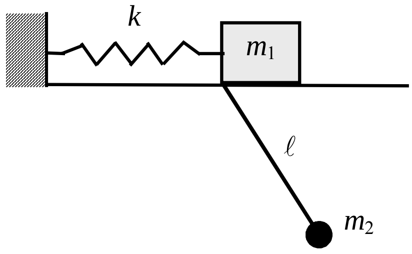
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

<u>Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μαθηματική Προσομοίωση Ι» (ΕΜ281)</u>

Ηράκλειο, 28 Ιανουαρίου 2006

<u>Θέμα 1. (μονάδες 3.5)</u>

Έστω το σύστημα ελατηρίου-εκκρεμούς του διπλανού σχήματος, το οποίο αποτελείται από ένα αβαρές γραμμικό ελατήριο φυσικού μήκους x_o και σταθεράς k, και δυο μάζες m_1, m_2 συνδεδεμένες μεταξύ τους με μια αβαρή μη-παραμορφώσιμη ράβδο μήκους ℓ. Το ένα άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ένα σταθερό τοίχο και η μάζα m_1 κινείται χωρίς τριβές. Υποθέτοντας κίνηση στο επίπεδο να υπολογιστεί το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του συστήματος. Επίσης, να βρεθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης, ως προς κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας εξισώσεις Lagrange.



<u>Θέμα 2. (μονάδες 3.5)</u>

Η αλληλεπίδραση του πληθυσμού x των φυτών με τον πληθυσμό y των φυτοφάγων ζώων σε μια δασική περιοχή περιγράφεται από το αυτόνομο σύστημα εξισώσεων

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax\left(1-\frac{x}{k}\right) - bxy, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cxy - hy,$$

όπου a,b,c,h,k είναι θετικές σταθερές, με $h < kc$.

α) Να προσδιοριστούν όλα τα κρίσιμα σημεία του συστήματος.

β) Εφαρμόζοντας ανάλυση γραμμικής ευστάθειας, προσδιορίστε το είδος του κάθε κρίσιμου σημείου για το γραμμικοποιημένο σύστημα και χαρακτηρίστε την ευστάθεια του, θεωρώντας, όπου είναι απαραίτητο, τις περιπτώσεις: i) $ah > 4kc(kc-h)$, ii) $ah < 4kc(kc-h)$, και iii) $ah = 4kc(kc-h)$.

γ) Τι συμπεράσματα μπορείτε να εξάγετε για το είδος και την ευστάθεια του κάθε κρίσιμου σημείου για το μη-γραμμικό σύστημα;

<u>Θέμα 3. (μονάδες 3)</u>

Θεωρούμε άπειρο πλήθος ατόμων με την ίδια μάζα m, τα οποία μπορούν να κινούνται σε 1 χωρική διάσταση x, με θέσεις $x_i(t)$, με $i \in \mathbb{Z}$. Υποθέτουμε ότι τα άτομα αλληλεπιδρούν ανά ζεύγη και η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης τους δίνεται από το δυναμικό Morse, δηλ. $V(\rho_{ij}) = -V_{ij}^*\left[e^{-2b(\rho_{ij}-\rho_{ij}^*)} - 2e^{-b(\rho_{ij}-\rho_{ij}^*)}\right]$, όπου ρ_{ij} είναι η απόσταση μεταξύ των ατόμων i και j, ρ_{ij}^* είναι η απόσταση μεταξύ των ατόμων i και j στην κατάσταση ισορροπίας, V_{ij}^* είναι το δυναμικό στη θέση ισορροπίας και b μια θετική σταθερά.

α) Να βρεθούν οι μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης κάθε ατόμου ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες x_i, θεωρώντας ότι η εξωτερική (ως προς το σύστημα όλων των ατόμων) δύναμη που ασκείται σε κάθε άτομο είναι αμελητέα.

β) Υπολογίστε τις σταθερές αλληλεπίδρασης K_p των γραμμικοποιημένων εξισώσεων κίνησης $m\ddot{u}_i = -\sum_{p=1}^{\infty} K_p(u_{i+p} + u_{i-p} - 2u_i)$, συναρτήσει των παραμέτρων b και V_{ij}^*.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ Ι (ΕΜ 281)

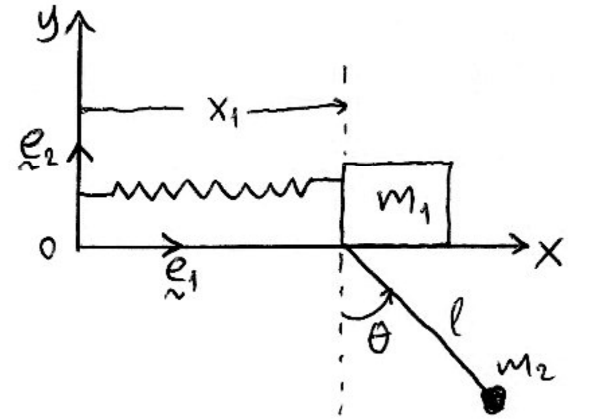
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1

Για κίνηση στο επίπεδο (δηλ. σε 2 διαστάσεις) των μαζών m_1 και m_2, χωρίς δεσμούς, θα είχαμε $2N = 2\cdot 2 = 4$ βαθμούς ελευθερίας. Όμως έχουμε τους εξής ολόνομους δεσμούς:

1) κίνηση της m_1 σε ευθεία γραμμή
2) σταθερή απόσταση μεταξύ m_1 και m_2

Άρα, τελικά οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος είναι $4-2=2$



Γενικευμένες συντεταγμένες: x_1, θ

$\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2$ μοναδιαία διανύσματα

$$\underset{\sim}{r}_1 = x_1 \underset{\sim}{e}_1$$

$$\underset{\sim}{r}_2 = x_1 \underset{\sim}{e}_1 + l\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_1 - l\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_2 = (x_1 + l\sin\theta)\underset{\sim}{e}_1 - l\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_2$$

$$\underset{\sim}{v}_1 = \dot{\underset{\sim}{r}}_1 = \dot{x}_1 \underset{\sim}{e}_1$$

$$\underset{\sim}{v}_2 = \dot{\underset{\sim}{r}}_2 = (\dot{x}_1 + \dot{\theta} l\cos\theta)\underset{\sim}{e}_1 + l\dot{\theta}\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_2$$

Κινητική ενέργεια $T = \frac{1}{2}m_1(\underset{\sim}{v}_1\cdot\underset{\sim}{v}_1) + \frac{1}{2}m_2(\underset{\sim}{v}_2\cdot\underset{\sim}{v}_2) =$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}_1 + \dot{\theta} l\cos\theta)^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_1^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_1^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \cos\theta \, \dot{x}_1 \dot{\theta} \right) = T(\theta, \dot{x}_1, \dot{\theta})$$

Συντηρητικές εξωτερικές δυνάμεις (βάρος και δύναμη ελατηρίου)

Δυναμική ενέργεια: $V = \frac{1}{2} k (x_1 - x_0)^2 - m_2 g \ell \cos\theta + \text{στα}\vartheta. = V(x_1, \theta)$

Συνάρτηση Lagrange: $L(x_1, \theta, \dot{x}_1, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{x}_1, \dot{\theta}) - V(x_1, \theta)$

$$\Rightarrow L(x_1, \theta, \dot{x}_1, \dot{\theta}) = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \cos\theta \, \dot{x}_1 \dot{\theta} \right) - \frac{k}{2} (x_1 - x_0)^2 + m_2 g \ell \cos\theta + \text{στα}\vartheta.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_0) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 \ell \dot{\theta} \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 \ell \left(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 \ell \left(\dot{x}_1 \dot{\theta} \sin\theta + g \sin\theta \right) = -m_2 \ell \sin\theta \left(\dot{x}_1 \dot{\theta} + g \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 \ell \left(\ell \dot{\theta} + \dot{x}_1 \cos\theta \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_2 \ell \left(\ell \ddot{\theta} - \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin\theta + \ddot{x}_1 \cos\theta \right)$$

Εξισώσεις Lagrange: $\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_0) &= m_2 \ell \left(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta} \cos\theta \right) \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta &= -\frac{\ddot{x}_1}{\ell} \cos\theta \end{aligned} \right\} \text{εξισώσεις κίνησης ως προς } x_1, \theta$$

ΘΕΜΑ 2

α) Θέτουμε: $\begin{cases} F(x,y) = \alpha x\left(1-\dfrac{x}{k}\right) - bxy \\ G(x,y) = cxy - hy \end{cases}$

Στα κρίσιμα σημεία (x_*, y_*), έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} F(x_*,y_*)=0 \\ G(x_*,y_*)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} cx_*y_* - hy_* = 0 \\ \alpha x_*\left(1-\dfrac{x_*}{k}\right) - bx_*y_* = 0 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \left[y_*=0 \text{ ή } x_* = h/c\right] \\ \text{και} \\ \alpha x_*\left(1-\dfrac{x_*}{k}\right) - bx_*y_* = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \left[y_*=0 \text{ και } \alpha x_*\left(1-\dfrac{x_*}{k}\right)=0\right] \Rightarrow \left[(x_*,y_*)=(0,0) \text{ ή } (x_*,y_*)=(k,0)\right] \\ \text{ή} \\ \left[x_*=h/c \text{ και } \alpha\dfrac{h}{\cancel{c}}\left(1-\dfrac{h}{kc}\right)=b\dfrac{h}{\cancel{c}}y_*\right] \Rightarrow (x_*,y_*)=\left(\dfrac{h}{c}, \dfrac{\alpha}{b}\left(1-\dfrac{h}{kc}\right)\right) \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_*,y_*)=(0,0) \\ (x_*,y_*)=(k,0) \\ (x_*,y_*)=\left(\dfrac{h}{c}, \dfrac{\alpha}{b}\left(1-\dfrac{h}{kc}\right)\right) \end{cases}$$

β) Θέτουμε $u = x - x_*$, $v = y - y_*$

Γραμμικοποίηση του συστήματος που δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_x(x_*,y_*) & F_y(x_*,y_*) \\ G_x(x_*,y_*) & G_y(x_*,y_*) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

όπου: $F_x(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial x} = \alpha\left(1-\dfrac{2x}{k}\right) - by$, $F_y(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y} = -bx$

$G_x(x,y) = \dfrac{\partial G}{\partial x} = cy$, $G_y(x,y) = \dfrac{\partial G}{\partial y} = cx - h$

Άρα: $$A = \begin{bmatrix} \alpha\left(1-\frac{2x_*}{K}\right)-by_* & -bx_* \\ cy_* & cx_*-h \end{bmatrix}$$

Για το κρίσιμο σημείο $(x_*, y_*) = (0,0)$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} \quad \text{με ιδιοτιμές} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha > 0 \\ \lambda_2 = -h < 0 \end{cases}$$

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο και άρα ασταθές.
Το ίδιο ισχύει και για το δεδομένο μη-γραμμικό σύστημα

Για το κρίσιμο σημείο $(x_*, y_*) = (K, 0)$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & -bK \\ 0 & cK-h \end{bmatrix} \quad \text{με ιδιοτιμές:} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\alpha < 0 \\ \lambda_2 = cK-h > 0 \end{cases}$$

Άρα το $(K,0)$ είναι σαγματικό σημείο και άρα ασταθές.
Το ίδιο ισχύει και για το δεδομένο μη-γραμμικό σύστημα

Για το κρίσιμο σημείο $(x_*, y_*) = \left(\frac{h}{c}, \frac{\alpha}{b}\left(1-\frac{h}{Kc}\right)\right)$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha h}{Kc} & -\frac{bh}{c} \\ \frac{\alpha c}{b}\left(1-\frac{h}{Kc}\right) & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ιδιοτιμές: } \det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda\left(\lambda + \frac{\alpha h}{Kc}\right) + \frac{\cancel{b}h}{\cancel{c}}\frac{\alpha \cancel{c}}{\cancel{b}}\left(1-\frac{h}{Kc}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{\alpha h}{Kc}\lambda + \alpha h\left(1-\frac{h}{Kc}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\alpha h}{Kc} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha h}{Kc}\right)^2 - 4\alpha h\left(1-\frac{h}{Kc}\right)}\right]$$

$$\Delta=\left(\frac{\alpha h}{kc}\right)^2-4\alpha h\left(1-\frac{h}{kc}\right)=\frac{\alpha h}{(kc)^2}\Big[\alpha h-4kc(kc-h)\Big]$$

<u>Περιπτώσεις:</u>

i) $\Delta>0 \Leftrightarrow \alpha h>4kc(kc-h)$, τότε $\lambda_{1,2}$ είναι πραγματικές με $\lambda_1<\lambda_2<0$. Άρα το σημείο $\left(\frac{h}{c},\frac{\alpha}{b}\left(1-\frac{h}{kc}\right)\right)$ είναι κόμβος (κομβική καταβόθρα) και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το ίδιο ισχύει και για το μη-γραμμικό σύστημα.

ii) $\Delta<0 \Leftrightarrow \alpha h<4kc(kc-h)$, τότε $\lambda_{1,2}$ είναι μιγαδικές ιδιοτιμές με $Re(\lambda_{1,2})=-\frac{\alpha h}{2kc}<0$. Άρα το $\left(\frac{h}{c},\frac{\alpha}{b}\left(1-\frac{h}{kc}\right)\right)$ είναι σπειροειδές σημείο (σπειροειδής καταβόθρα) και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το ίδιο ισχύει και για το μη-γραμμικό σύστημα.

iii) $\Delta=0 \Leftrightarrow \alpha h=4kc(kc-h)$, τότε $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{\alpha h}{2kc}=$

$=-2(kc-h)<0$, και ο πίνακας A γίνεται:

$$A=\begin{bmatrix}-4(kc-h) & -bh/c\\ \frac{4c}{bh}(kc-h)^2 & 0\end{bmatrix}.$$ Αν $\underset{\sim}{\xi}=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη λ_1 τότε: $A\underset{\sim}{\xi}=\lambda_1\underset{\sim}{\xi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi_2=-\frac{2c}{bh}(kc-h)\xi_1$. Δηλ. $\underset{\sim}{\xi}=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{2c}{bh}(kc-h)\end{bmatrix}\xi_1$. Άρα υπάρχει μόνο ένα γραμμικώς ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι το $\left(\frac{h}{c},\frac{\alpha}{b}\left(1-\frac{h}{kc}\right)\right)$ είναι ένας ασυμπτωτικά ευσταθής νόθος κόμβος. Στην περίπτωση του αρχικού μη-γραμμικού συστήματος, το $\left(\frac{h}{c},\frac{\alpha}{b}\left(1-\frac{h}{kc}\right)\right)$ θα είναι είτε κόμβος είτε σπειροειδές σημείο, και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

γ) Απαντήθηκε ήδη στο (β).

ΘΕΜΑ 3

α) $\cdots \underset{i-1}{\overset{m}{\bigcirc}} \quad \underset{i}{\overset{m}{\bigcirc}} \quad \underset{i+1}{\overset{m}{\bigcirc}} \cdots$ με $i \in \mathbb{Z}$ $\quad \xrightarrow{x} \mathbf{e}_1$

Διάνυσμα θέσης ατόμου i: $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_1$

Ο νόμος ισοζυγίου της ορμής για κάθε άτομο i είναι:

$$m\ddot{x}_i \mathbf{e}_1 = \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq i}}^{\infty} \mathbf{F}_{ji} \qquad (1)$$

όπου $\mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi}$ η εξωτερική (ως προς το σύστημα όλων των ατόμων) δύναμη που ασκείται στο άτομο i και η οποία θεωρείται αμελητέα, δηλ. $\mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi} = \mathbf{0}$.

$\mathbf{F}_{ji}$ είναι η δύναμη που ασκείται στο άτομο i από το άτομο j και είναι τέτοια ώστε $\mathbf{F}_{ji} = -\nabla V(\rho_{ij})$. Εφόσον η V εξαρτάται μόνον από την απόσταση ρ_{ij}, οι δυνάμεις $\mathbf{F}_{ji}$ θα είναι κεντρικές και ίσες με

$$\mathbf{F}_{ji} = -\frac{dV(\rho_{ij})}{d\rho_{ij}} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = -\frac{dV(\rho_{ij})}{d\rho_{ij}} \frac{(x_i - x_j)\mathbf{e}_1}{\rho_{ij}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{ji} = -\frac{2bV_{ij}^*}{\rho_{ij}} \left[e^{-2b(\rho_{ij}-\rho_{ij}^*)} - e^{-b(\rho_{ij}-\rho_{ij}^*)} \right] (x_i - x_j)\mathbf{e}_1 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\rho_{ij} = |x_i - x_j|$, προκύπτει το ζητούμενο:

$$m\ddot{x}_i = \sum_{j\neq i} 2bV_{ij}^* \left\{ \exp\left[-b(|x_i - x_j| - \rho_{ij}^*)\right] - \exp\left[-2b(|x_i - x_j| - \rho_{ij}^*)\right] \right\} \frac{(x_i - x_j)}{|x_i - x_j|}$$

β) Εξ' ορισμού $K_\rho = K_{\rho\theta}$, όπου $K_{\ell\kappa} = \left(\dfrac{\partial^2 V_{o\lambda}}{\partial X_\ell \partial X_\kappa} \right)_{\underset{\sim}{X}^*}$

$\underset{\sim}{X}^* = (\dots, X_{i-1}^*, X_i^*, X_{i+1}^*, \dots)$ η κατάσταση ισορροπίας, και

$$V_{o\lambda} = V_{o\lambda}(\dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots) = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq i}}^{\infty} V(\rho_{ij})$$

είναι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του συστήματος όλων των ατόμων

Έχουμε: $$\frac{\partial V_{o\lambda}}{\partial X_\kappa} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq i}}^{\infty} \frac{\partial V(\rho_{ij})}{\partial X_\kappa} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq i}}^{\infty} \frac{\partial V(|X_i - X_j|)}{\partial X_\kappa} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq \kappa}}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq i}}^{\infty} \frac{\partial V(|X_i - X_j|)}{\partial X_\kappa} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq \kappa}}^{\infty} \frac{\partial V(|X_\kappa - X_j|)}{\partial X_\kappa} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq \kappa}}^{\infty} \frac{\partial V(|X_i - X_\kappa|)}{\partial X_\kappa} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq \kappa}}^{\infty} \frac{\partial V(|X_\kappa - X_j|)}{\partial X_\kappa} =$$

$$= \sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq \kappa}}^{\infty} \frac{\partial V(|X_i - X_\kappa|)}{\partial X_\kappa} = \sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq \kappa}}^{\infty} \frac{dV(\rho_{i\kappa})}{d\rho_{i\kappa}} \frac{\partial \rho_{i\kappa}}{\partial X_\kappa} =$$

$$= \sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq \kappa}}^{\infty} \frac{dV(\rho_{i\kappa})}{d\rho_{i\kappa}} \frac{(X_\kappa - X_i)}{\rho_{i\kappa}}$$

και $$\frac{\partial^2 V_{o\lambda}}{\partial X_\ell \partial X_\kappa} = \sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq \kappa}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial X_\ell}\left[\frac{dV(\rho_{i\kappa})}{d\rho_{i\kappa}} \frac{(X_\kappa - X_i)}{\rho_{i\kappa}}\right] \underset{\ell\neq\kappa}{=} \frac{\partial}{\partial X_\ell}\left[\frac{dV(\rho_{\ell\kappa})}{d\rho_{\ell\kappa}} \frac{(X_\kappa - X_\ell)}{\rho_{\ell\kappa}}\right]$$

$$= \frac{d^2 V(\rho_{\ell\kappa})}{d\rho_{\ell\kappa}^2} \frac{X_\ell - X_\kappa}{\rho_{\ell\kappa}} \frac{X_\kappa - X_\ell}{\rho_{\ell\kappa}} = -\frac{d^2 V(\rho_{\ell\kappa})}{d\rho_{\ell\kappa}^2}$$

Όμως: $$\frac{dV(\rho_{\ell\kappa})}{d\rho_{\ell\kappa}} = 2b\, V_{\ell\kappa}^* \left[e^{-2b(\rho_{\ell\kappa} - \rho_{\ell\kappa}^*)} - e^{-b(\rho_{\ell\kappa} - \rho_{\ell\kappa}^*)}\right]$$

και $\dfrac{d^2 V(\rho_{\ell\kappa})}{d\rho_{\ell\kappa}^2} = -2b^2 V_{\ell\kappa}^* \left[2e^{-2b(\rho_{\ell\kappa}-\rho_{\ell\kappa}^*)} - e^{-b(\rho_{\ell\kappa}-\rho_{\ell\kappa}^*)} \right]$

Άρα $K_{\ell\kappa} = \left(\dfrac{\partial^2 V_{o\lambda}}{\partial X_\ell \, \partial X_\kappa} \right)_{\underset{\sim}{X}^*} = -\left(\dfrac{d^2 V(\rho_{\ell\kappa})}{d\rho_{\ell\kappa}^2} \right)_{\rho_{\ell\kappa}^*} =$

$$= 2b^2 V_{\ell\kappa}^*$$

και: $K_\rho = K_{\rho\varnothing} = 2b^2 V_{\rho\varnothing}^*$