ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μαθηματική Προσομοίωση Ι» (ΕΜ281)

Ηράκλειο, 03 Δεκεμβρίου 2005

Θέμα 1. (μονάδες 3)

Μια εξίσωση που έχει χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση της εξέλιξης πληθυσμών είναι η εξίσωση Gompertz:

$$\frac{dy}{dt} = ry\ln(K/y)$$

όπου r και K είναι θετικές σταθερές.

α) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(y) = ry\ln(K/y)$ ως προς y.

β) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και να χαρακτηριστούν ως προς την ευστάθεια τους.

γ) Βρείτε τις περιοχές τιμών του $y > 0$, στις οποίες η γραφική παράσταση y ως προς t στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω και εκείνες στις οποίες στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Σχεδιάστε αντίστοιχες ποιοτικές καμπύλες της $y(t)$ για διάφορες αρχικές τιμές $y(0) = y_o$.

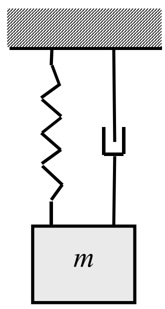
δ) Βρείτε τις περιοχές τιμών του $y > 0$, στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής dy/dt της εξίσωσης Gompertz είναι ίσος ή μεγαλύτερος από εκείνον της λογιστικής εξίσωσης $dy/dt = ry[1-(y/K)]$

ε) Να λυθεί η εξίσωση Gompertz με αρχική συνθήκη $y(0) = y_o$

Θέμα 2. (μονάδες 3.5)

Ένα στερεό σώμα μάζας m συνδέεται με ένα σύστημα ελατηρίου – αποσβεστήρα όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέτουμε ότι η δύναμη του αποσβεστήρα μεταβάλλεται γραμμικά με την ταχύτητα υ του σώματος, ενώ η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο δεν δίνεται από το νόμο του Hooke, αλλά ικανοποιεί τη σχέση $F_\varepsilon = k(x-L) - k_1(x-L)^3$, όπου L το φυσικό μήκος του ελατηρίου (απουσία δυνάμεων) και $x = x(t)$ το τρέχον μήκος του. Επίσης, k, k_1 είναι θετικές σταθερές.

α) Να δειχθεί ότι η μετατόπιση $u(t)$ της μάζας από το σημείο ισορροπίας της ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση: $m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku - k_1u^3 = 3k_1(x_* - L)(x_* - L + u)u$, όπου $\gamma > 0$ είναι η σταθερά του αποσβεστήρα, και x_* το μήκος του ελατηρίου στην ισορροπία.

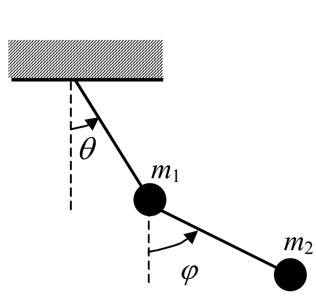


β) Γράψτε την εξίσωση $m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku - k_1u^3 = 0$ με τη μορφή αυτόνομου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης και προσδιορίστε όλα τα κρίσιμα σημεία του συστήματος αυτού.

γ) Εφαρμόζοντας ανάλυση γραμμικής ευστάθειας στο σύστημα του ερωτήματος (β), προσδιορίστε το είδος του κάθε κρίσιμου σημείου για το γραμμικοποιημένο σύστημα και χαρακτηρίστε την ευστάθεια του (θεωρώντας τις περιπτώσεις: i) $\gamma^2 > 4km$, ii) $\gamma^2 < 4km$ με $\gamma \neq 0$, και iii) $\gamma = 0$). Τι συμπεράσματα μπορείτε να εξάγετε για το μη-γραμμικό σύστημα.

Θέμα 3. (μονάδες 3.5)

Έστω το διπλό εκκρεμές του διπλανού σχήματος, το οποίο αποτελείται από δυο μάζες m_1, m_2 και αβαρείς μη-παραμορφώσιμες ράβδους με μήκη ℓ_1 και ℓ_2. Υποθέτοντας κίνηση στις δύο διαστάσεις να βρεθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεις κίνησης ως προς τις γωνίες $\theta(t)$ και $\varphi(t)$, χρησιμοποιώντας τους νόμους του Newton.



Χρήσιμα αθροίσματα:

$\sin(\theta \pm \varphi) = \sin\theta\cos\varphi \pm \cos\theta\sin\varphi$

$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos\theta\cos\varphi \mp \sin\theta\sin\varphi$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ Ι (ΕΜ281)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ (ΔΕΚ.'05)

ΘΕΜΑ 1

α) $f(y) = ry\ln(K/y)$ με $y>0$

$$\lim_{y\to 0^+} f(y) = \lim_{y\to 0^+}(ry\ln K - ry\ln y) = \lim_{y\to 0^+}(-ry\ln y) =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{-r\ln y}{\frac{1}{y}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{D' Hospital}}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{-r/y}{-1/y^2} = \lim_{y\to 0^+} ry = 0$$

$$\lim_{y\to +\infty} f(y) = \lim_{y\to+\infty} ry\ln(K/y) = -\infty$$

$$f(y) = 0 \underset{y>0}{\Rightarrow} y = K$$

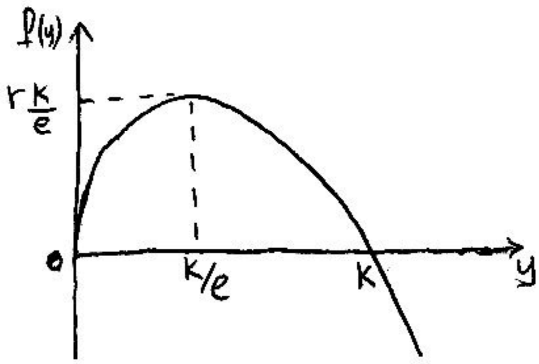
$$f'(y) = r\ln K - r\ln y - ry\,1/y \Rightarrow f'(y) = r\left[\ln\left(\frac{K}{y}\right) - 1\right]$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{K}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{K}{y} = e \Leftrightarrow y = \frac{K}{e}$$

$$f''(y) = (r\ln K - r\ln y)' \Rightarrow f''(y) = -\frac{r}{y} < 0 \quad , \forall\, y>0$$

Άρα η $f(y)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και το $y = K/e$ είναι μέγιστο με τιμή $f(K/e) = r\frac{K}{e}\ln\left(\frac{Ke}{K}\right) = \frac{rK}{e}$

Επίσης, $\lim_{y\to 0^+} f'(y) = +\infty$



β) Κρίσιμα σημεία: $f(y_*)=0 \Rightarrow r y_* \ln\left(K/y_*\right)=0 \overset{y_*>0}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow y_* = K$$

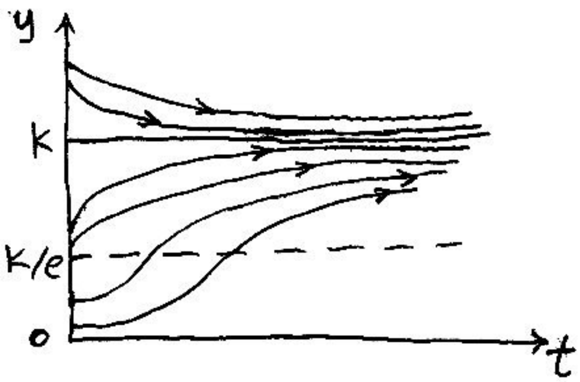
Άρα κρίσιμα σημεία: $y_*=0$ και $y_*=K$

Ανάλυση γραμμικής ευστάθειας:

για $y_*=K$, $\omega=\left(\dfrac{df}{dy}\right)_{y=0} < 0 \Rightarrow$ ασυμπτωτ. ευσταθές

γ)

y	0	K/e		K	$+\infty$
$y'=f$	$+$		$+$	0	$-$
y	↑		↑		↓
f'	$+$	0	$-$		$-$
$y''=ff'$	$+$	0	$-$	0	$+$
y					



Επιβεβαιώνεται πως $y_*=K$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

δ) $ry\ln\left(\frac{K}{y}\right) \geq ry\left(1-\frac{y}{K}\right) \underset{y>0}{\Longleftrightarrow} \ln\left(\frac{K}{y}\right)+\frac{y}{K}-1 \geq 0$

Θέτουμε $x=\frac{K}{y}$ οπότε ψάχνουμε τα $x>0$ για τα οποία:

$$\ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0$$

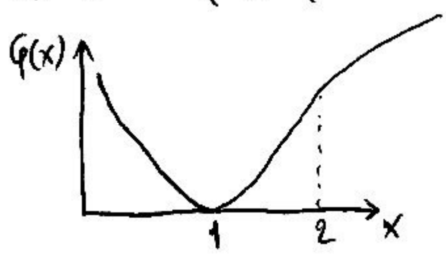
Έστω $\varphi(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ με $x > 0$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ \varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} \varphi''(x) > 0, & x < 2 \to \text{κοίλα άνω} \\ \varphi''(x) < 0, & x > 2 \to \text{κοίλα κάτω} \end{cases}$$

Άρα στο $x=1$ υπάρχει ελάχιστο με τιμή $\varphi(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$

Δηλ. ένα πρόχειρο διάγραμμα της $\varphi(x)$ είναι το εξής:



Άρα $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$

Οπότε $ry \ln\left(\frac{K}{y}\right) \geq ry\left(1 - \frac{y}{K}\right), \forall y > 0$

ε) Θέτουμε $x = \ln(K/y) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{y}{K}\left(-\frac{K}{y^2}\right)\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$

Άρα: $\frac{dy}{dt} = ry\ln\left(\frac{K}{y}\right) \Rightarrow -y\frac{dx}{dt} = ryx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -rx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -r\int dt \Rightarrow \ln x = -rt + c_1 \Rightarrow x = e^{-rt}e^{c_1} \Rightarrow$

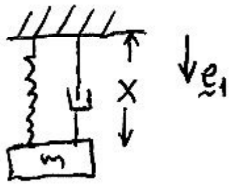
$\Rightarrow \ln\left(\frac{K}{y}\right) = e^{-rt}e^{c_1} \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{K}\right) = -e^{-rt}e^{c_1} \qquad (1)$

Η αρχική συνθήκη $y(0) = y_0$ δίνει: $\ln\left(\frac{y_0}{K}\right) = -e^{c_1}$, οπότε

η (1) γίνεται: $\ln\left(\frac{y}{K}\right) = \ln\left(\frac{y_0}{K}\right)e^{-rt} \Rightarrow y = K\exp\left\{\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)e^{-rt}\right\}$

ΘΕΜΑ 2

α) Από το 2ο νόμο κίνησης του Newton (Νόμος Ισοζυγίου Ορμής), έχουμε: $m\ddot{x}(t) = \sum F$ (άθροισμα δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα)



$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) = -\underbrace{F_\varepsilon(x(t))}_{\substack{\text{δύναμη}\\ \text{ελατηρίου}}} + \underbrace{F_\mu(\dot{x}(t))}_{\substack{\text{δύναμη}\\ \text{αποσβεστήρα}}} + \underbrace{mg}_{\text{βαρύτητα}}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -k(x-L) + k_1(x-L)^3 - \gamma\dot{x} + mg \qquad (1)$$

Στην ισορροπία: $x(t) = x_* = \text{σταθ.} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} = 0 \end{cases}$

οπότε η (1) δίνει: $0 = -k(x_*-L) + k_1(x_*-L)^3 + mg \qquad (2)$

Έστω $u(t) = x(t) - x_* \Rightarrow x = x_* + u \qquad (3)$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1), παίρνουμε:

$$m\ddot{u} = -k(x_*+u-L) + k_1(x_*+u-L)^3 - \gamma\dot{u} + mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{u} = -ku + k_1u^3 - \gamma\dot{u} \underbrace{- k(x_*-L) + k_1(x_*-L)^3 + mg}_{0 \text{ λόγω της } (2)} + 3k_1(x_*-L)u(x_*-L+u)$$

$$\Rightarrow m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku - k_1u^3 = 3k_1(x_*-L)u(x_*-L+u)$$

β) Ξεκινώντας από την εξίσωση: $m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku - k_1u^3 = 0 \qquad (4)$

Θέτουμε $v = \dot{u}$ (5)

οπότε η (4) γίνεται $m\dot{v} + \gamma v + ku - k_1u^3 = 0 \qquad (6)$

$$\left.\begin{matrix}(5)\\(6)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}u + \frac{k_1}{m}u^3 - \frac{\gamma}{m}v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F(u,v) \\ \frac{dv}{dt} &= G(u,v) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

όπου $F(u,v) = v$ και $G(u,v) = -\frac{K}{m}u + \frac{K_1}{m}u^3 - \frac{\gamma}{m}v$

Στα κρίσιμα σημεία (u_*, v_*) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} F(u_*, v_*) = 0 \\ G(u_*, v_*) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_* = 0 \\ K_1 u_*^3 - K u_* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_* = 0 \\ \text{και} \\ u_* = 0 \text{ ή } u_*^2 = K/K_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u_*, v_*) = (0, 0) \\ (u_*, v_*) = \left(-\sqrt{\frac{K}{K_1}}, 0\right) \\ (u_*, v_*) = \left(\sqrt{\frac{K}{K_1}}, 0\right) \end{cases}$$

γ) Θέτουμε: $U = u - u_*$, $V = v - v_*$

Γραμμικοποίηση του συστήματος (7) δίνει:

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_u(u_*, v_*) & F_v(u_*, v_*) \\ G_u(u_*, v_*) & G_v(u_*, v_*) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

όπου $F_u(u,v) = \frac{\partial F}{\partial u} = 0$, $F_v(u,v) = \frac{\partial F}{\partial v} = 1$

$$G_u(u,v) = \frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{K}{m} + \frac{3K_1}{m}u^2 , \quad G_v(u,v) = \frac{\partial G}{\partial v} = -\frac{\gamma}{m}$$

Άρα: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} + \frac{3K_1}{m}u_*^2 & -\gamma/m \end{bmatrix}$

Για το κρίσιμο σημείο $(u_*, v_*) = (0,0)$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\gamma}{m}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda\left(\frac{\gamma}{m}+\lambda\right) + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}$$

Περιπτώσεις:

i) Αν $\gamma^2 > 4km$ τότε $\lambda_{1,2}$ πραγματικές ιδιοτιμές και $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Άρα το $(0,0)$ είναι κόμβος (κομβική καταβόθρα) και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το ίδιο ισχύει και για το μη-γραμμικό σύστημα (7).

ii) Αν $\gamma^2 < 4km$ και $\gamma \neq 0$, τότε $\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}$ δηλ. $\lambda_{1,2}$ είναι συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές με $Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{\gamma}{2m} < 0$. Άρα το $(0,0)$ είναι σπειροειδές σημείο (σπειροειδής καταβόθρα) και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το ίδιο ισχύει και για το μη-γραμμικό σύστημα (7)

iii) Αν $\gamma = 0$ τότε $\lambda_{1,2} = \pm i\frac{\sqrt{4km}}{2m} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ δηλ. φανταστικές ιδιοτιμές. Άρα το $(0,0)$ είναι κέντρο και άρα ευσταθές. Στο μη-γραμμικό σύστημα, το $(0,0)$ μπορεί να είναι είτε κέντρο (και άρα ευσταθές), είτε σπειροειδές σημείο (ασυμπτωτικά ευσταθές ή ασταθές)

Για $(u_*, v_*) = \left(0, \pm\sqrt{\frac{K}{K_1}}\right)$ έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} + \frac{3\cancel{K_1}}{m}\frac{K}{\cancel{K_1}} & -\frac{\gamma}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2K}{m} & -\frac{\gamma}{m} \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{2K}{m} & -\frac{\gamma}{m}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda\left(\frac{\gamma}{m}+\lambda\right) - \frac{2K}{m} = 0 \Rightarrow m\lambda^2 + \gamma\lambda - 2K = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 8Km}}{2m}$$

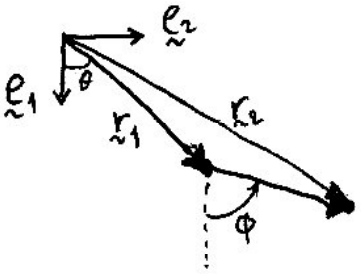
Άρα, $\lambda_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2+8Km}}{2m} < 0$ και $\lambda_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2+8Km}}{2m} > 0$

για όλες τις τιμές των $K, \gamma, m > 0$.

Άρα τα σημεία $\left(0, \pm\sqrt{\frac{K}{K_1}}\right)$ είναι σαγματικά και άρα ασταθή.

Το ίδιο ισχύει και για το μη-γραμμικό σύστημα (7).

ΘΕΜΑ 3

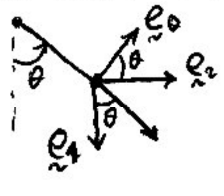


Διανύσματα θέσης των μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα:

$$\underset{\sim}{r}_1(t) = l_1\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + l_1 \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_2 \quad (1)$$

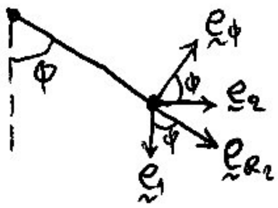
$$\underset{\sim}{r}_2(t) = \underset{\sim}{r}_1(t) + l_2\cos\phi\, \underset{\sim}{e}_1 + l_2\sin\phi\, \underset{\sim}{e}_2 \quad (2)$$

Σχέσεις μεταξύ μοναδιαίων διανυσμάτων $\underset{\sim}{e}_{R_1}$ (μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της ράβδου 1), $\underset{\sim}{e}_\theta$ (μοναδιαίο κατά τη διεύθυνση της γωνίας θ)



$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{e}_{R_1} &= \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{e}_\theta &= -\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{e}}_{R_1} &= \dot\theta\, \underset{\sim}{e}_\theta \\ \dot{\underset{\sim}{e}}_\theta &= -\dot\theta\, \underset{\sim}{e}_{R_1} \end{aligned}\right.$$

Σχέσεις μεταξύ μοναδιαίων διανυσμάτων $\underset{\sim}{e}_{R_2}$ (μοναδιαίο κατά τη διεύθυνση της ράβδου 2), $\underset{\sim}{e}_{\phi}$ (μοναδιαίο κατά τη διεύθυνση της ϕ)



$$\left.\begin{array}{l}\underset{\sim}{e}_{R_2} = \cos\phi\, \underset{\sim}{e}_1 + \sin\phi\, \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{e}_{\phi} = -\sin\phi\, \underset{\sim}{e}_1 + \cos\phi\, \underset{\sim}{e}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{\underset{\sim}{e}}_{R_2} = \dot{\phi}\, \underset{\sim}{e}_{\phi} \\ \dot{\underset{\sim}{e}}_{\phi} = -\dot{\phi}\, \underset{\sim}{e}_{R_2}\end{array}\right.$$

Από την (1) έχουμε ότι:

$$\dot{\underset{\sim}{r}}_1(t) = \frac{d}{dt}\left[l_1\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + l_1\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_2\right] = l_1\left[-\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_2\right]\dot{\theta} =$$

$$= l_1\dot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_{\theta}$$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}}_1(t) = \frac{d}{dt}\left(l_1\dot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_{\theta}\right) = l_1\left(\ddot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_{\theta} + \dot{\theta}\, \dot{\underset{\sim}{e}}_{\theta}\right) = l_1\left(\ddot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_{\theta} - \dot{\theta}^2 \underset{\sim}{e}_{R_1}\right) \qquad (3)$$

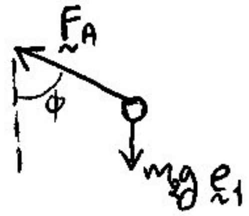
Από την (2) έχουμε ότι:

$$\dot{\underset{\sim}{r}}_2(t) = \dot{\underset{\sim}{r}}_1(t) + \frac{d}{dt}\left[l_2\cos\phi\, \underset{\sim}{e}_1 + l_2\sin\phi\, \underset{\sim}{e}_2\right] = \dot{\underset{\sim}{r}}_1(t) + l_2\dot{\phi}\, \underset{\sim}{e}_{\phi}$$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}}_2(t) = \ddot{\underset{\sim}{r}}_1(t) + \frac{d}{dt}\left(l_2\dot{\phi}\, \underset{\sim}{e}_{\phi}\right) = \ddot{\underset{\sim}{r}}_1(t) + l_2\left(\ddot{\phi}\, \underset{\sim}{e}_{\phi} - \dot{\phi}^2\, \underset{\sim}{e}_{R_2}\right) =$$

$$= l_1\left(\ddot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_{\theta} - \dot{\theta}^2 \underset{\sim}{e}_{R_1}\right) + l_2\left(\ddot{\phi}\, \underset{\sim}{e}_{\phi} - \dot{\phi}^2 \underset{\sim}{e}_{R_2}\right) \qquad (4)$$

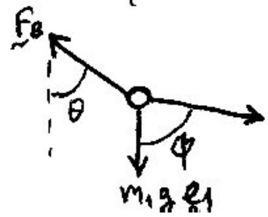
Διάγραμμα ελεύθερου σώματος κόκκου 2



Ισοζύγιο ορμής κόκκου 2:

$$m_2\ddot{\underset{\sim}{r}}_2 = m_2 g\, \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{F}_A \qquad (5)$$

Διάγραμμα ελεύθερου σώματος κόκκου 1



$-\underset{\sim}{F}_A$ (από νόμο δράσης-αντίδρασης)

Ισοζύγιο ορμής κόκκου 1: $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = m_1 g \mathbf{e}_1 + \mathbf{F}_B - \mathbf{F}_A$ (6)

Πρόσθεση κατά μέλη των (5) και (6) δίνει:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = (m_1+m_2) g \mathbf{e}_1 + \mathbf{F}_B \qquad (7)$$

Επειδή οι δυνάμεις $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ βρίσκονται κατά μήκος των ράβδων 2 και 1 αντίστοιχα, μπορούν να γραφούν ως:

$$\mathbf{F}_A = F_A \mathbf{e}_{R_2} \quad , \quad \mathbf{F}_B = F_B \mathbf{e}_{R_1} \qquad (8)$$

Αντικαθιστώντας τις (3), (4) και (8) στις εξισώσεις (5) και (7) προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} m_2 l_1 \left(\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_{R_1}\right) + m_2 l_2 \left(\ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_{R_2}\right) &= m_2 g \mathbf{e}_1 + F_A \mathbf{e}_{R_2} \\ (m_1+m_2) l_1 \left(\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_{R_1}\right) + m_2 l_2 \left(\ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_{R_2}\right) &= (m_1+m_2) g \mathbf{e}_1 + F_B \mathbf{e}_{R_1} \end{aligned}\right\} (9)$$

Για να απαλείψουμε τις άγνωστες μεταβλητές F_A, F_B παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της $(9)_1$ με $\mathbf{e}_\phi$ και το εσωτερικό γινόμενο της $(9)_2$ με $\mathbf{e}_\theta$. Επομένως, και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi = \sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi = \cos(\phi-\theta) \\ &\mathbf{e}_{R_1} \cdot \mathbf{e}_\phi = -\cos\theta \sin\phi + \sin\theta \cos\phi = \sin(\theta-\phi) \\ &\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = 1 \quad , \quad \mathbf{e}_{R_2} \cdot \mathbf{e}_\phi = 0 \quad , \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_\phi = -\sin\phi \\ &\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = 1 \quad , \quad \mathbf{e}_{R_1} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0 \quad , \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \\ &\mathbf{e}_{R_2} \cdot \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \cos\phi + \cos\theta \sin\phi = \sin(\phi-\theta) \end{aligned}\right\}$$

οι εξισώσεις (9) δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} m_2 l_1 \ddot{\theta} \cos(\phi-\theta) - m_2 l_1 \dot{\theta}^2 \sin(\theta-\phi) + m_2 l_2 \ddot{\phi} &= -m_2 g \sin\phi \\ (m_1+m_2) l_1 \ddot{\theta} + m_2 l_2 \ddot{\phi} \cos(\phi-\theta) + m_2 l_2 \dot{\phi}^2 \sin(\theta-\phi) &= -(m_1+m_2) g \sin\theta \end{aligned}\right\}$$

Οι οποίες αποτελούν τις ζητούμενες εξισώσεις κίνησης.