* & -\frac{3}{10}x_* \\ y_* & x_* - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Για το κρίσιμο σημείο $(x_*, y_*) = (0,0)$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ με ιδιοτιμές $\begin{cases} \lambda_1 = -1 < 0 \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} < 0 \end{cases}$

Άρα το σημείο $(0,0)$ είναι κόμβος (κομβική καταβόθρα) και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Τα ίδια ισχύουν και για το μη-γραμμικό σύστημα που έχει δοθεί.

Για το κρίσιμο σημείο $(x_*, y_*) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{20} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ με ιδιοτιμές: } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{4} > 0 \\ \lambda_2 = -1 < 0 \end{cases}$$

Άρα το $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ είναι σαγματικό σημείο και άρα ασταθές.
Το ίδιο ισχύει και για το δεδομένο μη-γραμμικό σύστημα

Για το κρίσιμο σημείο $(x_*, y_*) = (2, 0)$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ με ιδιοτιμές: } \begin{cases} \lambda_1 = -3 < 0 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

Άρα και το $(2, 0)$ είναι σαγματικό σημείο και άρα ασταθές.
Τα ίδια ισχύουν και για το αρχικό μη-γραμμικό σύστημα

Για το κρίσιμο σημείο $(x_*, y_*) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{9}{20} \\ \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}, \text{ ιδιοτιμές: } \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda\left(-\frac{3}{4} - \lambda\right) + \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - 3}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm i\frac{\sqrt{39}}{8}$$

δηλαδή μιγαδικές ιδιοτιμές με $Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{3}{8} < 0$. Άρα το $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$ είναι σπειροειδές σημείο (σπειροειδής καταβόθρα) και ασυμπτωτικά ευσταθές. Το ίδιο ισχύει και για το αρχικό μη-γραμμικό σύστημα.

γ) i) Απουσία κυνηγών $(y \equiv 0)$, έχουμε:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = x\left(\frac{5}{2}x - 1 - x^2\right),$$ η οποία έχει κρίσιμο σημείο το $x_* = 0$ (εξαφάνιση θηραμάτων).

Εφαρμόζοντας ανάλυση γραμμικής ευστάθειας έχουμε:

$$f'(x_*) = 5x_* - 3x_*^2 - 1 \Rightarrow f'(0) = -1 < 0$$

οπότε το κ.σ. $x_* = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και επομένως είναι δυνατή η εξαφάνιση των θηραμάτων απουσία κυνηγών.

ii) Απουσία θηραμάτων $(x \equiv 0)$, έχουμε: $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{2}y \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = y_0 e^{-3t/2}$$ για την οποία $\lim_{t\to\infty} y = 0$ για οποιαδήποτε αρχική τιμή y_0. Άρα η επιβίωση των κυνηγών κατά την πλήρη απουσία θηραμάτων είναι αδύνατη.

iii) Εφόσον το $\underset{\sim}{x}_* = (0,0)$ είναι ένας ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε ζεύγος αρχικών τιμών $\underset{\sim}{x}_0 = (x(0), y(0))$ με $\|\underset{\sim}{x}_0 - \underset{\sim}{x}_*\| < \delta(\varepsilon)$, να έχουμε: $\|\underset{\sim}{x}(t) - \underset{\sim}{x}_*\| < \varepsilon$, $\forall\, t \geq 0$ και επιπλέον

$$\lim_{t\to\infty} \|\underset{\sim}{x}(t) - \underset{\sim}{x}_*\| = 0 \quad \left(\text{όπου } \underset{\sim}{x}(t) = (x(t), y(t))\right)$$

οπότε είναι δυνατή η εξαφάνιση και των δύο.

iv) Ομοίως με το (iii), προκύπτει ότι εφόσον το $\underset{\sim}{x}_* = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές είναι δυνατή η επιβίωση και των δύο πληθυσμών στις τιμές $\lim_{t\to\infty} x = \frac{3}{2}$ και $\lim_{t\to\infty} y = \frac{5}{3}$

ΘΕΜΑ 2

α) Το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, αν και μόνο αν $\text{curl}\,\vec{F}=\vec{0}$.

Δηλ.

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3ze^{xz}+kxy^3 & 3x^2y^2 & 3xe^{xz} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0\vec{e}_1 + \left(3zxe^{xz}+3e^{xz}-3e^{xz}-3xze^{xz}\right)\vec{e}_2$$

$$+\left(6xy^2-3kxy^2\right)\vec{e}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow 6xy^2-3kxy^2=0 \ \forall x,y$$

Άρα $3k=6 \Leftrightarrow \boxed{k=2}$

$$\vec{F}=-\text{grad}\,V \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -3ze^{xz}-2xy^3 & (1) \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -3x^2y^2 & (2) \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -3xe^{xz} & (3) \end{cases}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x προκύπτει:

$$V=-3e^{xz}-x^2y^3+C_1(y,z) \qquad (4)$$

Παραγωγίζοντας την (4) ως προς y και εξισώνοντας το αποτέλεσμα με το δεξί μέλος της (2) προκύπτει:

$$-3x^2y^2+\frac{\partial C_1}{\partial y} = -3x^2y^2 \Leftrightarrow \frac{\partial C_1}{\partial y}=0 \Leftrightarrow C_1=C_1(z)$$

Παραγωγίζοντας την (4) ως προς z και εξισώνοντας το αποτέλεσμα με το δεξί μέλος της (3) προκύπτει:

$$-3xe^{xz}+\frac{dC_1}{dz} = -3xe^{xz} \Leftrightarrow \frac{dC_1}{dz}=0 \Leftrightarrow C_1=\text{σταθ.}$$

Άρα: $V(x,y,z) = -3e^{xz} - x^2y^3 + \text{σταθ.}$

Το ζητούμενο έργο δίνεται ως:

$$\text{Έργο} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (-\text{grad}\,V)\cdot d\vec{r} = \int_A^B -dV = V_A - V_B =$$

$$= V(2,-3,1) - V(-1,1,-2) = -3e^2 - 4(-27) + 3e^2 + 1 =$$

$$= 109 \text{ [μον. έργου]}$$

β) Έστω επίπεδο μονοχρωματικό αρμονικό κύμα $u(x,t) = Ae^{i(qx-wt)}$ με πλάτος $A \neq 0$, γωνιακή συχνότητα w, και κυματικό αριθμό q.

Τότε:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -iwAe^{i(qx-wt)} = -iwu, & \dfrac{\partial u}{\partial x} = iqu \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -q^2 u, & \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -iq^3 u \end{array}\right\} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις (5) στην 1η δοθείσα εξίσωση προκύπτει:

$$-iwu = -\alpha i q u + i\beta q^3 u \underset{u\neq 0}{\Rightarrow} \boxed{w = \alpha q - \beta q^3} \quad \text{εξίσωση διασποράς}$$

Ταχύτητα φάσης: $V_p = \dfrac{w}{q} \Rightarrow V_p = \alpha - \beta q^2$

Ταχύτητα ομάδας: $V_g = \dfrac{\partial w}{\partial q} \Rightarrow V_g = \alpha - 3\beta q^2$

Αντίστοιχα, για τη 2η δοθείσα εξίσωση προκύπτει:

$$i\hbar(-i\omega) = -\frac{\hbar^2}{2m}(-q^2) \Rightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\hbar q^2}{2m}}$$ εξίσωση διασποράς

Ταχύτητα φάσεως: $V_p = \frac{\omega}{q} \Rightarrow V_p = \frac{\hbar q}{2m}$

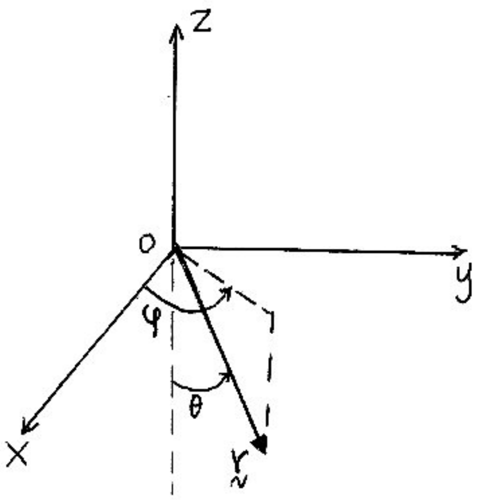
Ταχύτητα ομάδας: $V_g = \frac{\partial \omega}{\partial q} \Rightarrow V_g = \frac{\hbar q}{m}$

ΘΕΜΑ 3

Κίνηση στις 3 διαστάσεις

Ολόνομος δεσμός: $|\underset{\sim}{r}| = R$ (θεωρώντας την αρχή των αξόνων στο κέντρο του ημισφαιρίου)

Άρα: $3N - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ βαθμοί ελευθερίας



Θεωρούμε σφαιρικές συντεταγμένες (r, φ, θ) με $r = R$ ($=$σταθ.), φ τη γωνία που σχηματίζει η προβολή του $\underset{\sim}{r}$ στο επίπεδο (x, y) με το θετικό ημιάξονα x, και θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{r}$ με τον αρνητικό ημιάξονα z.

Γενικευμένες συντεταγμένες: φ, θ με $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$

Άρα: $\underset{\sim}{r} = (R\sin\theta\cos\varphi)\underset{\sim}{e}_1 + (R\sin\theta\sin\varphi)\underset{\sim}{e}_2 - (R\cos\theta)\underset{\sim}{e}_3 =$

$= R\underset{\sim}{e}_r$

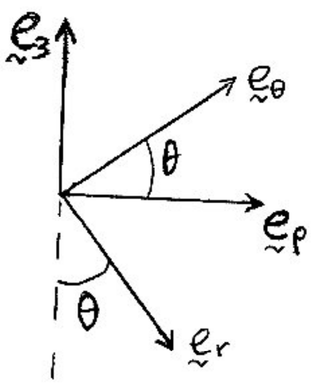
όπου $\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y, z αντίστοιχα, και $\underset{\sim}{e}_r = (\sin\theta\cos\varphi)\underset{\sim}{e}_1 + (\sin\theta\sin\varphi)\underset{\sim}{e}_2 - \cos\theta\,\underset{\sim}{e}_3 = \hat{\underset{\sim}{e}}_r(\varphi, \theta)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην ακτινική διεύθυνση.

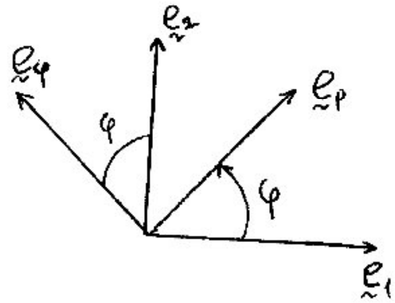
Ταχύτητα: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = R\,\dot{\mathbf{e}}_r = R\left(\dfrac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta}\dot{\theta} + \dfrac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right)$ (1)

όπου: $\dfrac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = (\cos\theta\cos\varphi)\mathbf{e}_1 + (\cos\theta\sin\varphi)\mathbf{e}_2 + (\sin\theta)\mathbf{e}_3 =$

$$= (\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2)\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta =$$

$$= \mathbf{e}_\rho\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta = \mathbf{e}_\theta \qquad (2)$$





$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = -(\sin\theta\sin\varphi)\mathbf{e}_1 + \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_2 = \sin\theta\left(-\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2\right) =$$

$$= (\sin\theta)\,\mathbf{e}_\varphi \qquad (3)$$

όπου $\mathbf{e}_\rho = \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της προβολής του $\mathbf{r}$ στο επίπεδο (x, y)

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) προκύπτει:

$$\mathbf{v} = R\left(\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi\right)$$

Κινητική Ενέργεια: $T = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)$

Συντηρητική Εξωτερική δύναμη (βαρύτητα): $-mg\,\mathbf{e}_3 = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = mgz + \text{σταθ.} \Rightarrow V = -mgR\cos\theta + \text{σταθ.}$

Συνάρτηση Lagrange: $L = T - V = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) +$

$$+ mgR\cos\theta + \text{σταθ.} = L(\theta, \dot\theta, \dot\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mR^2\dot\varphi\sin^2\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = mR^2\frac{d}{dt}\left(\dot\varphi\sin^2\theta\right)$$

Εξισώσεις Lagrange:
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot\theta - \cancel{m}R^{\cancel{2}}\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + \cancel{m}g\cancel{R}\sin\theta = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\dot\varphi\sin^2\theta\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &R\ddot\theta - R\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2 + g\sin\theta = 0 \\ &\sin^2\theta\,\ddot\varphi + 2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi\dot\theta = 0 \end{aligned}\right\}$$ Εξισώσεις κίνησης ως προς θ, φ