ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΤΣΑΓΡΑΚΗΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2007

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ: εξετάζει κίνηση-παραμόρφωση της ύλης & των δυνάμεων που προκαλούν την κίνηση αυτή

- Βασίζεται στις έννοιες του χρόνου, χώρου, δύναμης, ενέργειας, ύλης & μάζας
- Εφαρμογές στη φυσική, χημεία, βιολογία, κατασκευές κλπ

ΥΛΗ $\leftarrow$ Μόρια $\leftarrow$ Άτομα $\leftarrow$ Υποατομικά σωματίδια

$\Rightarrow$ Η ύλη **δεν** είναι συνεχής

Όταν η ύλη κινείται ή παραμορφώνεται $\Rightarrow$ αλλάζουν οι θέσεις των μορίων ή οι αποστάσεις μεταξύ τους. Η μελέτη γίνεται εξαιρετικά δύσκολη λόγω του μεγάλου αριθμού μορίων.

$\exists$ Πολλά φαινόμενα της καθημερινότητας που μπορούν να περιγραφούν και να προβλεφτούν από θεωρίες που δεν λαμβάνουν άμεσα υπόψη τη μοριακή δομή των υλικών. Π.χ.

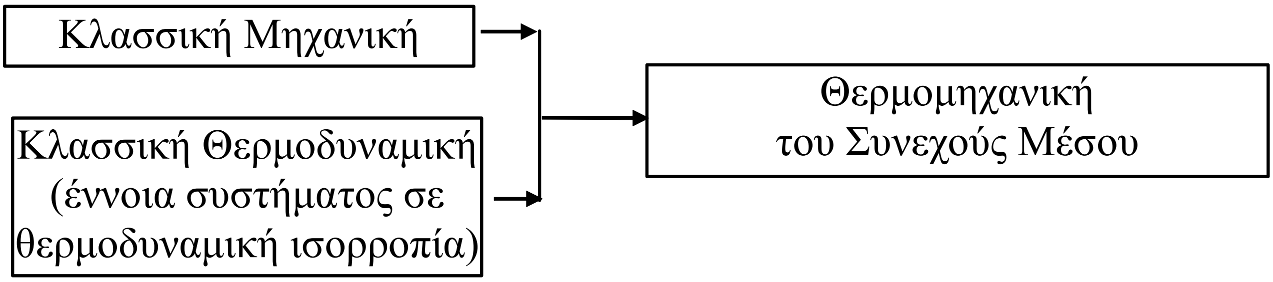
- η επιμήκυνση μιας χαλύβδινης ράβδου υπό τη δράση δυνάμεων
- Η ροή νερού σε μια σωλήνα υπό δεδομένη διαφορά πίεσης
- η οπισθέλκουσα δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα που κινείται στον αέρα, κλπ.

Γενικά όταν μας ενδιαφέρει η μακροσκοπική συμπεριφορά της ύλης, **αγνοούμε** (άμεσα) τη μοριακή δομή & θεωρούμε ότι

ΥΛΗ $\equiv$ ΣΥΝΕΧΕΣ ΜΕΣΟ

ΣΥΝΕΧΕΣ ΜΕΣΟ: μοντέλο στο οποίο η ύλη θεωρείται κατανεμημένη συνεχώς, δηλ. γεμίζει πλήρως & συνεχώς το χώρο. Περιγράφει μαθηματικά τις μακροσκοπικές ιδιότητες των υλικών (στερεών, υγρών & αερίων)

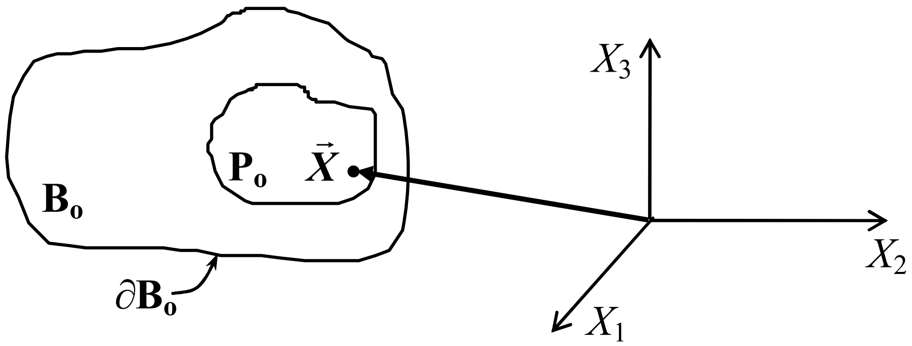
Κλασσική Μηχανική (νόμοι Newton) [έννοια υλικού σημείου]	$\longrightarrow$	Μηχανική του Συνεχούς Μέσου [έννοια "σωματιδίου" ή "γειτονιάς" υλικού σημείου (δηλ. μιας απειροστής περιοχής του Σ.Μ.)]



ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

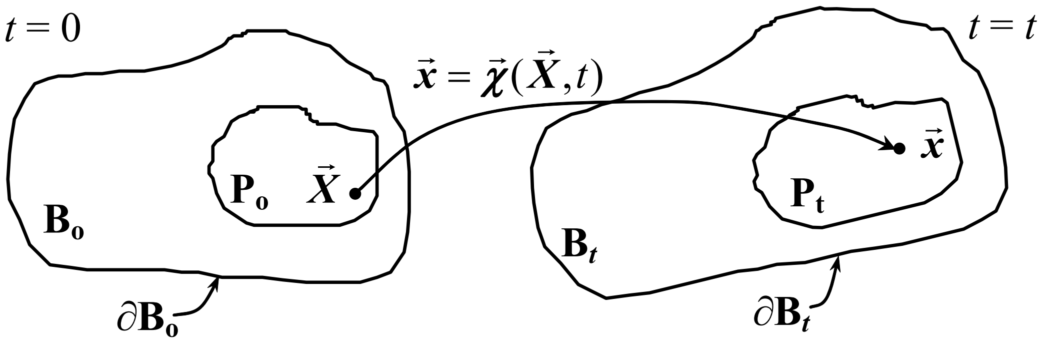
Κάθε συνεχές μέσο (στερεό ή ρευστό) παριστάνεται συνήθως ως μια (απλά συνεκτική) περιοχή στον τρισδιάστατο (3D) ευκλείδειο χώρο

- **Αρχική θέση (θέση αναφοράς / reference configuration), $\mathbf{B_o}$ ($t = 0$)**



-- Οποιαδήποτε περιοχή $\mathbf{P_o} \subseteq \mathbf{B_o}$ αποτελείται από υλικά σημεία
-- Κάθε υλικο σημείο αντιπροσωπεύεται από ένα διάνυσμα θέσης $\vec{X}$

- **Τρέχουσα ή παρούσα θέση (current configuration), $\mathbf{B}_t$ ($t \neq 0$)**



<u>**Κίνηση**</u>: "1-1" & "επί" απεικόνιση $\mathbf{B_o} \rightarrow \mathbf{B_t}$, η οποία συμβολίζεται ως
$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$, με $\vec{\chi}(\vec{X}, 0) = \vec{X}$

<u>Ταχύτητα</u>: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{X},t) = \dfrac{\partial \vec{\chi}\left(\vec{X},t\right)}{\partial t} \equiv \dot{\vec{x}}$

<u>Επιτάχυνση</u>: $\vec{a} = \vec{a}(\vec{X},t) = \dfrac{\partial \vec{v}\left(\vec{X},t\right)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \vec{\chi}\left(\vec{X},t\right)}{\partial t^2} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{x}}$

ΤΡΟΠΟΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

- **<u>Περιγραφή κατά Lagrange (Π.L.)</u>:** σταθερή παρατήρηση ενός συγκεκριμένου ***υλικού σημείου*** $\vec{X}$ του σώματος κατά τη διάρκεια της κίνησης (καταλληλότερη για μελέτη στερεών)

- **<u>Περιγραφή Euler (Π.Ε.)</u>:** σταθερή παρατήρηση ενός συγκεκριμένου ***σημείου*** $\vec{x}$ ***του χώρου*** κατά τη διάρκεια της κίνησης (καταλληλότερη για μελέτη ρευστών)

  Παράδειγμα: για τη θερμοκρασία θ ενός σώματος:

  (Π.L.): $\theta = \hat{\theta}(\vec{X},t)$, (Π.Ε.): $\theta = \theta(\vec{x},t)$

  όπου, για οποιαδήποτε κίνηση $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X},t)$, θα πρέπει:

  $$\theta = \theta(\vec{x},t) = \theta(\vec{\chi}(\vec{X},t),t) = \hat{\theta}(\vec{X},t)$$

ΝΟΜΟΙ-ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

1. **Αρχή Διατήρησης της Μάζας (Α.Δ.Μ.):** η μάζα m μιας οποιασδήποτε ποσότητας ύλης δεν αλλάζει με το χρόνο, δηλ. $\dot{m} = 0$
2. **Νόμος Ισοζυγίου (γραμμικής) Ορμής (Ν.Ι.Ο.):** Η συνισταμένη δύναμη $\vec{f}$ που ασκείται σε μια ποσότητα ύλης είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της (γραμμικής) ορμής της $\dot{\vec{l}}$ (*2^{ος} νόμος κίνησης του Newton*), δηλ. $\vec{f} = \dot{\vec{l}}$
3. **Νόμος Ισοζυγίου Στροφορμής (Ν.Ι.Σ.):** Η συνισταμένη ροπή $\vec{m}$ που ασκείται σε μια ποσότητα ύλης γύρω από ένα σημείο $\vec{O}$ είναι ίση με το

ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της $\dot{\vec{h}}$ γύρω από το ίδιο σημείο, δηλ. $\vec{m} = \dot{\vec{h}}$

4. **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (1ος νόμος της Θερμοδυναμικής):** [θερμότητα Q που δίδεται σε κάθε ποσότητα ύλης] + [Έργο W που παρέχεται σε αυτήν την ποσότητα ύλης] = [Μεταβολή της ολικής ενέργειας $\Delta E_{ολ}$ αυτής της ποσότητας ύλης], δηλ. $Q + W = \Delta E_{ολ}$
5. **Δεύτερος Νόμος της Θερμοδυναμικής:** [Μεταβολή της εντροπίας $\mathrm{d}S$ μιας ποσότητας ύλης] ≥ [θερμότητα $\mathrm{d}Q$ που δίδεται σε αυτήν την ποσότητα ύλης] / [απόλυτη θερμοκρασία θ], δηλ. $\mathrm{d}S \geq \dfrac{\mathrm{d}Q}{\theta}$

ΤΡΟΠΟΙ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ-ΑΡΧΩΝ

- **Ολοκληρωτικές Εξισώσεις:** ισχύουν για κάθε περιοχή **P** του Σ.Μ.

- **Τοπικές Εξισώσεις ή Εξισώσεις Πεδίου:** ισχύουν για κάθε σημείο ($\vec{X}$ ή $\vec{x}$) του Σ.Μ.

Οι παραπάνω νόμοι ισχύουν ***για κάθε συνεχές μέσο***, δηλ. για όλα τα υλικά (στερεά, υγρά ή αέρια). Άρα, υπάρχει ***φυσική αναγκαιότητα*** για επιπλέον εξισώσεις, έτσι ώστε να μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά διαφορετικών υλικών

Επιπλέον εξισώσεις ≡ **ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

- Συσχετίζουν ποσότητες που εκφράζουν απόκριση του σώματος (**καταστατικές συναρτήσεις**) με ποσότητες που εκφράζουν τα αίτια (**καταστατικές μεταβλητές**)

- Μορφή καταστατικών εξισώσεων $\Leftarrow$ συνήθως **εμπειρικά** (δηλ. από πείραμα – παρατήρηση)

- Υπαγορεύονται από:
  1) **Φυσική** συνέπεια: διαφορετική συμπεριφορά για διαφορετικά υλικά (στερεά, υγρά, αέρια, πολυμερή, μέταλλα, γεωυλικά, νερό, κλπ)
  2) **Μαθηματική** αναγκαιότητα (αριθμ. εξισώσεων = αριθμ. αγνώστων)

Παράδειγμα: ο τανυστής τάσης $\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ εκφράζει δυνάμεις επαφής (ανά μον. επιφάνειας) & οφείλεται στις μοριακές δυνάμεις επαφής ή συνοχής. Όμως, η συνεκτικότητα του σώματος & η φύση του $\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ διαφέρει από υλικό σε υλικό. Π.χ.

- *Ιδανικά ρευστά:* $\boldsymbol{T} = -P(\rho)\,\boldsymbol{1}$, όπου ρ = πυκνότητα μάζας

- *Ασυμπίεστα νευτωνικά ρευστά:*

$$\boldsymbol{T} = -P(\rho)\,\boldsymbol{1} + 2\mu \boldsymbol{D}$$

όπου $\boldsymbol{D} = \left\{\mathrm{grad}(\vec{\boldsymbol{v}}) + [\mathrm{grad}(\vec{\boldsymbol{v}})]^T\right\}/2$, μ = συντελεστής ιξώδους

- *Ισότροπα γραμμικά ελαστικά στερεά:*

$$\boldsymbol{T} = \lambda[\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})]\,\boldsymbol{1} + 2G\boldsymbol{\varepsilon}$$

όπου $\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\mathrm{grad}(\vec{\boldsymbol{u}}) + [\mathrm{grad}(\vec{\boldsymbol{u}})]^T\right\}/2$, με $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{X}}$

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

1) Θεωρία μηχανικής του συνεχούς μέσου σε μια διάσταση (1D) & παραδείγματα.

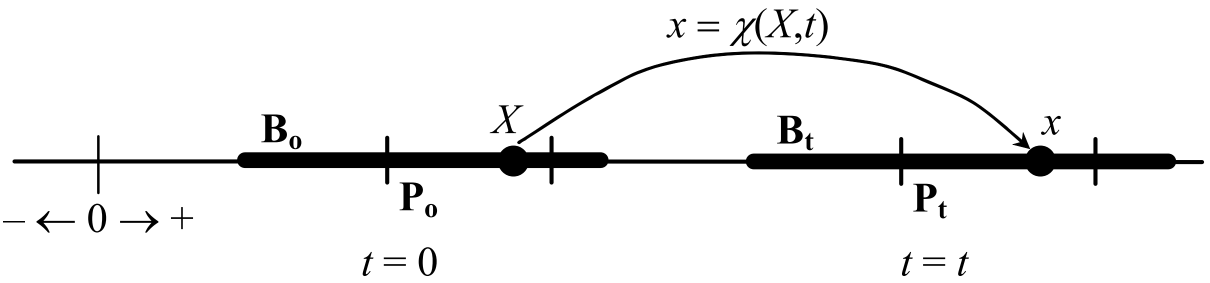
2) Ανασκόπηση στο διανυσματικό & τανυστικό λογισμό χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες (συμβολισμό Einstein)

3) Θεωρία μηχανικής του συνεχούς μέσου στον τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο (3D)

ΜΕΡΟΣ Ι

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ



<u>Κίνηση</u>: "1-1" & "επί" απεικόνιση $\mathbf{B_o} \rightarrow \mathbf{B_t}$, η οποία συμβολίζεται ως $x = \chi(X,t)$, με $\chi(X,0) = X$

χ είναι αντιστρέψιμη, δηλ. $\exists\ \chi^{-1}$: $\mathbf{B_t} \rightarrow \mathbf{B_o}$ με $\chi^{-1}(x,t) = X$

<u>Ταχύτητα</u> : $$v = v(X,t) = \frac{\partial \chi(X,t)}{\partial t} \equiv \dot{x}$$

<u>Επιτάχυνση</u> : $$\alpha = \alpha(X,t) = \frac{\partial v(X,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \chi(X,t)}{\partial t^2} \equiv \dot{v} \equiv \ddot{x}$$

<u>Κλίση παραμόρφωσης</u> : $$F = F(X,t) \equiv \partial \chi(X,t)/\partial X$$

$$\mathrm{d}x = \left[\partial \chi(X,t)/\partial X\right]_{t=\text{σταθ.}} \mathrm{d}X + \left[\partial \chi(X,t)/\partial t\right]_{X=\text{σταθ.}} \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}x = \left[\partial \chi(X,t)/\partial X\right]_{t=\text{σταθ.}} \mathrm{d}X \Rightarrow \boxed{\mathrm{d}x = F\,\mathrm{d}X}$$

δηλ. η F εκφράζει κατά πόσο η αρχική απειροστή υλική ίνα dX επιμηκύνεται ή συρρικνώνεται στο τρέχον μήκος dx.

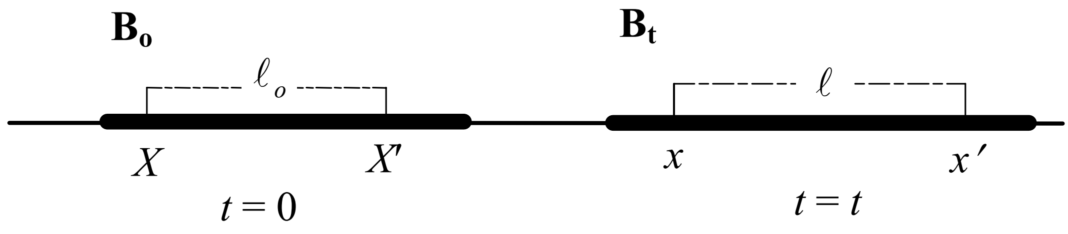
Το *σύνολο τιμών* της κλίσης παραμόρφωσης είναι $F \neq 0, \infty$. Αυτό εξασφαλίζει ότι $\exists\ \chi^{-1}$ με $X = \chi^{-1}(x,t)$. Επίσης, η F είναι συνεχής & $F\big|_{t=0} = 1 > 0$. Επομένως: $F > 0,\ \forall\ t$

Παρατήρηση: $$\dot{F} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \chi(X,t)}{\partial X}\right) = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \chi(X,t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial x}F$$

δηλ. $$\boxed{\dot{F} = \frac{\partial v}{\partial x}F}$$

Μετατόπιση (displacement) : $u = x - X = \chi(X,t) - X = u(X,t)$

Stretch : $\lambda \equiv \left.\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,X}\right|_{t=\text{σταθ.}} = \lim\limits_{X'\to X} \dfrac{x'-x}{X'-X} = \lim\limits_{X'\to X} \dfrac{\chi(X',t)-\chi(X,t)}{X'-X} = \lim\limits_{X'\to X} \dfrac{\ell}{\ell_o}$



άρα: $\lambda = F(X,t) \Rightarrow \begin{cases} 0 < \lambda < 1 \ \rightarrow \text{συρρίκνωση στο } X \\ \lambda > 1 \ \rightarrow \text{επιμήκυνση στο } X \end{cases}$

Ανηγμένη παραμόρφωση (strain)

$$\varepsilon \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\,x - \mathrm{d}\,X}{\mathrm{d}\,X}\right|_{t=\text{σταθ.}} = \lim_{X'\to X} \frac{\ell - \ell_o}{\ell_o} = \lambda - 1 = F - 1$$

άρα: $\varepsilon = \dfrac{\partial(x-X)}{\partial X} = \dfrac{\partial u}{\partial X} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon < 0 \rightarrow \text{συρρίκνωση στο } X \text{ (θλίψη)} \\ \varepsilon > 0 \rightarrow \text{επιμήκυνση στο } X \text{ (εφελκυσμός)} \end{cases}$

Ρυθμός παραμόρφωσης : $\kappa \equiv \lim\limits_{x'\to x} \dfrac{\dot{\ell}}{\ell}$

$$\ell = x' - x = \int_x^{x'} \mathrm{d}\,y = \int_X^{X'} F(Y,t)\,\mathrm{d}\,Y \Rightarrow \dot{\ell} = \int_X^{X'} \dot{F}\,\mathrm{d}\,Y = \int_X^{X'} \frac{\partial v}{\partial y} F\,\mathrm{d}\,Y = \int_x^{x'} \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}\,y \quad (\#)$$

$$\Rightarrow \dot{\ell} = v(x') - v(x) \Rightarrow \frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{v(x') - v(x)}{x' - x} \Rightarrow \kappa = \lim_{x'\to x} \frac{\dot{\ell}}{\ell} = \lim_{x'\to x} \frac{v(x') - v(x)}{x' - x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Εναλλακτικά, από (#) & θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτ. λογισμού:

$$\Rightarrow \dot{\ell} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=\bar{y}} (x' - x) \ \Rightarrow \ \frac{\dot{\ell}}{\ell} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=\bar{y}}, \quad \bar{y} \in [x, x']$$

για $\ell \rightarrow 0$ (δηλ. $x' \rightarrow x$) $\Rightarrow$ $\bar{y} \rightarrow x$, έχουμε: $\kappa = \lim\limits_{x'\to x} \dfrac{\dot{\ell}}{\ell} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Έστω, $\varphi(x,t)$ η περιγραφή κατά Euler & $\hat{\varphi}(X,t)$ η περιγραφή κατά Lagrange ενός οποιουδήποτε πεδίου φ που παριστάνει κάποιο φυσικό μέγεθος (π.χ. θερμοκρασία, πυκνότητα, κλπ), τότε $\hat{\varphi}(X,t)=\varphi(x,t)$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς t, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial\hat{\varphi}(X,t)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial\hat{\varphi}(X,t)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\chi(X,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\hat{\varphi}(X,t)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}v \qquad (*)$$

- **Υλική ή ολική χρονική παράγωγος (ολική χρονική μεταβολή ή ρυθμός μεταβολής της ιδιότητας *φ* ενός υλικού σημείου *X*):**

$$\dot{\varphi}=\frac{D\varphi}{Dt}=\left.\frac{\partial\hat{\varphi}(X,t)}{\partial t}\right|_{X=\text{δεδομένο}}$$

... (Lagrangean) χρονική παράγωγος

- **Τοπική χρονική παράγωγος (ρυθμός μεταβολής της ιδιότητας *φ* σε ένα σημείο *x* του χώρου):**

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\left.\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\right|_{x=\text{δεδομένο}}$$

... (Eulerian) χρονική παράγωγος

❖ **Σχέση μεταξύ ολικής και τοπικής χρονικής παραγώγου:**

$$(*)\Rightarrow\boxed{\dot{\varphi}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}v}$$

Παράδειγμα 1: $\alpha=\dot{v}=\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}v$

Παράδειγμα 2: $x=\chi(X,t)=(1+t^2)X+\ln(1+t)$

$$\Rightarrow \quad v = \dot{x} = \frac{\partial \chi(X,t)}{\partial t} = 2tX + \frac{1}{1+t} \qquad = \hat{v}(X,t) \qquad \text{... (Π.L.)}$$

$$= 2t\left(\frac{x - \ln(1+t)}{1+t^2}\right) + \frac{1}{1+t} \qquad = v(x,t) \qquad \text{... (Π.Ε.)}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \dot{v} = \frac{\partial \hat{v}(X,t)}{\partial t} = 2X - \frac{1}{(1+t)^2} = \hat{\alpha}(X,t)$$

$$= \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} v = 2\left(\frac{x - \ln(1+t)}{1+t^2}\right) - \frac{1}{(1+t)^2} = \alpha(x,t)$$

Παράδειγμα 3: Έστω το πεδίο θερμοκρασίας $\theta = \theta(x,t) = 300(1 + e^{-x^2t^2})$ για ένα συνεχές μέσο που ακολουθεί την κίνηση-παραμόρφωση του παραδείγματος 2.

α) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας $\dot{\theta}(x,t)$

β) Θεωρώντας ένα Σ.Μ. που στην κατάσταση αναφοράς εκτείνεται από το σημείο $X = 0$ στο σημείο $X = 2$, σχεδιάστε την κατανομή της $\dot{\theta}$ ως προς την υλική συντεταγμένη X & ως προς τη χωρική συντεταγμένη x κατά για τη χρονική στιγμή $t = 1$.

γ) Σχεδιάστε επίσης τη γραφική παράσταση της $\dot{\theta}$ ως προς t για το υλικό σημείο $X = 0$.

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε:

$$\dot{\theta}(x,t) = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} v(x,t) \tag{1}$$

όπου:

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = -600x^2te^{-x^2t^2}, \qquad \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = -600xt^2e^{-x^2t^2} \tag{2}$$

$$v(x,t) = 2t\left(\frac{x - \ln(1+t)}{1+t^2}\right) + \frac{1}{1+t} \tag{3}$$

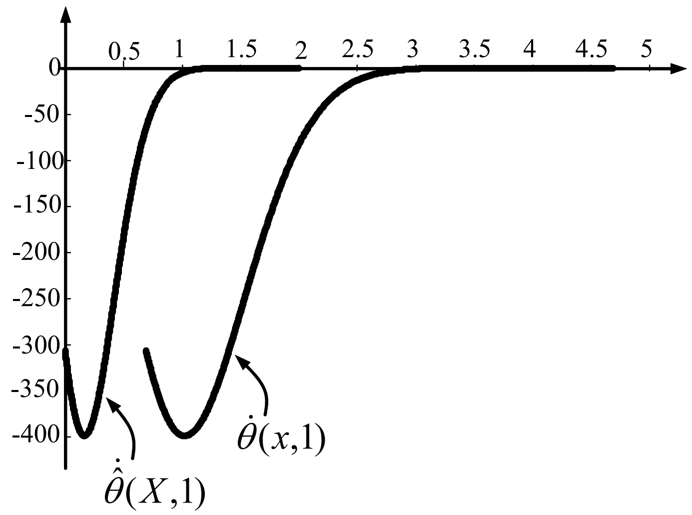
Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1), προκύπτει:

$$\dot{\theta}(x,t) = -600xte^{-x^2t^2}\left[x + 2t^2\left(\frac{x - \ln(1+t)}{1+t^2}\right) + \frac{t}{1+t}\right] \tag{4}$$

β) Για $t=1$, η (4) δίνει: $\dot{\theta}(x,1) = -600xe^{-x^2}\left(2x - \ln 2 + \frac{1}{2}\right)$ ... (Π.Ε.)

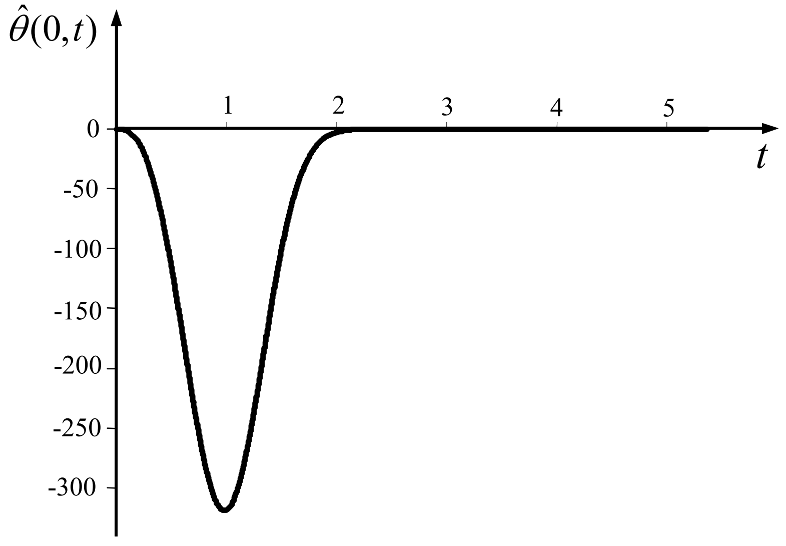
και επειδή $x = (1+t^2)X + \ln(1+t) \overset{t=1}{\Rightarrow} x = 2X + \ln 2$, προκύπτει:

$$\dot{\hat{\theta}}(X,1) = -600(2X + \ln 2)e^{-(2X+\ln 2)^2}\left(4X + \ln 2 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{... (Π.L.)}$$



γ) Για το υλικό σημείο $X=0$, η εξίσωση κίνησης $x = (1+t^2)X + \ln(1+t)$ δίνει: $x = \ln(1+t)$. Αντικαθιστώντας αυτήν τη σχέση στην (4), έχουμε:

$$\dot{\hat{\theta}}(0,t) = -600te^{-[\ln(1+t)]^2 t^2}\ln(1+t)\left[\ln(1+t) + \frac{t}{1+t}\right]$$



Άσκηση: Υπολογίστε: 1) την κλίση παραμόρφωσης $F(X,t)$, 2) την χωρική κατανομή της μετατόπισης $u(x,t)$, 3) την ανηγμένη παραμόρφωση $\varepsilon(X,t)$ και 4) το ρυθμό παραμόρφωσης $\kappa(x,t)$, για την κίνηση που δίνεται από την εξίσωση: $x = \chi(X,t) = (1+t^2)X + \ln(1+t)$. Περιγράψτε την κίνηση του συνεχούς μέσου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

ΜΑΖΑ: πρότυπη (βασική) εμπειρική έννοια (την αισθανόμαστε, την κατανοούμε, δεν μπορούμε όμως να την ορίσουμε).

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΜΑΖΑΣ: ένα μέγεθος $\rho > 0$, που εκφράζει μάζα ανά μονάδα μήκους[*] σε κάθε θέση του μονοδιάστατου συνεχούς μέσου **B**, έτσι ώστε:

$$m(\mathbf{P_o}) = \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \,\mathrm{d}X\,, \text{ όπου } \rho_o = \rho_o(X,0) = \rho_o(X) = \text{αρχική ή πυκνότητα αναφοράς}$$

$$m(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho \,\mathrm{d}x\,, \text{ όπου } \rho = \rho(x,t) = \text{τρέχουσα πυκνότητα (σε χρόνο } t\text{)}$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ (Α.Δ.Μ.): η μάζα $m(\mathbf{P})$ μιας οποιασδήποτε ποσότητας ύλης $\mathbf{P}$ δεν αλλάζει με το χρόνο, δηλ.

$$m(\mathbf{P}) = m(\mathbf{P_o}) = m(\mathbf{P_t}), \quad \forall\, \mathbf{P} \subseteq \mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o(X,0)\,\mathrm{d}X = \int_{\mathbf{P_t}} \rho(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad \text{με} \quad \rho(x,t)\big|_{t=0} = \rho_o(X,0)$$

ενδιαφέρει ο μετασχηματισμός της ολοκληρωτική εξίσωσης που ισχύει για $\forall\, \mathbf{P} \subseteq \mathbf{B}$ σε εξίσωση που εκφράζει την εν λόγω αρχή $\forall\, x \in \mathbf{B} \Rightarrow$ ***εξίσωση πεδίου*** (διατήρησης της μάζας)

Έτσι, $\forall\, \mathbf{P_o} \subseteq \mathbf{B_o}$:

$$\int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \,\mathrm{d}X = \int_{\mathbf{P_t}} \rho \,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \,\mathrm{d}X = \int_{\mathbf{P_o}} \rho F \,\mathrm{d}X \Rightarrow \int_{\mathbf{P_o}} (\rho_o - \rho F)\,\mathrm{d}X \qquad (*)$$

<u>**ΘΕΩΡΗΜΑ:**</u> Αν $\int_{\mathbf{P_o}} f \,\mathrm{d}X = 0$, $\forall\, \mathbf{P_o} \subseteq \mathbf{B_o}$, όπου $f(X)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbf{B_o}$, τότε $f \equiv 0$ παντού στο $\mathbf{B_o}$.

---

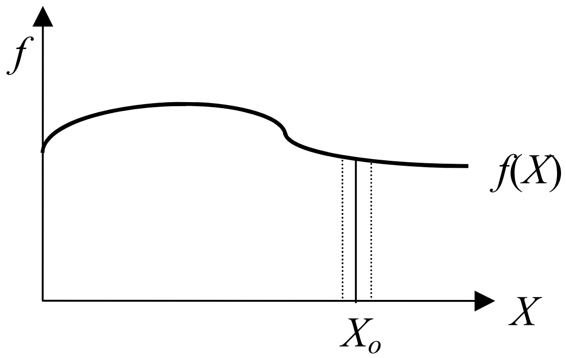
[*] Στις 3 διαστάσεις, η πυκνότητα εκφράζει μάζα ανά μονάδα *όγκου* σε κάθε θέση του συνεχούς μέσου **B**

Απόδειξη: Έστω $\exists\, X_o \in \mathbf{B_o}$, τέτοιο ώστε $f(X_o) \neq 0$, ας πούμε $f(X_o) > 0$.

Τότε, επειδή η f είναι συνεχής $\Rightarrow \exists$ περιοχή $\delta(X_o)$ τέτοια ώστε $f(X) > 0 \Rightarrow$

$$\int_{\mathbf{P_o}} f\,\mathrm{d}X > 0, \quad \forall\ \mathbf{P_o} \subseteq \delta(X_o) \subseteq \mathbf{B_o}$$

→ άτοπο. Ομοίως αποδεικνύεται για $f(X_o) < 0$. Άρα, $f(X) \equiv 0, \ \forall\ X \in \mathbf{B_o}$.



Έτσι, $(*) \Rightarrow\ \rho_o - \rho F = 0 \Rightarrow\ \boxed{\rho = \dfrac{\rho_o}{F}}$ **... τοπική μορφή Α.Δ.Μ. σε Π.L.**

Παρατήρηση: από ένα μικρό μέρος $\mathbf{P_o} \subseteq \mathbf{B_o}$ μεγάλης πυκνότητας μπορεί να προκύψει ένα μεγάλο μέρος $\mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$ μικρής πυκνότητας

- $\rho_o = \rho F \ \Rightarrow\ \dot{\rho}_o = \dot{\rho} F + \rho \dot{F} \ \Rightarrow\ \dot{\rho} F + \rho \dot{F} = 0$ (\$)

- $\dot{F} = \dfrac{\partial v}{\partial x} F$ (\$\$)

Σημείωση: $\partial v / \partial x$ = {κλίση ταχύτητας σε 1D}, ενώ {κλίση ταχύτητας σε 3D} = grad($\vec{v}$) [σημαντική παράμετρος στη ρευστομηχανική].

$$\{(\$), (\$\$)\} \Rightarrow \left(\rho \frac{\partial v}{\partial x} + \dot{\rho} \right) F = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \forall\ \rho(x,t) > 0$$

η οποία, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\dot{\rho} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho}{\partial x} v$, δίνει

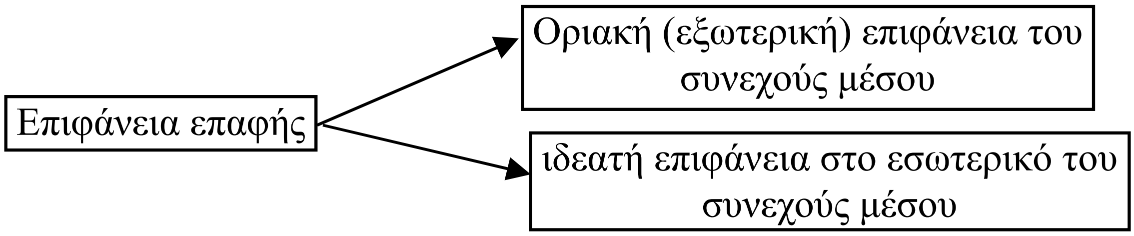
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0, \quad \forall\ \rho(x,t) > 0}$$ **... τοπική μορφή Α.Δ.Μ. σε Π.Ε.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΔΥΝΑΜΗ & ΟΡΜΗ

<u>1. ΔΥΝΑΜΗ</u>: πρότυπη (βασική) εμπειρική έννοια περιγραφής του συνεχούς μέσου (όπως οι προαναφερόμενες έννοιες του χώρου, του χρόνου & της μάζας)

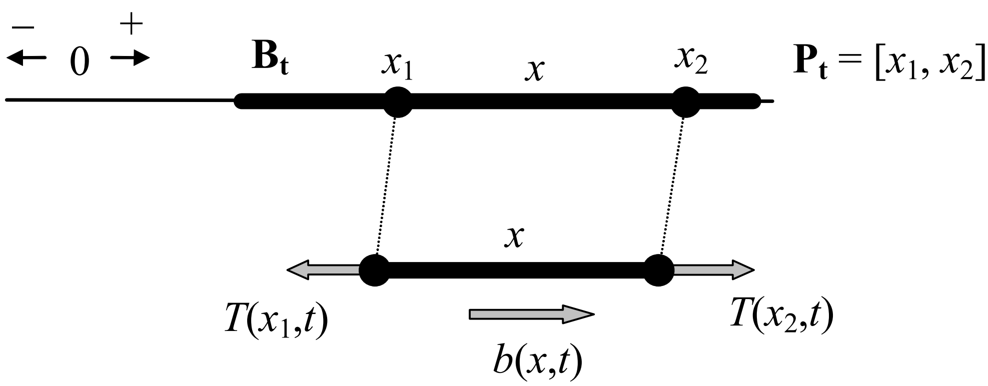
Οι δυνάμεις διακρίνονται σε ***μαζικές*** & ***επιφανειακές***.

- **Επιφανειακές ή δυνάμεις επαφής (contact forces), $T(x,t) \rightarrow$ τάσεις:** αμοιβαίες πιέσεις (δύναμη / μον. επιφάνειας σε 3D, δύναμη σε 1D) μεταξύ γειτονικών σημείων στο $x \in \mathbf{B_t}$ ή γενικά μεταξύ σωμάτων που εφάπτονται



$T(x,t)$ = *φαινομενολογικός μέσος όρος* των μοριακών δυνάμεων μεταξύ γειτονικών υλικών σημείων

- **Μαζικές δυνάμεις (body forces) ή δυνάμεις πεδίου, $b(x,t)$:** προέρχονται από τον εξωτερικό για το Σ.Μ. κόσμο (δηλ. από ένα <u>εξωτερικό πεδίο</u> δυνάμεων, π.χ. ηλεκτρομαγνητικό, βαρυτικό, κλπ) & ενεργούν σε κάθε σημείο $x \in \mathbf{B_t}$. Εκφράζονται ως δύναμη / μον. μάζας



(i) Συνολ. δύναμη επαφής στο $\mathbf{P_t}$: $f_c(\mathbf{P_t}) = T(x_2,t) - T(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \mathrm{d}x$

(ii) Συνολική μαζική δύναμη στο $\mathbf{P_t}$: $f_b(\mathbf{P_t}) = \int_{x_1}^{x_2} b(x,t)\rho(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} b\rho\,\mathrm{d}x$

Συνολική δύναμη στο $\mathbf{P_t}$: $f(\mathbf{P_t}) = f_b + f_c \Rightarrow f(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} (\partial T/\partial x + \rho b)\,\mathrm{d}x$

2. ΟΡΜΗ

➢ **Ορισμός:** $l(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho v \,\mathrm{d}x$

➢ **Νόμος ισοζυγίου ορμής (Ν.Ι.Ο.):**

$$f(\mathbf{P_t}) = \dot{l}(\mathbf{P_t}) \qquad \forall\, \mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t} \qquad \textbf{(\#)}$$

Σημείωση: γενίκευση του νόμου του Newton ($f = m\alpha$)*

➢ **Εξαγωγή της εξίσωσης πεδίου του Ν.Ι.Ο.**

$$\dot{l}(\mathbf{P_t}) = \overline{\int_{\mathbf{P_t}} \rho v \,\mathrm{d}x}^{\,\cdot} = \overline{\int_{\mathbf{P_o}} \rho v F \,\mathrm{d}X}^{\,\cdot} = \overline{\int_{\mathbf{P_o}} \rho_{\mathrm{o}} v \,\mathrm{d}X}^{\,\cdot} = \int_{\mathbf{P_o}} \rho_{\mathrm{o}} \dot{v} \,\mathrm{d}X = \int_{\mathbf{P_o}} \rho F \dot{v} \,\mathrm{d}X = \int_{\mathbf{P_t}} \rho \dot{v} \,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{(\#)} \Rightarrow \int_{\mathbf{P_t}} (\partial T / \partial x + \rho b)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{P_t}} \rho \dot{v} \,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{P_t}} (\partial T / \partial x + \rho b - \rho \dot{v})\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad \forall\, \mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$$

ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα είναι συνεχής $\Rightarrow$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \dot{v} \qquad \forall\, x \in \mathbf{B_t}}$$ **… τοπική μορφή Ν.Ι.Ο. σε Π.Ε.**

$$\left.\begin{array}{l} \partial T/\partial X = (\partial T/\partial x)(\partial x/\partial X) = (\partial T/\partial x)F \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \dot{v} \\ \rho = \rho_o / F \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{F}\frac{\partial T}{\partial X} + \frac{\rho_o}{F} b = \frac{\rho_o}{F}\dot{v} \Rightarrow$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial X} + \rho_o b = \rho_o \dot{v} \qquad \forall\, X \in \mathbf{B_o}}$$ **… τοπική μορφή Ν.Ι.Ο. σε Π.L.**

---

* Ένα απαραμόρφωτο στερεό σώμα που κινείται με ταχύτητα v μπορεί να θεωρηθεί ως ένα Σ.Μ. **B** που κάθε του υλικό σημείο έχει την ίδια ταχύτητα και άρα, η ορμή του είναι $l(\mathbf{B}) = \int_{\mathbf{B}} \rho v \,\mathrm{d}x = v \int_{\mathbf{B}} \rho \,\mathrm{d}x = mv$. Επομένως, $\dot{l}(\mathbf{B}) = m\dot{v} = m\alpha$ και η εξίσωση (#) δίνει $f(\mathbf{B}) = m\alpha$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- **Εμπειρικές έννοιες:** χώρος ή γεωμετρία (X), χρόνος (t), μάζα (m), δύναμη (f)

- **2 Εξισώσεις πεδίου (Α.Δ.Μ. & Ν.Ι.Ο.)[*]:**

(i) $\rho_o = \rho F$ (Π.L.) ή $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$ (Π.Ε.)

(ii) $\dfrac{\partial T}{\partial X} + \rho_o b = \rho_o \dot{v}$ (Π.L.) ή $\dfrac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \dot{v}$ (Π.Ε.)

- **3 Άγνωστες συναρτήσεις:**

(i) Κίνηση: $x = \chi(X,t)$ [ή ισοδύναμα $u(X,t)$ ή $v(X,t)$]

(ii) Πυκνότητα: $\rho = \rho(x,t)$

(iii) Δυνάμεις επαφής ή τάσεις: $T = T(x,t)$

Σημείωση: $b(x,t) \rightarrow$ γνωστές ή μετρήσιμες

$\Rightarrow$ ***3 Αγνώστους*** $\leftrightarrow$ ***2 Εξισώσεις***

$\Rightarrow \exists$ *Μαθηματική απαίτηση* για 1 επιπλέον εξίσωση.

Επίσης, $\exists$ *φυσική αναγκαιότητα* για επιπλέον εξίσωση, έτσι ώστε να μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά διαφορετικών μεταξύ τους υλικών, μιας και οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής ισχύουν για όλα τα υλικά (στερεά, υγρά, πολυμερή, μέταλλα, γεωυλικά, κλπ)

Επιπλέον εξίσωση $\equiv$ **ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ**

---

[*] Ο Ν.Ι.Σ. δεν έχει νόημα σε 1D επειδή η ροπή & η στροφορμή είναι μηδέν. Επίσης, προς το παρόν θα εξετάσουμε προβλήματα από καθαρά μηχανική σκοπιά, δηλαδή χωρίς τη χρήση των νόμων της θερμοδυναμικής, εφόσον σ' αυτά τα προβλήματα δεν μας ενδιαφέρουν οι μεταβολές σε θερμοδυναμικές ιδιότητες όπως η εσωτερική ενέργεια, η θερμοκρασία, η εντροπία κλπ. που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- ***ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ***

Η τάση σε κάθε υλικό σημείο εξαρτάται μόνο από το αρχικό και το τελικό σχήμα του Σ.Μ. (δηλ. από την παραμόρφωση του την τρέχουσα χρονική στιγμή):

$T(X,t) = \varphi(F(X,t))$ ομογενές ελαστικό μέσο

$T(X,t) = \varphi(F(X,t),X)$ μη-ομογενές ελαστικό μέσο

δηλ. συσχέτιση απόκρισης του υλικού (T) με την αιτία (F)

Σημείωση: σε μη-ομογενές μέσο, άμεση εξάρτηση από $X \Rightarrow$ ενώ οι παραμορφώσεις για διαφορετικά υλικά σημεία μπορεί να είναι ίδιες, οι τάσεις μπορεί να είναι διαφορετικές

συνήθως:

Ελαστικά Στερεά	Ελαστικά Ρευστά*
$T = \varphi(F) = h(\varepsilon)$	$T = \varphi(F) = -P(\rho)$
$\varepsilon = F - 1$	$\rho = \rho_o/F$

- ***ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ***

Η τάση εξαρτάται όχι μόνο από την παραμόρφωση στην ίδια χρονική στιγμή, αλλά και από τη χρονική ιστορία της παραμόρφωσης, π.χ. από το ρυθμό παραμόρφωσης

$$T = \varphi(F, \dot{F}, \ddot{F}, \dddot{F}, ...) \quad \rightarrow \quad \text{υλικά διαφορικού τύπου}$$

Παραδείγματα:

Νευτωνικά ρευστά: $T = -P(\rho) + \mu(\partial v/\partial x)$ $\begin{cases} P = \text{υδροστατική πίεση} \\ \mu = \text{συντελεστής ιξώδους} \\ \partial v/\partial x = \dot{F}/F \end{cases}$

Kelvin-Voigt στερεά: $T = k\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}$ $\begin{cases} k = \text{ελαστική σταθερά} \\ \mu = \text{συντελεστής ιξώδους} \end{cases}$

όπου k, μ είναι παράμετροι του υλικού

* άλλες ονομασίες: τέλεια ή ιδανικά ή βαροτροπικά ρευστά

➢ *ΕΛΑΣΤΟ-ΠΛΑΣΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ*

$$T = k\varepsilon_e$$

όπου: $k = E > 0$ ... μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο Young (σταθερά του υλικού)

$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

$\varepsilon_e =$ελαστική (αντιστρεπτή) παραμόρφωση

$\varepsilon_p =$ πλαστική (μόνιμη) παραμόρφωση

$$\begin{cases} T < \sigma_o + \varphi(\varepsilon_p) & \rightarrow \text{ελαστική συμπεριφορά} \\ T = \sigma_o + \varphi(\varepsilon_p) & \rightarrow \text{ελαστοπλαστική συμπεριφορά} \end{cases}$$

σ_o = τάση διαρροής (παράμετρος του υλικού)

$\varphi(\varepsilon_p)$ = συνάρτηση που εξαρτάται από το υλικό, π.χ. για αρκετά μέταλλα $\varphi(\varepsilon_p) = k_o(\varepsilon_p)^n$, όπου k_o, n είναι παράμετροι του υλικού

Επιπλέον, η συνάρτηση διαρροής $\Phi(T,\varepsilon_p) = T - \sigma_o - \varphi(\varepsilon_p)$ και ο ρυθμός πλαστικής παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}_p$ θα πρέπει να ικανοποιούν τους ακόλουθους Kuhn-Tucker περιορισμούς:

$$\dot{\varepsilon}_p \geq 0, \qquad \Phi(T,\varepsilon_p) \leq 0, \qquad \dot{\varepsilon}_p \Phi(T,\varepsilon_p) = 0$$

➢ *ΜΗ-ΤΟΠΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ & ΥΛΙΚΑ ΜΕ ΒΑΘΜΙΔΕΣ*

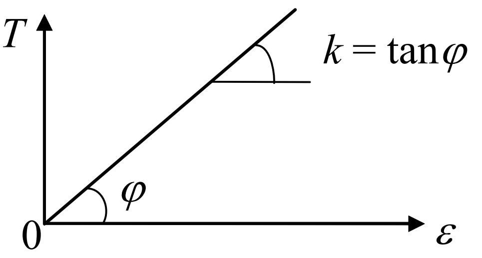
Τάση εξαρτώμενη από παραμόρφωση στο εν λόγω σημείο & τις τιμές της παραμόρφωσης στα γειτονικά του σημεία. Προσεγγιστικά $\rightarrow$ βαθμίδες παραμόρφωσης, π.χ.

$$T = k\varepsilon - c\varepsilon_{,XX} \qquad \rightarrow \text{ στερεά}$$

$$T = -P(\rho) + c\rho_{,XX} \quad \rightarrow \text{ ρευστά}$$

όπου k, c είναι παράμετροι του υλικού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ



$T = k\varepsilon$

$\varepsilon = \partial u / \partial X$

Μη-ομογενές υλικό $\rightarrow$ $k = k(X) > 0$
Ομογενές υλικό $\rightarrow$ k = σταθερά > 0
$\equiv$ μέτρο ελαστικότητας, E

- **Σύστημα Εξισώσεων:**

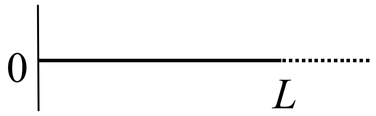
$$\left.\begin{aligned} &\rho = \rho_o / F && \textbf{(*)} \\ &\frac{\partial T}{\partial X} + \rho_o b = \rho_o \dot{v} && \textbf{(**)} \\ &T = k\varepsilon && \textbf{(***)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \rho(X,t) \\ \chi(X,t) \ [\text{ή } F(X,t)] \\ T(X,t) \end{cases}$$

- **Δεδομένου ότι:** $u = x - X \ \Rightarrow \ \dot{u} = \dot{x} = v \ \Rightarrow \ \dot{v} = \ddot{u}, \quad \varepsilon = \partial u / \partial X$

[(**) & (***)] $\Rightarrow$ $\boxed{ku,_{XX} + \rho_o b = \rho_o \ddot{u}}$ **(#)** ... [για k = σταθ.]

(#) $\Rightarrow u \overset{\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial X}}{\Rightarrow} \varepsilon \overset{F = 1+\varepsilon}{\Rightarrow} F$, **(*)** $\Rightarrow \rho(X,t)$, **(**)** $\Rightarrow T(X,t)$

<u>Επίλυση της εξίσωσης (#) στο $B_o = \{X / X \in [0, L]\}$</u>



- Γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους
- Εξίσωση κύματος σε 1D

- *Συνοριακές συνθήκες:* $\begin{cases} u(0,t) = \hat{u}(t) \\ u(L,t) = \tilde{u}(t) \end{cases}$ γνωστές συναρτήσεις του t

- *Αρχικές συνθήκες:* $\begin{cases} u(X,0) = u_o(X) \\ \dot{u}(X,0) = v_o(X) \end{cases}$ γνωστές συναρτήσεις του X

Απόδειξη Μοναδικότητας της Λύσης

Εάν $\exists$ 2 λύσεις $u_1(X,t)$ & $u_2(X,t)$, τότε η $w(X,t) = u_1(X,t) - u_2(X,t)$ είναι λύση του προβλήματος:

$$\left.\begin{aligned} kw,_{XX} &= \rho_o \ddot{w} \\ w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0, \quad w(X,0) &= 0, \quad \dot{w}(X,0) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι η μοναδική λύση του (A) είναι η $\boxed{w \equiv 0}$

$$\text{(A)}_1 \;\Rightarrow\; kw,_{XX}\,\dot{w} = \rho_o \ddot{w}\dot{w} \;\Rightarrow\; kw,_{XX}\,\dot{w} = \tfrac{1}{2}\rho_o \dot{\overline{(\dot{w})^2}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^L kw,_{XX}\,\dot{w}\,\mathrm{d}X = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho_o \dot{\overline{(\dot{w})^2}}\,\mathrm{d}X \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^L k\left[\left(w,_X\,\dot{w}\right),_X - w,_X\,\dot{w},_X\right]\mathrm{d}X = \tfrac{1}{2}\dot{\overline{\int_0^L \rho_o (\dot{w})^2\,\mathrm{d}X}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\,\cancelto{0 \text{ (λόγω οριακ. συνθ.)}}{(w,_X\,\dot{w})\Big|_0^{\mathrm{L}}} - \int_0^L kw,_X\,\dot{w},_X\,\mathrm{d}X = \tfrac{1}{2}\dot{\overline{\int_0^L \rho_o (\dot{w})^2\,\mathrm{d}X}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{2}\int_0^L k\dot{\overline{(w,_X)^2}}\,\mathrm{d}X = \tfrac{1}{2}\dot{\overline{\int_0^L \rho_o (\dot{w})^2\,\mathrm{d}X}} \Rightarrow \tfrac{1}{2}\dot{\overline{\int_0^L \left[k(w,_X)^2 + \rho_o(\dot{w})^2\right]\mathrm{d}X}} = 0$$

(λόγω αρχικ. συνθ.)

$$\Rightarrow \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^L \left[k(w,_X)^2 + \rho_o(\dot{w})^2\right]\mathrm{d}X\right\}_t - \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^L \left[k\cancelto{0}{(w,_X)^2} + \rho_o\cancelto{0}{(\dot{w})^2}\right]\mathrm{d}X\right\}_{t=0} = 0$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\int_0^L \left[k(w,_X)^2 + \rho_o(\dot{w})^2\right]\mathrm{d}X = 0, \qquad \text{με } k > 0 \;\&\; \rho_o > 0$$

$$\Rightarrow \{w,_X = 0 \;\&\; \dot{w} = 0\}, \qquad \forall\, X \in \mathbf{B_o}$$

$$w,_X = 0 \;\Rightarrow\; w = f(t), \qquad \{w = f(t),\; \dot{w} = 0\} \;\Rightarrow\; w = \text{σταθ.}$$

$$\{\,w = \text{σταθ.},\; w\big|_{t=0} = 0\,\} \;\Rightarrow\; w \equiv 0 \;\Rightarrow\; \boxed{u_1 = u_2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1: Ίδιες αρχικές συνθήκες & μικτές συνοριακές συνθήκες, δηλ.

- *Αρχικές συνθήκες:* $\begin{cases} u(X,0) = u_o(X) \\ \dot{u}(X,0) = v_o(X) \end{cases}$ γνωστές συναρτήσεις του X

- *Συνοριακές συνθήκες:* $\begin{cases} T(0,t) = \hat{p}(t) \\ u(L,t) = \tilde{u}(t) \end{cases}$ γνωστές συναρτήσεις του t

Επιπλέον $k = k(X) > 0$ (μη-ομογενές μέσο)
Δείξτε τη μοναδικότητα της λύσης του ελαστοδυναμικού προβλήματος

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{aligned} &(\partial T/\partial X) + \rho_o b = \rho_o \dot{v} \\ &T = k\varepsilon \\ &\varepsilon = \partial u/\partial X, \ \dot{v} = \ddot{u} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ku,_{XX} + k,_X u,_X + \rho_o b = \rho_o \ddot{u}$$

$$T(0,t) = \hat{p}(t) \Rightarrow k(0)[\partial u/\partial X]_{X=0} = \hat{p}(t)$$

Εάν $\exists$ 2 λύσεις $u_1(X,t)$ & $u_2(X,t)$, τότε η $w(X,t) = u_1(X,t) - u_2(X,t)$ είναι λύση του προβλήματος:

$$\left.\begin{aligned} kw,_{XX} + k,_X w,_X = \rho_o \ddot{w} \\ w(X,0) = 0, \quad \dot{w}(X,0) = 0, \quad w,_X(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι η μοναδική λύση του (B) είναι η $\boxed{w \equiv 0}$

$$\text{(B)}_1 \Rightarrow kw,_{XX} \dot{w} + k,_X w,_X \dot{w} = \rho_o \ddot{w}\dot{w} \Rightarrow kw,_{XX} \dot{w} + k,_X w,_X \dot{w} = \tfrac{1}{2}\rho_o \dot{\overline{(\dot{w})^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^L kw,_{XX} \dot{w} \, \mathrm{d}X + \int_0^L k,_X w,_X \dot{w} \, \mathrm{d}X = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho_o \dot{\overline{(\dot{w})^2}} \, \mathrm{d}X \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^L k w,_{XX}\, \dot{w}\, \mathrm{d}X + \overset{0\ \text{(λόγω οριακ. συνθ.)}}{\cancel{\left[k(w,_X\, \dot{w})\right]_0^L}} - \int_0^L k w,_{XX}\, \dot{w}\, \mathrm{d}X - \int_0^L k w,_X\, \dot{w},_X\, \mathrm{d}X = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho_o \overset{\cdot}{\overline{(\dot{w})^2}}\, \mathrm{d}X$$

$$\Rightarrow -\int_0^L k w,_X\, \dot{w},_X\, \mathrm{d}X = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho_o \overset{\cdot}{\overline{(\dot{w})^2}}\, \mathrm{d}X \Rightarrow -\tfrac{1}{2}\int_0^L k\overset{\cdot}{\overline{(w,_X)^2}}\, \mathrm{d}X = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho_o \overset{\cdot}{\overline{(\dot{w})^2}}\, \mathrm{d}X$$

$$\Rightarrow \overset{\cdot}{\overline{\tfrac{1}{2}\int_0^L \left[k(w,_X)^2 + \rho_o(\dot{w})^2\right]\mathrm{d}X}} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^L \left[k(w,_X)^2 + \rho_o(\dot{w})^2\right]\mathrm{d}X\right\}_t - \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^L \left[k\overset{0\ \text{(λόγω αρχικ. συνθ.)}}{\cancel{(w,_X)^2}} + \rho_o\overset{0}{\cancel{(\dot{w})^2}}\right]\mathrm{d}X\right\}_{t=0} = 0$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\int_0^L \left[k(w,_X)^2 + \rho_o(\dot{w})^2\right]\mathrm{d}X = 0, \quad \text{με } k > 0 \ \& \ \rho_o > 0$$

$$\Rightarrow \{w,_X = 0 \ \& \ \dot{w} = 0\}, \quad \forall X \in \mathbf{B_o}$$

$$w,_X = 0 \Rightarrow w = f(t), \qquad \{w = f(t),\ \dot{w} = 0\} \Rightarrow w = \text{σταθ.}$$

$$\{w = \text{σταθ.},\ w|_{t=0} = 0\} \Rightarrow w \equiv 0 \Rightarrow \boxed{u_1 = u_2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δεδομένα

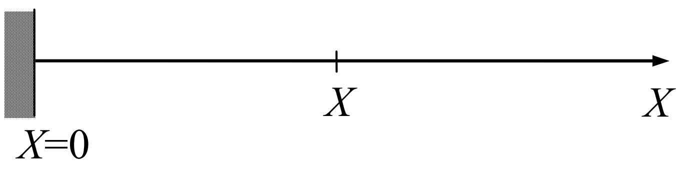
- Ομογενές ελαστικό υλικό: $T = k\varepsilon$ (όπου k = σταθερά > 0)
- Μηδενικές μαζικές δυνάμεις: $b = 0$
- $c = \sqrt{k/\rho_o}$ = ταχύτητα του ήχου στο στερεό
- $\varepsilon = \partial u / \partial X$

Να δειχθεί ότι:

a) Το αξίωμα διατήρησης της ορμής δίνει τη διαφορική εξίσωση κύματος σε 1D: $\ddot{u} - c^2 u,_{XX} = 0$

b) Με τη βοήθεια της σύνθετης παραγώγισης και των μεταβλητών $\xi = X + ct$ & $\eta = X - ct$, να δειχθεί ότι η εξίσωση κύματος $\ddot{u} - c^2 u,_{XX} = 0$ συνεπάγεται την εξίσωση: $u,_{\xi\eta} = 0$, της οποίας η γενική λύση είναι: $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$, δηλ. $u(X,t) = f(X+ct) + g(X-ct)$ (γενική λύση **d' Alembert**) όπου *f*, *g* αυθαίρετες συναρτήσεις που προσδιορίζονται από τις αρχικές & συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος

c) Εάν $\mathbf{B}_o = \{X / X \geq 0\}$ …δηλ. ο ημιάπειρος μονοδιάστατος χώρος



- *Αρχικές συνθήκες:* $\begin{cases} u(X,0) = 0 \\ \dot{u}(X,0) = 0 \end{cases}$, $\quad \forall\, X \in \mathbf{B_o}$

- *Συνοριακές συνθήκες:* $\begin{cases} T(0,t) = \hat{p}(t) \\ T(\infty,t) = \text{πεπερασμένο} \end{cases}$, $\quad \forall\, t > 0$

να βρεθούν οι $u(X,t)$ & $T(X,t)$, $\quad \forall\, X \in \mathbf{B_o}$ & $t \geq 0$

ΛΥΣΗ

a) Αξίωμα διατήρησης της ορμής (για $b = 0$): $\dfrac{\partial T}{\partial X} = \rho_o \dot{v} \Rightarrow \dfrac{\partial (k\varepsilon)}{\partial X} = \rho_o \ddot{u} \Rightarrow$

$$\Rightarrow k\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} = \rho_o \ddot{u} \Rightarrow k\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \rho_o \ddot{u} \Rightarrow \ddot{u} - (k/\rho_o)u,_{XX} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{u} - c^2 u,_{XX} = 0}$$

b) Αλλαγή μεταβλητών: $u(X,t) \to u(\xi,\eta)$, όπου $\xi = X + ct$ & $\eta = X - ct$

$$u,_X \equiv \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = u,_\xi + u,_\eta$$

$$u,_{XX} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{\partial (u,_\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial (u,_\xi)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial (u,_\eta)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial (u,_\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial X} =$$

$$= \frac{\partial (u,_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial (u,_\xi)}{\partial \eta} + \frac{\partial (u,_\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial (u,_\eta)}{\partial \eta} = u,_{\xi\xi} + 2u,_{\xi\eta} + u,_{\eta\eta}$$

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}c - \frac{\partial u}{\partial \eta}c = c\left(u,_\xi - u,_\eta\right)$$

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\left[\frac{\partial (u,_\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (u,_\xi)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial (u,_\eta)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial (u,_\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right] =$$

$$= c^2\left[\frac{\partial (u,_\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial (u,_\xi)}{\partial \eta} - \frac{\partial (u,_\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial (u,_\eta)}{\partial \eta}\right] = c^2\left(u,_{\xi\xi} - 2u,_{\xi\eta} + u,_{\eta\eta}\right)$$

Άρα: $\ddot{u} - c^2 u,_{XX} = 0 \Rightarrow -4c^2 u,_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow \boxed{u,_{\xi\eta} = 0} \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = \phi(\xi) \Rightarrow u = \underbrace{\int \phi(\xi)\,d\xi}_{f(\xi)} + g(\eta) \Rightarrow \boxed{u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)}$$

δηλ. $\boxed{u(X,t) = f(X+ct) + g(X-ct)}$

c) Εφόσον: $u(X,t) = f(X+ct) + g(X-ct)$ (1)

$$\Rightarrow \dot{u}(X,t) = f'(X+ct)\frac{\partial \xi}{\partial t} + g'(X-ct)\frac{\partial \eta}{\partial t} = c\left[f'(X+ct) - g'(X-ct)\right] \quad (2)$$

Θεωρώντας γενικές αρχικές συνθήκες της μορφής

$$\begin{cases} u(X,0) = R(X) \\ \dot{u}(X,0) = Q(X) \end{cases}$$

γνωστές συναρτήσεις του X
[που στην παρούσα άσκηση είναι: $R(X) \equiv 0$ & $Q(X) \equiv 0$]

Οι εξισώσεις [(1) & (2)] $\Rightarrow \begin{cases} f(X) + g(X) = R(X) \\ c\left[f'(X) - g'(X)\right] = Q(X) \end{cases}$ (3)

Ολοκλήρωση της $(3)_2$ στο διάστημα $[0, X] \Rightarrow$

$$\Rightarrow c\left[f(X) - g(X)\right] - c\left[f(0) - g(0)\right] = \int_0^X Q(s)\,\mathrm{d}s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(X) - g(X) = \frac{1}{c}\int_0^X Q(s)\,\mathrm{d}s + \left[f(0) - g(0)\right] \quad (4)$$

$$[(3)_1 + (4)] \Rightarrow f(X) = \frac{1}{2}R(X) + \frac{1}{2c}\int_0^X Q(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left[f(0) - g(0)\right] \quad (5)$$

$$[(3)_1 - (4)] \Rightarrow g(X) = \frac{1}{2}R(X) - \frac{1}{2c}\int_0^X Q(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\left[f(0) - g(0)\right] \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας στην (5) το όρισμα X με το $\xi = X + ct$, και στην (6) το όρισμα X με το $\eta = X - ct$, προκύπτει:

$$\Rightarrow f(X+ct) = \frac{1}{2}R(X+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{X+ct} Q(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left[f(0) - g(0)\right] \quad (7)$$

$$\Rightarrow g(X-ct) = \frac{1}{2}R(X-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{X-ct} Q(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\left[f(0) - g(0)\right] \quad (8)$$

Η εξίσωση (8), που δίνει τη συνάρτηση $g(X-ct)$, ισχύει για $X-ct \geq 0 \Leftrightarrow X \geq ct$, εφόσον η (6) έχει ληφθεί για τον ημιάπειρο χώρο, δηλ. για $X \geq 0$. Αντίστοιχος περιορισμός δεν προκύπτει για τη συνάρτηση $f(X+ct)$, μιας και το όρισμα της είναι $X+ct \geq 0$, $\forall\ X \in \mathbf{B_o}$ & $t \geq 0$.

$$[(1),(7),(8)] \Rightarrow u(X,t) = \frac{R(X+ct)+R(X-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{X-ct}^{X+ct} Q(s)\,\mathrm{d}s\,,\quad X-ct \geq 0$$

η οποία για $[R(X) \equiv 0$ & $Q(X) \equiv 0] \Rightarrow$ $\boxed{u(X,t)=0\,,\quad \text{για}\ \ X-ct \geq 0}$

$$T = k\varepsilon = k\frac{\partial u}{\partial X} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(X,t)=0\,,\quad \text{για}\ \ X-ct \geq 0}$$

Επίσης:

$$T(X,t) = k\frac{\partial u(X,t)}{\partial X} \Rightarrow T(X,t) = k\left[f'(X+ct)\frac{\partial \xi}{\partial X} + g'(X-ct)\frac{\partial \eta}{\partial X}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(X,t) = k\left[f'(X+ct)+g'(X-ct)\right]$$

η οποία, λόγω της συνοριακής συνθήκης $T(0,t)=\hat{p}(t)$, δίνει:

$$k\left[f'(ct)+g'(-ct)\right] = \hat{p}(t)$$

Θέτουμε: $\zeta = -ct$, οπότε: $k\left[f'(-\zeta)+g'(\zeta)\right] = \hat{p}(-\zeta/c) \Rightarrow$

$$\Rightarrow g'(\zeta) = \frac{1}{k}\hat{p}(-\zeta/c) - f'(-\zeta) \qquad (9)$$

Η τελευταία εξίσωση συσχετίζει την g με αρνητικό όρισμα ($\zeta < 0$) και την f με θετικό όρισμα, η οποία δίνεται από την (5) που για $R(X) \equiv 0$ & $Q(X) \equiv 0$ δίνει $f(X) = \tfrac{1}{2}\left[f(0)-g(0)\right] \Rightarrow f'(X)=0$, δηλ. $f'(-\zeta)=0$.

Άρα η (9) δίνει:

$$g'(\zeta) = \frac{1}{k}\hat{p}(-\zeta/c) \Rightarrow g(\zeta) = \frac{1}{k}\int_0^{\zeta} \hat{p}(-s/c)\,\mathrm{d}s + g(0),\ \text{για}\ \zeta < 0$$

Θέτοντας $\tau = -s/c$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$g(\zeta) = -\frac{c}{k}\int_0^{-\zeta/c} \hat{p}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + g(0),\ \text{για}\ \zeta < 0$$

όπου αντικαθιστώντας το όρισμα ζ με το $\eta = X - ct$, προκύπτει:

$$g(X-ct) = -\frac{c}{k}\int_0^{t-X/c} \hat{p}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + g(0), \qquad \text{για}\ X - ct < 0 \tag{10}$$

Όμως: $f(X) = \frac{1}{2}\left[f(0) - g(0)\right] \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}\left[f(0) - g(0)\right] \Rightarrow f(0) = -g(0) \Rightarrow$

Άρα: $f(X) = -g(0) \Rightarrow f(X+ct) = -g(0)$ (11)

Αντικαθιστώντας την (10) και την (11) στην (1) προκύπτει:

$$\boxed{u(X,t) = -\frac{c}{k}\int_0^{t-X/c} \hat{p}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \text{για}\ X - ct < 0}$$

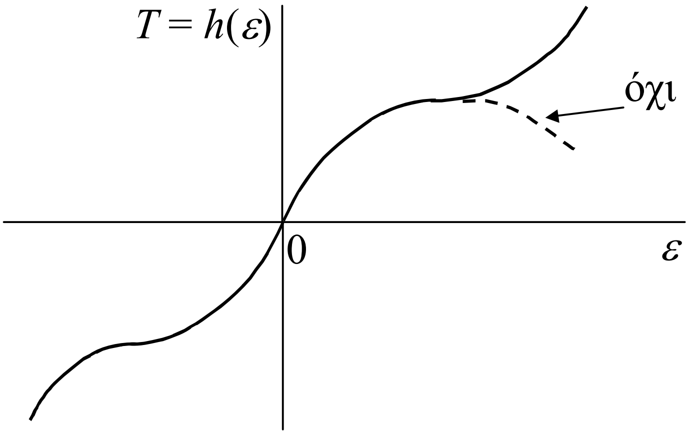
και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibnitz για την παραγώγιση ολοκληρωμάτων:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} F(x,a)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} \frac{\partial F}{\partial a}\,\mathrm{d}x + F(\varphi_2,a)\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}a} - F(\varphi_1,a)\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}a}$$

προκύπτει η τάση ως:

$$\boxed{T(X,t) = k\frac{\partial u(X,t)}{\partial X} = \hat{p}(t - X/c), \quad \text{για}\ X - ct < 0}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ ΓΙΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ



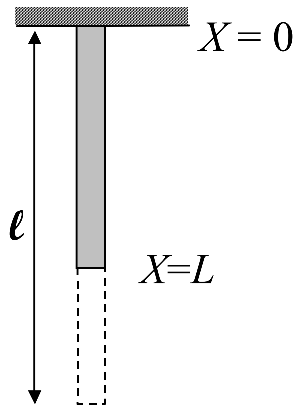
$T = h(\varepsilon) = h(u,_X)$

$h'(\varepsilon) > 0$ (δηλ. γνησ. αύξουσα)

$\Rightarrow h'(u,_{\mathrm{X}})\, u,_{\mathrm{XX}} + \rho_{\mathrm{o}} b = \rho_{\mathrm{o}} \ddot{u}$

δηλ. υπερβολικού τύπου μη-γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

<u>**Παράδειγμα** (Παραμόρφωση μόνον με την επίδραση της βαρύτητας):</u>



- Ελαστοστατικό πρόβλημα, δηλ. $\dot{u} = 0 \Rightarrow \ddot{u} = 0$
- $\mathbf{B_o} = \{\, X \setminus\ 0 \le X \le L \}$
- Οριακές συνθήκες: $u(0,t) = 0$ & $T(L,t) = 0$
- Επίδραση βαρύτητας: $b(X,t) = g$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h'(u,_X)\, u,_{XX} \; + \; \rho_o g \; = \; 0 \\ u(0) = 0,\ u,_X(L) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u(X) = \int_0^X h^{-1}\left\{\rho_o g(L-s)\right\} \mathrm{d}s$$

Στη γραμμική περίπτωση: $h(\varepsilon) = k\varepsilon \;\Rightarrow\; h^{-1}(\varepsilon) = \dfrac{1}{k}\varepsilon$

Οπότε προκύπτει: $u(X) = \dfrac{\rho_o g}{k}\left(L - \dfrac{X}{2} \right) X$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΙΕΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

1. ΕΛΑΣΤΙΚΑ (ή ΙΔΑΝΙΚΑ ή ΒΑΡΟΤΡΟΠΙΚΑ) ΡΕΥΣΤΑ

Η τάση $T(X,t)$ εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα:

$$T = -P(\rho), \qquad P'(\rho) > 0$$

$c \equiv \sqrt{P'(\rho_o)}$ = ταχύτητα του ήχου στο ρευστό

- **Σύστημα Εξισώσεων:**

$$\left.\begin{array}{l} \partial\rho/\partial t + \partial(\rho v)/\partial x = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \dot{v} \\ T = -P(\rho) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -P'(\rho)\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho b = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

(1) $\rightarrow$ σύστημα εξισώσεων αεροδυναμικής (gas dynamics)

$$\left.\begin{array}{l} b = 0 \ \text{(αμελητέες μαζικές δυνάμεις)} \\ v = 0 \ \text{(κατάσταση ισορροπίας)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_o = \text{σταθ.}$$

- **Καταστάσεις κοντά στην ισορροπία ($v = 0$, $\rho = \rho_o$) με $b = 0$**

$$\rho = \rho_o + \tilde{\rho}(x,t), \quad \tilde{\rho}/\rho_o << 1$$

$$v = \tilde{v}(x,t), \quad \text{όπου} \quad \tilde{\rho} = \mathcal{O}(\epsilon) \ \& \ \tilde{v} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{με } \epsilon << 1$$

$$\text{Αντικατάσταση στο (1)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-P'(\rho)\big|_{\rho=\rho_o(1+\tilde{\rho}/\rho_o)}}{\rho_o(1+\tilde{\rho}/\rho_o)}\left(\dfrac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{v}\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_o\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \dfrac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v})}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Όροι τάξης $\mathcal{O}(\epsilon^2) \rightarrow 0$ [δηλ. $\tilde{v}(\partial\tilde{v}/\partial x) \rightarrow 0$ & $\partial(\tilde{\rho}\tilde{v})/\partial x \rightarrow 0$] & $1 + \tilde{\rho}/\rho_o \rightarrow 1$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-P'(\rho_o)}{\rho_o}\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x} = \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_o\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial x} \end{cases} \quad \text{σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισ.}$$

Αποσύζευξη του συστήματος παραγωγίζοντας κάθε εξίσωση ως προς t & x:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-P'(\rho_o)}{\rho_o}\dfrac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial x\partial t} = \dfrac{\partial^2\tilde{v}}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial t^2} = -\rho_o\dfrac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x\partial t} \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} \dfrac{-P'(\rho_o)}{\rho_o}\dfrac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x\partial t} \\ \dfrac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial x\partial t} = -\rho_o\dfrac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x^2} \end{cases}$$

από τις οποίες εύκολα λαμβάνεται:

$$\begin{cases} P'(\rho_o)\dfrac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial t^2} \\ P'(\rho_o)\dfrac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\tilde{v}}{\partial t^2} \end{cases} \ldots \text{ εξισώσεις διάδοσης κύματος με } c = \sqrt{P'(\rho_o)}$$

Άρα, γενική λύση: $\begin{cases} \tilde{\rho} = f(X+ct) + g(X-ct) \\ \tilde{v} = \phi(X+ct) + h(X-ct) \end{cases}$

2. ΝΕΥΤΩΝΙΚΑ ΡΕΥΣΤΑ

Ιξώδη ρευστά των οποίων η τάση $T(X,t)$ εκτός από την πυκνότητα εξαρτάται και από το ρυθμό παραμόρφωσης $\kappa = \partial v/\partial x$, δηλ.

$$T = \varphi(\rho, \partial v/\partial x)$$

Ειδική περίπτωση $\rightarrow$ ***γραμμικά νευτωνικά ρευστά****:

*Η γραμμική νευτωνική σχέση είναι εντυπωσιακά ικανοποιητική για μεγάλη κατηγορία ρευστών, δηλ. αρκετά υγρά (π.χ. νερό, γλυκερίνη, βενζίνη, υδράργυρος) και αέρια (π.χ. αέρας, υδρογόνο, ήλιο, διοξείδιο του άνθρακα) παρουσιάζουν ουσιαστικά γραμμική νευτωνική συμπεριφορά.

$$T = -P(\rho) + \mu\, \partial v/\partial x$$

$P(\rho)$ = θερμοδυναμική πίεση

$\mu\, \partial v/\partial x$ = τάση λόγω ιξώδους (εκδηλώνεται μόνο με την κίνηση)

$\mu > 0$ … ιξώδες ή συντελεστής ιξώδους (παράμετρος του υλικού η οποία καθορίζει την αντίσταση του ρευστού σε διατμητικές δυνάμεις όταν αυτό είναι σε κίνηση)

ιξώδες ⇒ εσωτερικές τριβές ⇒ απώλεια ενέργειας

$$\text{Αύξηση θερμοκρασίας} \Rightarrow \begin{cases} \downarrow \mu \ \text{ των υγρών} \\ \uparrow \mu \ \text{ των αερίων} \end{cases}$$

Η εξάρτηση του ιξώδους από την πίεση είναι συνήθως μικρής σημασίας σε σύγκριση με αυτήν από τη θερμοκρασία

- **Σύστημα Εξισώσεων:**

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &T = -P(\rho) + \mu\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Αντικατάσταση $(3)_3$ στην $(3)_2$ ⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \\ -\dfrac{\partial P(\rho)}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho b = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{4}$$

➢ **Επίλυση της (4) για μόνιμη κατάσταση (steady state)* & με $b = 0$**

$$\text{Μόνιμη κατάσταση: } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = v(x) \end{array} \right\} \tag{5}$$

$$(4)_1 \Rightarrow \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \rho v = \phi(t) \tag{6}$$

$[(5) \ \& \ (6)] \Rightarrow \rho v =$ σταθερό

$$\text{Συνοριακές συνθήκες: } \begin{cases} \rho = \rho_o \ \ (\text{σταθερά}), \quad \text{για } \ x \to -\infty \\ v = v_o \ \ (\text{σταθερά}), \quad \text{για } \ x \to -\infty \end{cases}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\rho v = \rho_o v_o} \tag{7}$$

$$(3)_2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = \rho_o v_o \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow T = \rho_o v_o v + \hat{T}(t)$$

$$\text{Όμως, για } \ x \to -\infty \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T = -P(\rho_o) \\ T = \rho_o v_o^2 + \hat{T}(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{T}(t) = -P(\rho_o) - \rho_o v_o^2$$

$$\text{Άρα:} \qquad \boxed{T = \rho_o v_o (v - v_o) - P(\rho_o)} \tag{8}$$

Χρησιμοποιώντας τις αλγεβρικές εξισώσεις (7) & (8) για την απαλοιφή των T και ρ από την εξίσωση $(3)_3$, προκύπτει το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακής τιμής:

* Στη **μόνιμη κατάσταση**, η ταχύτητα και οι θερμοδυναμικές ιδιότητες (π.χ. πυκνότητα, πίεση, θερμοκρασία) σε κάθε σημείο x του χώρου δεν αλλάζουν με το χρόνο, δηλ. έχουμε: $v = v(x)$, $\rho = \rho(x)$, $\theta = \theta(x)$ κ.ο.κ. (συναρτήσεις μόνο της θέσης και όχι του χρόνου). Ως εκ τούτου, οι τοπικές χρονικές παράγωγοι $\partial v / \partial t$, $\partial \rho / \partial t$, $\partial \theta / \partial t$ κλπ είναι μηδέν, ενώ οι ολικές χρονικές παράγωγοι $\dot{v}, \dot{\rho}, \dot{\theta}$ κλπ μπορεί να είναι διάφορες του μηδενός, αφού π.χ. $\dot{v} = (\partial v / \partial t) + (\partial v / \partial x) v = (\partial v / \partial x) v$.

$$\left.\begin{array}{c} -P(\rho_o v_o / v) + \mu \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \rho_o v_o (v - v_o) - P(\rho_o) \\ v(x) \to v_o \quad \text{για} \;\; x \to -\infty \end{array}\right\} \tag{9}$$

δηλ. έχουμε να λύσουμε μία κανονική διαφορική εξίσωση ως προς v

Αδιάστατη μεταβλητή: $f(x) = v(x)/v_o$

$$(9) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -P(\rho_o / f) + \mu v_o \dfrac{\partial f}{\partial x} = \rho_o v_o^2 (f - 1) - P(\rho_o) \\ f(x) \to 1 \quad \text{για} \;\; x \to -\infty \end{array}\right\} \;\ldots\; \text{Π.Ε.} \tag{10}$$

Όμως, Α.Δ.Μ. (σε Π.L.) $\Rightarrow$ $F = \rho_o / \rho = v / v_o$. Άρα:

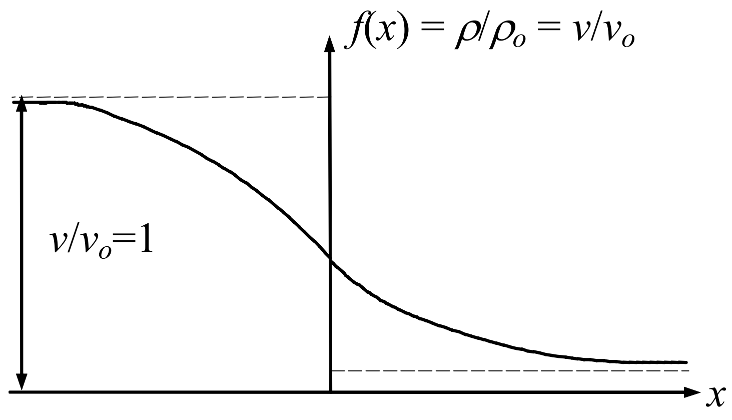
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = v(x)/v_o \;\to\; \text{συντεταγμένη } x \\ F(X,t) = v(X,t)/v_o \;\to\; \text{συντεταγμένη } X \end{array}\right\} \to F(X,t) = f(x)\big|_{x=\chi(X,t)} \tag{11}$$

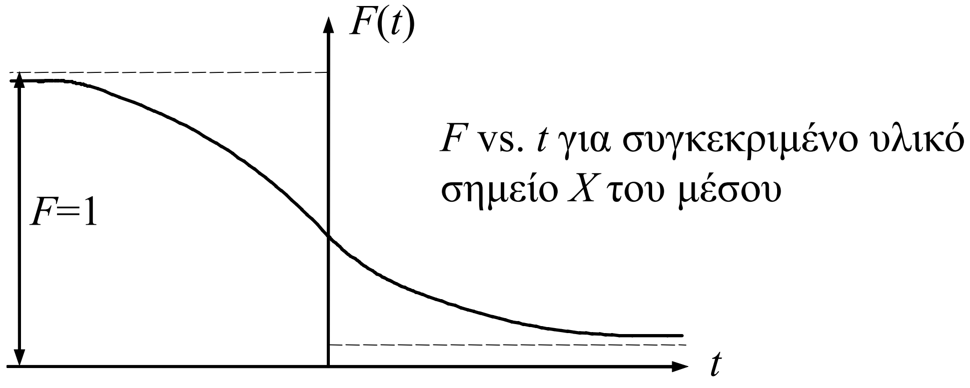
$$\dot{\mathrm{F}} = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} \xrightarrow[\partial f/\partial t = 0]{\text{μόνιμη κατάσταση}} \dot{\mathrm{F}} = v\frac{\partial f}{\partial x} = v_o \frac{\partial f}{\partial x} F$$

$$(10) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -P(\rho_o / F) + \mu(\dot{F}/F) = \rho_o v_o^2 (F - 1) - P(\rho_o) \\ F \to 1 \quad \text{για} \;\; t \to -\infty \end{array}\right\} \;\ldots\; \text{Π.L.} \tag{12}$$

Μια λύση της (10) είναι η $f(x) \equiv 1$ που ισοδυναμεί με τη λύση $F \equiv 1$ της (12).

Ποιοτικές γραφικές παραστάσεις άλλων λύσεων:





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Ελαστικό (ιδανικό) ρευστό: $T = -P(\rho)$, δηλ. $\mu \equiv 0$

$$(12) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -P(\rho_o / F) = \rho_o v_o^2 (F-1) - P(\rho_o) \\ F \to 1 \quad \text{για} \;\; t \to -\infty \end{array} \right\} \text{...(αλγεβρ. εξίσωση)} \qquad (13)$$

Μια λύση του (13) είναι η $F \equiv 1$

Έστω ότι $\exists$ 2^{η} (ασυνεχής) λύση τέτοια ώστε: $F = 1 - h$, για $t > t_o$ με $|h| << 1$

$$(13)_1 \;\; \Rightarrow \;\; -P(\tfrac{\rho_o}{1-h}) = -\rho_o v_o^2 h - P(\rho_o) \qquad (14)$$

Σειρά Taylor της $p(\tfrac{\rho_o}{1-h})$ γύρω από ρ_o:

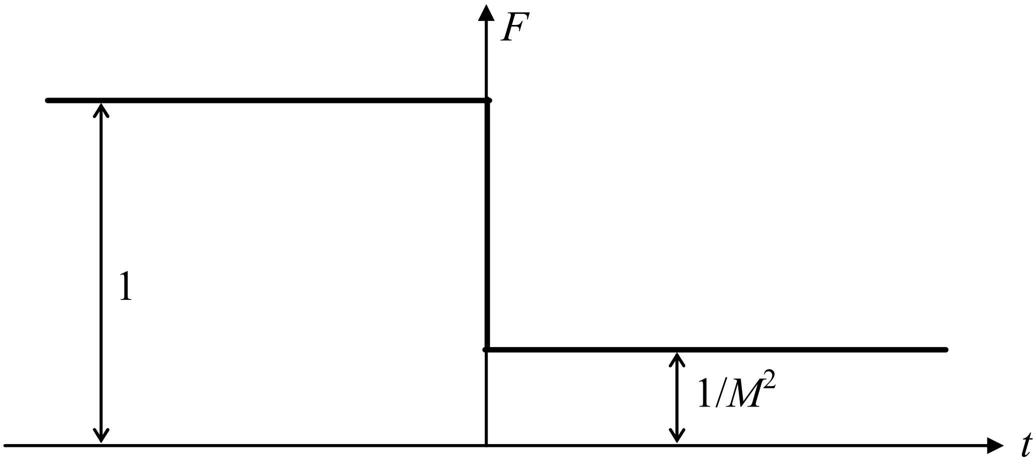
$$P(\tfrac{\rho_o}{1-h}) \cong P(\rho_o) + P'(\rho_o)\left(\frac{\rho_o}{1-h} - \rho_o \right) + ... = P(\rho_o) + P'(\rho_o)\frac{\rho_o h}{1-h} + ...$$

$$(14) \;\; \Rightarrow \;\; -P'(\rho_o)\frac{\rho_o h}{1-h} = -\rho_o v_o^2 h \Rightarrow h = 1 - \frac{P'(\rho_o)}{v_o^2} \Rightarrow h = 1 - \frac{1}{M^2}$$

$\sqrt{P'(\rho_o)} \equiv c$ = ταχύτητα ήχου στο ρευστό

$M \equiv \dfrac{v_o}{c} =$ αριθμός Mach

$$\text{Αν}\quad \begin{cases} M > 1 & \rightarrow \quad \text{Υπερηχητική ροή} \\ M < 1 & \rightarrow \quad \text{Υποηχητική ροή} \end{cases}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: $\mu \neq 0$ & $P(\rho) = k\rho$, όπου k = σταθερά αναλογίας

Έστω $P(\rho_o) = P_o$. Επομένως: $P_o = k\rho_o \Rightarrow k = P_o / \rho_o$

Άρα: $$\boxed{P(\rho) = \frac{P_o}{\rho_o}\rho}$$

$$(12) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mu \dot{F} = \rho_o v_o^2 (F-1)(F-M^{-2}) \\ F \rightarrow 1 \quad \text{για} \;\; t \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \tag{15}$$

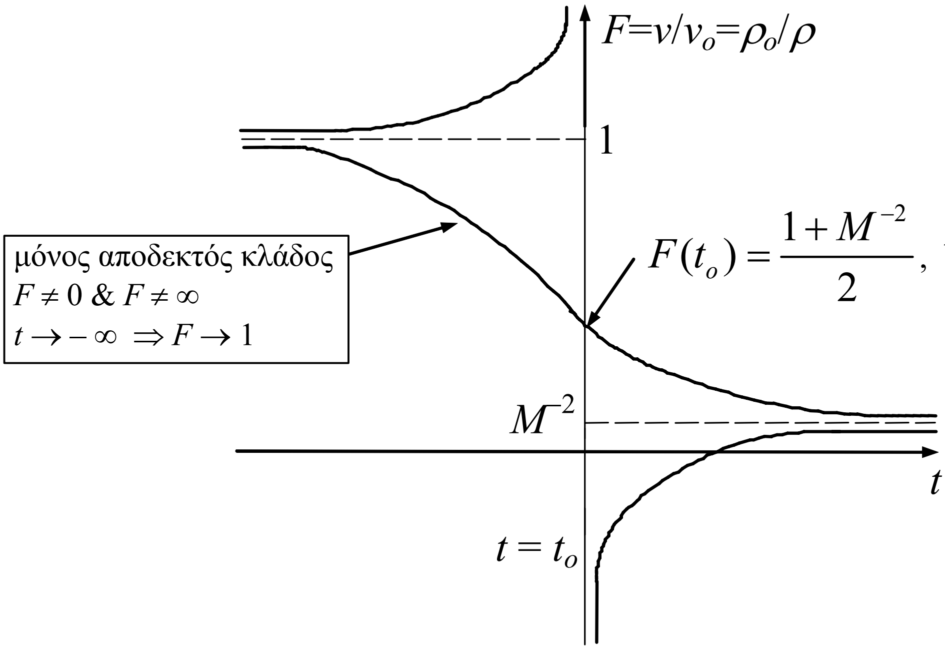
όπου: $M^2 = v_o^2 / P'(\rho_o) = \rho_o v_o^2 / P_o$

$$(15)_1 \Rightarrow \int \frac{\mu}{\rho_o v_o^2} \frac{\mathrm{d}F}{(F-1)(F-M^{-2})} = \int \mathrm{d}t - t_o \Rightarrow \frac{\mu M^2}{\rho_o v_o^2 (M^2-1)} \ln\left|\frac{F-1}{F-M^{-2}}\right| = t - t_o$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F-1}{F-M^{-2}}\right| = \exp\left(\frac{t-t_o}{\tau}\right) \qquad \ldots\; t_o = \text{σταθ. ολοκλήρωσης}$$

όπου: $$\tau \equiv \frac{\mu M^2}{\rho_o v_o^2 (M^2-1)} = \frac{\mu}{P_o (M^2-1)} = \text{ χαρακτηριστικός χρόνος}$$

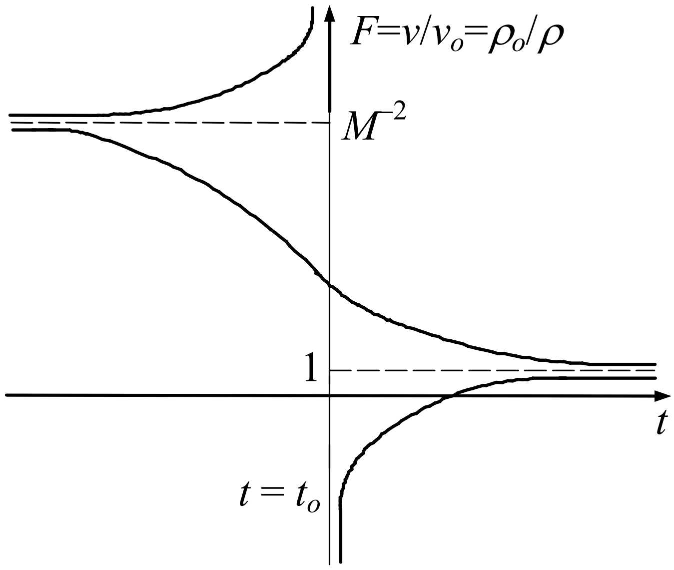
1^η Περίπτωση: $M > 1$ (δηλ. $\tau > 0$) $\Rightarrow \begin{cases} F < M^{-2} & \rightarrow \quad \dfrac{F-1}{F-M^{-2}} = e^{\frac{t-t_o}{\tau}} \\ M^{-2} < F < 1 & \rightarrow \quad \dfrac{1-F}{F-M^{-2}} = e^{\frac{t-t_o}{\tau}} \\ F > 1 & \rightarrow \quad \dfrac{F-1}{F-M^{-2}} = e^{\frac{t-t_o}{\tau}} \end{cases}$



$F(t_o) = \dfrac{1+M^{-2}}{2}$, κλίση: $\dot{F}(t_o) = -\dfrac{M^2-1}{4M^2\tau}$

Όταν $\mu \to 0 \Rightarrow \tau \to 0 \Rightarrow \dot{F}(t_o) \to -\infty \Rightarrow$ δομή shock

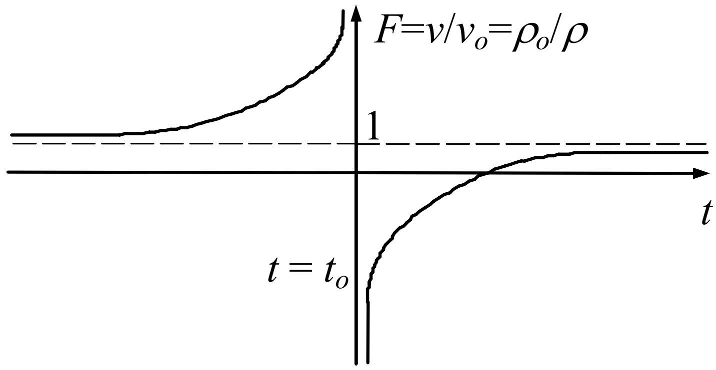
2^η Περίπτωση: $M < 1$ (δηλ. $\tau < 0$) $\Rightarrow \begin{cases} F < 1 & \rightarrow \quad \dfrac{F-1}{F-M^{-2}} = e^{\frac{t-t_o}{\tau}} \\ 1 < F < M^{-2} & \rightarrow \quad \dfrac{1-F}{F-M^{-2}} = e^{\frac{t-t_o}{\tau}} \\ F > M^{-2} & \rightarrow \quad \dfrac{F-1}{F-M^{-2}} = e^{\frac{t-t_o}{\tau}} \end{cases}$



δηλ. $t \to -\infty \;\Rightarrow F \to M^{-2}$ (όχι $F \to 1$)
Άρα για $M < 1$ αυτή η λύση *απορρίπτεται* & μοναδική λύση είναι η $F \equiv 1$

3η Περίπτωση: $M = 1$, οπότε: $(15)_1 \Rightarrow \mu\dot{F} = \rho_o v_o^2 (F-1)^2$

$$\Rightarrow \int \frac{\mu}{\rho_o v_o^2} \frac{\mathrm{d}F}{(F-1)^2} = \int \mathrm{d}t - t_o \Rightarrow F = 1 - \frac{\mu}{\rho_o v_o^2} \frac{1}{(t-t_o)}$$



Μολονότι, $t \to -\infty \;\Rightarrow F \to 1$, η λύση *απορρίπτεται* γιατί $t \to t_o \Rightarrow F \to \infty$
Άρα για $M = 1$ μοναδική λύση είναι η $F \equiv 1$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Η τάση $T(X,t)$ εξαρτάται όχι μόνο από την παραμόρφωση στον ίδιο χρόνο t αλλά & από την χρονική ιστορία της παραμόρφωσης:

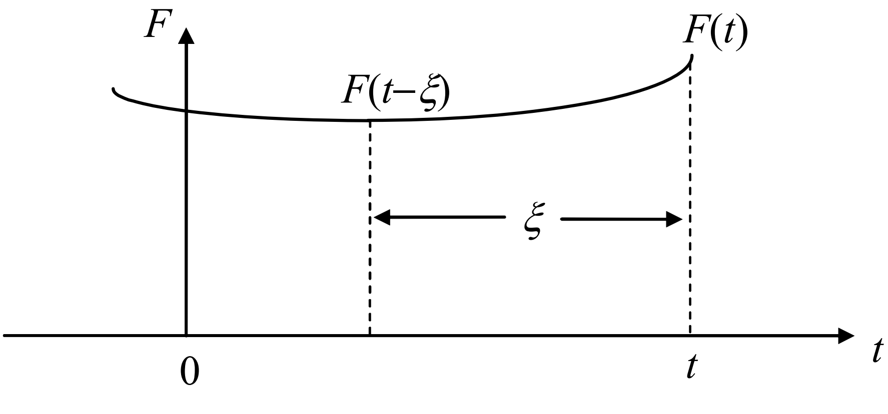
$$\left.\begin{aligned} T(X,t) &= \mathop{f}\limits_{-\infty}^{t}\left[F(X,\tau)\right] && \text{ομογενή υλικά} \\ T(X,t) &= \mathop{f}\limits_{-\infty}^{t}\left[F(X,\tau),X\right] && \text{μη - ομογενή υλικά} \end{aligned}\right\} \forall\, \tau \leq t$$

$f \rightarrow$ συναρτησιακό της συνάρτησης $F(X,t)$

Π.χ., η 1η εξίσωση μας λέει ότι εάν γνωρίζουμε την F για όλους τους χρόνους από $-\infty$ έως t, μπορούμε να προσδιορίσουμε την T στον παρόντα χρόνο t.

Μετασχηματισμός: $\tau = t - s \;\rightarrow\; T(t) = \mathop{f}\limits_{s=0}^{\infty}\left[F(t-s)\right]$, για δεδομένο X

Συνήθως, μόνο κάποιο χρονικό διάστημα ξ στο παρελθόν είναι σημαντικό, οπότε: $T(t) = \mathop{f}\limits_{s=0}^{\xi}\left[F(t-s)\right]$



δηλ. μόνο το χρονικό διάστημα ξ από τον παρόντα χρόνο είναι σημαντικό. Π.χ. αν ξ = 10 μέρες, τότε το υλικό "**θυμάται**" μόνο ότι συνέβη σ' αυτό μέσα στις 10 μέρες & τίποτε περισσότερο.

Ορισμός: $F(t-s) = F^{t}(s)$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F^t(s)\,|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(t-s)\,|_{s=0} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\tau^n} F(\tau)\,|_{\tau=t} = (-1)^n F^{(n)}(t)$$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1</u>: $s = 0$

$$T(t) \;=\; \mathop{f}_{s=0}^{0}\left[F(t-s)\right] \;\Rightarrow\; T(t) = \varphi(F(t)) \qquad \ldots \text{ ελαστικό υλικό}$$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2</u>: Rivlin-Eriksen ή διαφορικού τύπου ιξωδοελαστικά υλικά

- Μικρού εύρους (short-range) εξάρτηση από την ιστορία παραμόρφωσης
- $T(t)$ εξαρτάται από $\{F^t(0) = F(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F^t(s)\,|_{s=0}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F^t(s)\,|_{s=0}\}$, δηλ.

$$T(t) = f(F(t),\ \dot{F}(t), \ldots,\ F^{(n)}(t))$$

- Σημείωση:

$$F^{(n)}(t) = \overline{\partial x / \partial X}^{(n)} = \partial x^{(n)} / \partial X = (\partial x^{(n)} / \partial x)(\partial x / \partial X) = (\partial x^{(n)} / \partial x) F$$

δηλ. για: $n = 1 \rightarrow \dot{x} = v \;\;\&\;\; \dot{F} = F^{(1)} = (\partial v / \partial x) F$

$n = 2 \rightarrow \ddot{x} = \dot{v} \;\;\&\;\; \ddot{F} = F^{(2)} = (\partial \alpha / \partial x) F$

. . . .

. . . .

$n = n \rightarrow \overset{(n)}{x} = \overset{(n\text{-}1)}{v} \;\;\&\;\; F^{(n)} = (\partial \alpha_n / \partial x) F$, με $\alpha_n = x^{(n)}$

Άρα, ιξωδοελαστικό υλικό πολυπλοκότητας n:

$$T = g(F(t), \partial v / \partial x,\ \partial \alpha / \partial x, \ldots,\ \partial \alpha_n / \partial x)$$

ρευστά $\rightarrow$ $T = g(\rho, \partial v / \partial x,\ \partial \alpha / \partial x, \ldots, \partial \alpha_n / \partial x)$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3</u>: Υλικά με μεγάλου εύρους (long-range) εξάρτηση ή ολοκληρωτικά μοντέλα συμπεριφοράς

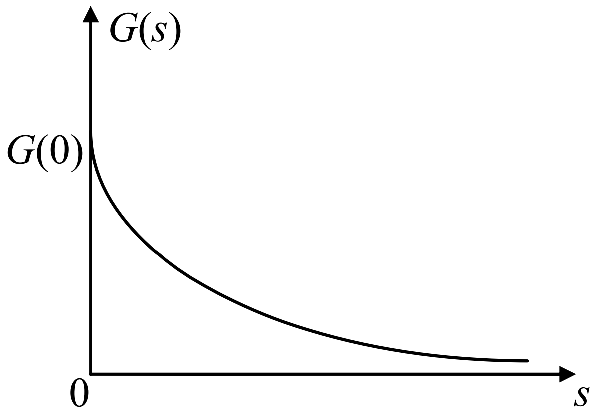
$$T(t) = k_\infty \varepsilon(t) + G(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s \qquad (1)$$

όπου: $\varepsilon = F - 1$

$k_\infty =$ σταθ. > 0 …μέτρο ελαστικότητας στην κατάσταση ισορροπίας

$G(s)$ = συνάρτηση χαλάρωσης

[μια συνάρτηση “επιρροής” ή “βάρους” (wieght function) που εκφράζει το πόσο επηρεάζεται η παρούσα συμπεριφορά του υλικού από το παρελθόν του]



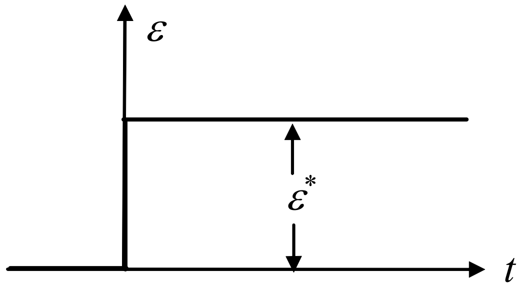
$G(0) > 0$ & $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$ [δηλ. μνήμη που ξεθωριάζει (fading memory)]

$k_\infty + G(0)$ = αρχικό μέτρο ελαστικότητας

<u>Σημείωση:</u> η (1) είναι η γενική καταστατική εξίσωση της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας [αποτέλεσμα της θεωρίας της συναρτησιακής ανάλυσης & γραμμικοποίησης (ανάπτυξη του $T(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{f}}\left[\varepsilon(t-s)\right]$ κατά Frechét σε αναλογία με την ανάπτυξη της συνάρτησης f κατά Taylor & διατήρηση του πρώτου ή γραμμικού όρου)]

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ \varepsilon^*, & \tau \ge 0 \end{cases}$$

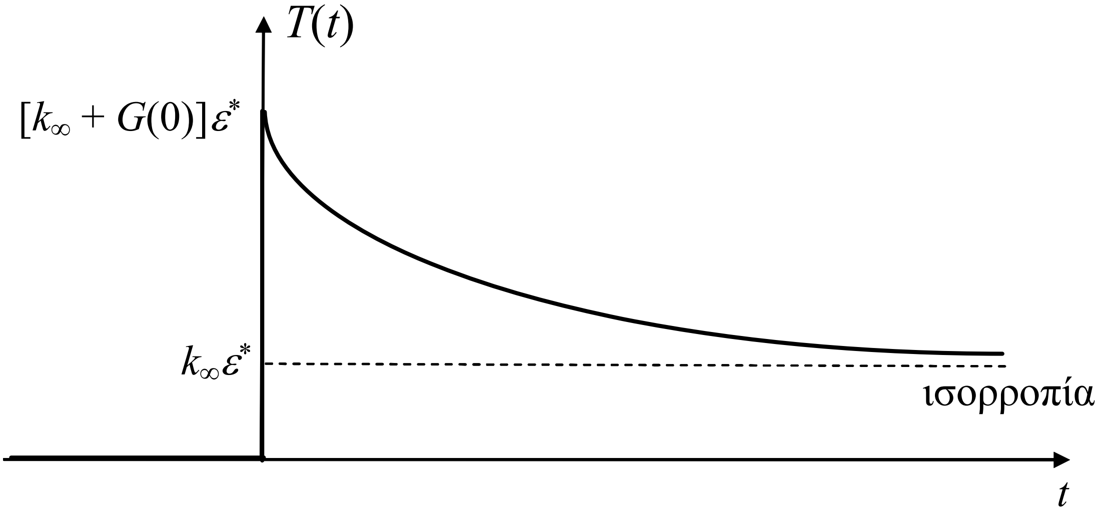


$$\tau = t - s \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t-s) = \begin{cases} 0, & s > t \\ \varepsilon^*, & \mathrm{s} \le t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ k_\infty \varepsilon^* + G(0)\varepsilon^* + \int_0^t \dot{G}(s)\varepsilon^* \,\mathrm{d}s & t \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ k_\infty \varepsilon^* + G(0)\varepsilon^* + [G(t) - G(0)]\varepsilon^* & t \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ [k_\infty + G(t)]\varepsilon^* & t \ge 0 \end{cases}$$

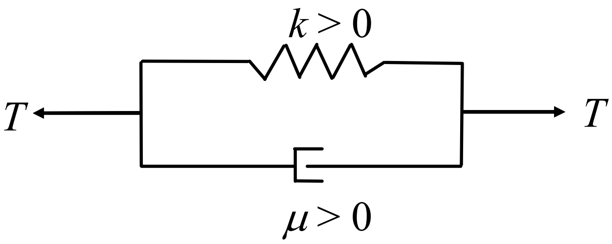


→ Πείραμα **Χαλάρωσης τάσης** (stress relaxation): δηλ. για ε = σταθ., το T μειώνεται με το χρόνο t προς μια ασυμπτωτική τιμή ισορροπίας. Από μια τέτοια διαδικασία που γίνεται στο εργαστήριο προσδιορίζονται τα k_∞ και $G(t)$ πειραματικά

<u>ΜΟΝΤΕΛΟ KELVIN-VOIGT</u>

- Ανήκει στην κατηγορία: $T = f(F, \dot{F})$, δηλ. υλικών με μικρού εύρους εξάρτηση από την ιστορία της παραμόρφωσης

- Φανταζόμαστε κάθε υλικό σωματίδιο X να λειτουργεί σαν ένας μηχανισμός που αποτελείται από ένα **ελατήριο** & έναν **αποσβεστήρα ιξώδους** σε <u>παράλληλη</u> διάταξη:



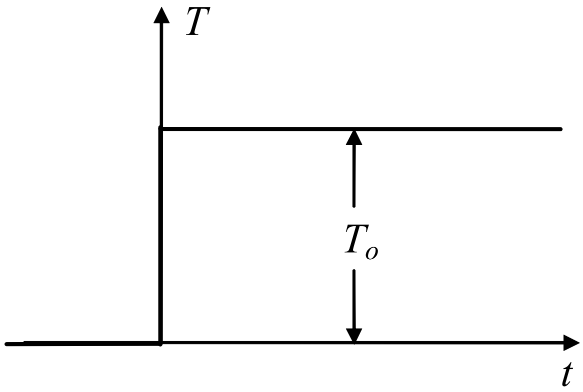
Ελατήριο: $T_k = k\varepsilon_k$, Αποσβεστήρας: $T_\mu = \mu\dot{\varepsilon}_\mu$

$$\text{Παράλληλη διάταξη} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} T = T_k + T_\mu \\ \varepsilon_k = \varepsilon_\mu = \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{T = k\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}} \qquad (2)$$

- Το μοντέλο αυτό μπορεί να περιγράψει πειράματα **ερπυσμού**, όπου μελετούμε τη μεταβολή της ανηγμένης παραμόρφωσης ε με το χρόνο t για T = σταθ.

Έστω, $T = T_o$ = σταθ.

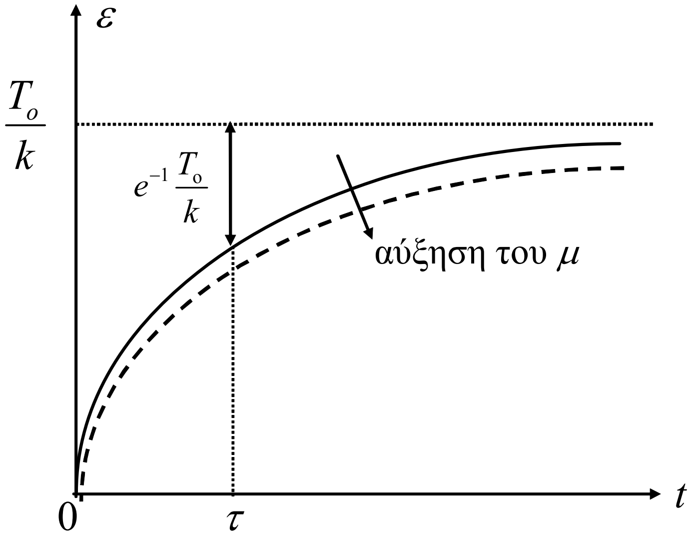
$\varepsilon\,(t = 0) = 0$



$$\Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{T_o}{\mu} - \frac{k}{\mu}\varepsilon$$ … συνήθης διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

$$\therefore \quad \boxed{\varepsilon = \frac{T_o}{k}(1 - e^{-t/\tau})}$$

$\tau \equiv \mu / k$ = χαρακτηριστικός χρόνος ερπυσμού (ιδιότητα του υλικού)



<u>Δυναμική του μοντέλου Kelvin-Voigt</u>

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial x}+\rho_o b=\rho_o\dot{v}\\ &T=k\varepsilon+\mu\dot{\varepsilon},\quad v=\dot{u},\quad \varepsilon=u,_X\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{ku,_{XX}+\mu\dot{u},_{XX}+\rho_o b \;=\; \rho_o\ddot{u}}$$

κυματική εξίσωση με απόσβεση
(damped wave equation)*

<u>Παράδειγμα επίλυσης προβλήματος αρχικών / συνοριακών τιμών για $b\equiv 0$</u>

$$\mathbf{B_o}=\{X\,/\,X\in[0,L]\}$$

- *Αρχικές συνθήκες:* $u(X,0)=0,\quad \dot{u}(X,0)=\sin(\pi X/L)$

- *Συνοριακές συνθήκες:* $u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0$

Έστω λύση η $u(X,t)$ = $U(t)\sin(\pi X/L)$, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, τότε:

---

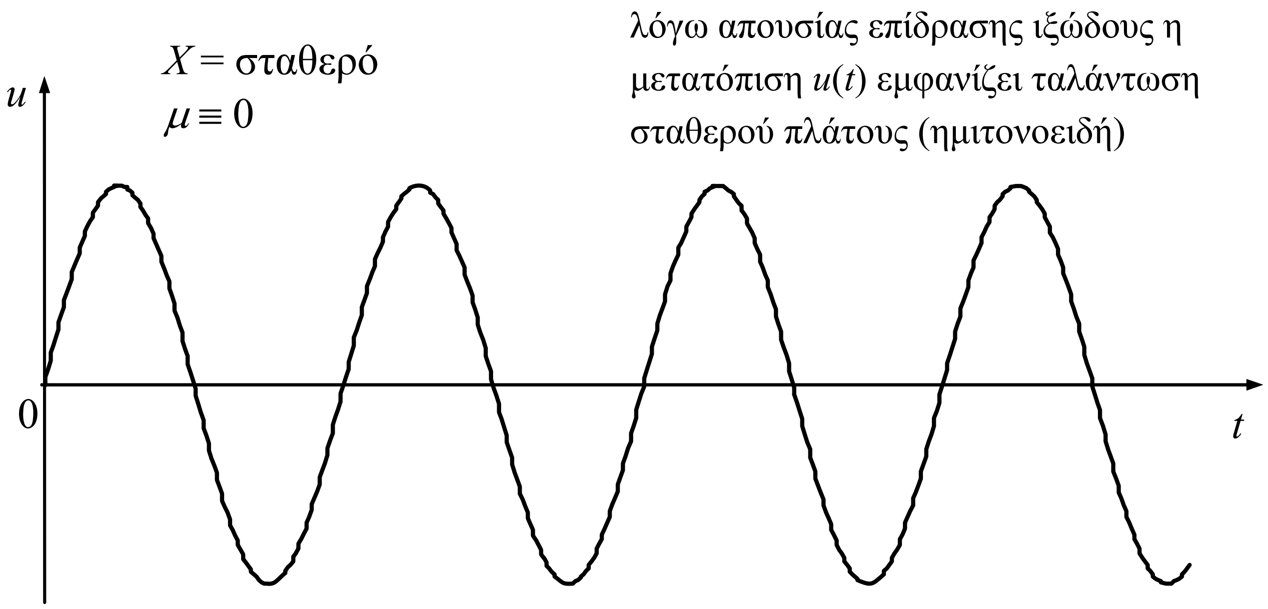
*Για μη-γραμμικό ελαστικό μέρος, δηλ.: $T=g(\varepsilon)+\mu\dot{\varepsilon}$

$\Rightarrow\; g'(u,_X)u,_{XX}+\mu\dot{u},_{XX}+\rho_o b \;=\; \rho_o\ddot{u}$ … γενικευμένη κυματική εξίσωση με απόσβεση

$$\left.\begin{aligned} k(\pi/L)^2 U(t) + \mu(\pi/L)^2 \dot{U}(t) \ + \ \rho_o \ddot{U}(t) = 0 \\ U(0) = 0, \qquad \dot{U}(0) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Για $\boldsymbol{\mu \equiv 0}$, το (3) έχει τη λύση: $U(t) = \sqrt{\dfrac{\rho_o}{k}}\dfrac{L}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{L}\sqrt{\dfrac{k}{\rho_o}}\,t\right)$, οπότε:

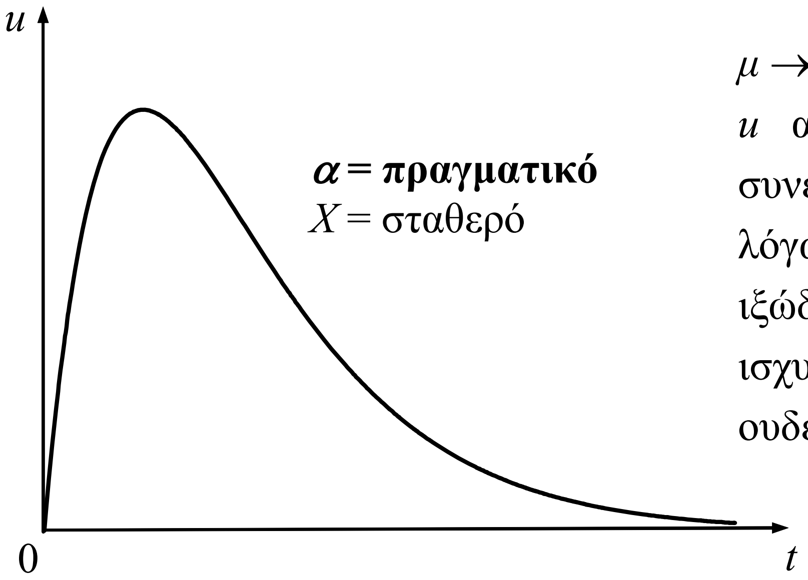
$$u(X,t) = \sqrt{\frac{\rho_o}{k}}\frac{L}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{k}{\rho_o}}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi X}{L}\right)$$



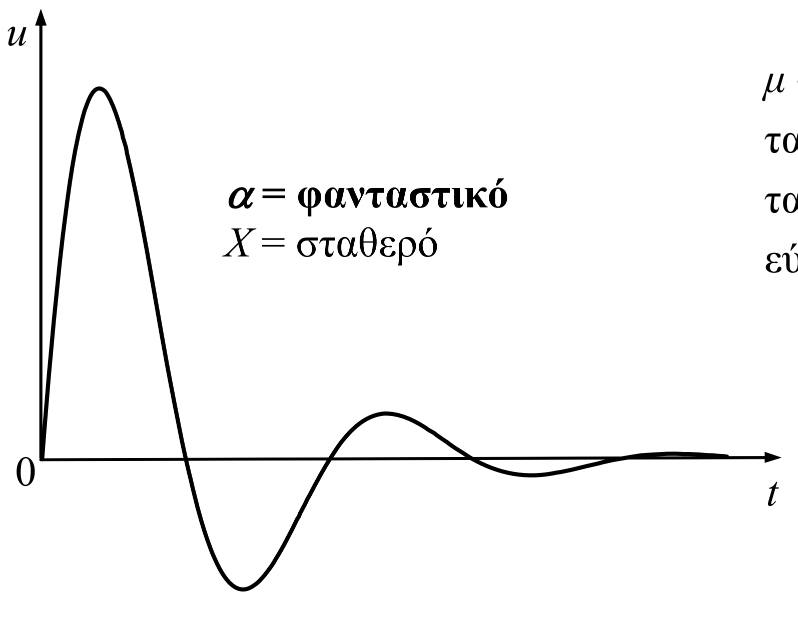
Λύση του (3) για $\boldsymbol{\mu \neq 0}$: $U(t) = \dfrac{1}{2\alpha}\ e^{-\omega t}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$, με $\alpha \neq 0$ (4)

όπου: $\omega = \dfrac{\mu}{2\rho_o}\left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2$ & $\alpha = \dfrac{\mu}{2\rho_o}\left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2\sqrt{1 - \dfrac{4\rho_o k}{\mu^2(\pi/L)^2}}$

$$(4) \Rightarrow u(X,t) = e^{-\omega t}\sin\left(\frac{\pi X}{L}\right)\begin{cases} \dfrac{\sinh(\alpha t)}{\alpha}, & \alpha = \text{πραγματικό, δηλ. } \dfrac{4\rho_o k}{\mu^2(\pi/L)^2} < 1 \\[2ex] \dfrac{\sin(|\alpha| t)}{|\alpha|}, & \alpha = \text{φανταστικό, δηλ. } \dfrac{4\rho_o k}{\mu^2(\pi/L)^2} > 1 \end{cases}$$



$\mu \rightarrow$ αρκετά μεγάλο.
u αρχικά αυξάνει ενώ στη συνέχεια τείνει να μηδενιστεί λόγω της επίδρασης του ιξώδους (που είναι τόσο ισχυρή ώστε δε συμβαίνει ουδεμία ταλάντωση).



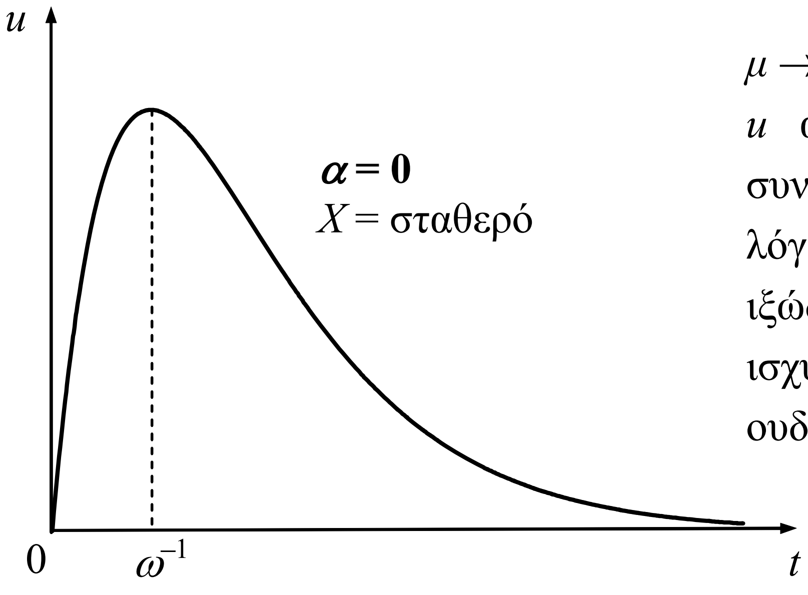
$\mu \rightarrow$ μικρό
ταλάντωση με απόσβεση ή ταλάντωση φθίνοντος εύρους

<u>Σημείωση</u>:

Όταν $\alpha = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4\rho_o k}{\mu^2 (\pi / L)^2} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2 = \dfrac{4\rho_o k}{\mu^2} \Rightarrow \omega = \dfrac{2k}{\mu}$

και η χαρακτηριστική εξίσωση της $(3)_1$ έχει τη διπλή ρίζα: $(\text{root}) = -\omega$

Οπότε λύση του (3): $U(t) = te^{-\omega t} \quad \Rightarrow \quad u(X,t) = te^{-\omega t} \sin\left(\dfrac{\pi X}{L}\right)$



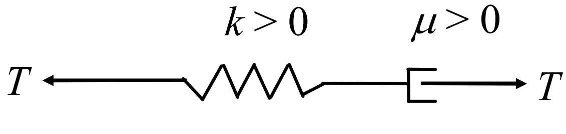
$\mu \to$ ενδιάμεση τιμή
u αρχικά αυξάνει ενώ στη συνέχεια τείνει να μηδενιστεί λόγω της επίδρασης του ιξώδους (που είναι αρκετά ισχυρή ώστε να μη συμβαίνει ουδεμία ταλάντωση).

<u>ΜΟΝΤΕΛΟ MAXWELL</u>

- Ανήκει στην κατηγορία: $T(t) = k_\infty \varepsilon(t) + G(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s$,

  δηλ. υλικών με μεγάλο εύρος εξάρτησης από την ιστορία της παραμόρφωσης (ολοκληρωτικό μοντέλο)

- Φανταζόμαστε κάθε υλικό σωματίδιο X να λειτουργεί σαν ένας μηχανισμός που αποτελείται από ένα **ελατήριο** & έναν **αποσβεστήρα ιξώδους** διατεταγμένα σε <u>*σειρά*</u>:



Ελατήριο: $T_k = k\varepsilon_k$, Αποσβεστήρας: $T_\mu = \mu\dot{\varepsilon}_\mu$

Διάταξη σε σειρά $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} T_k = T_\mu = T \\ \varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_\mu \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_k + \dot{\varepsilon}_\mu = \dfrac{\dot{T}}{k} + \dfrac{T}{\mu}$

$$\therefore \quad \boxed{\dot{T} + \frac{1}{\tau}T = k\dot{\varepsilon}} \qquad (5)$$

$\tau \equiv \mu / k =$ χαρακτηριστικός χρόνος απόσβεσης (ιδιότητα του υλικού)

$$(5)\Rightarrow e^{t/\tau}\left(\dot{T}+\frac{1}{\tau}T\right)=e^{t/\tau}k\dot{\varepsilon}\Rightarrow\overline{e^{t/\tau}T}^{\,\boldsymbol{\cdot}}=e^{t/\tau}k\dot{\varepsilon}\Rightarrow\int_{-\infty}^{t}\overline{e^{\xi/\tau}T(\xi)}^{\,\boldsymbol{\cdot}}\,\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{t}ke^{\xi/\tau}\dot{\varepsilon}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\Rightarrow e^{\xi/\tau}\,T(\xi)\Big|_{-\infty}^{t}=\int_{-\infty}^{t}ke^{\xi/\tau}\dot{\varepsilon}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Rightarrow e^{t/\tau}T(t)-\lim_{\xi\to-\infty}e^{\xi/\tau}T(\xi)=\int_{-\infty}^{t}ke^{\xi/\tau}\dot{\varepsilon}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

η οποία, για $\lim\limits_{\xi\to-\infty}T(\xi)=T(-\infty)$ = πεπερασμένο, δίνει:

$$e^{t/\tau}T(t)=\int_{-\infty}^{t}ke^{\xi/\tau}\dot{\varepsilon}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Rightarrow T(t)=\int_{-\infty}^{t}ke^{-(t-\xi)/\tau}\dot{\varepsilon}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad (6)$$

δηλαδή: $\quad T(t) \;=\; \underset{\xi=-\infty}{\overset{t}{f}}\left[\varepsilon(\xi)\right]$

Θέτοντας: $s=t-\xi$ (όπου s = παρελθόν), $(6)\Rightarrow T(t)=\int_{0}^{\infty}ke^{-s/\tau}\dot{\varepsilon}(t-s)\,\mathrm{d}s$

$$\Rightarrow\; T(t)=-ke^{-s/\tau}\varepsilon(t-s)\Big|_{0}^{\infty}\;-\;\int_{0}^{\infty}(k/\tau)\;e^{-s/\tau}\varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s$$

η οποία, για $\lim\limits_{s\to\infty}\varepsilon(t-s)=\varepsilon(-\infty)$ = πεπερασμένο, δίνει:

$$T(t)=k\varepsilon(t)-\int_{0}^{\infty}(k/\tau)\;e^{-s/\tau}\varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s \qquad (7)$$

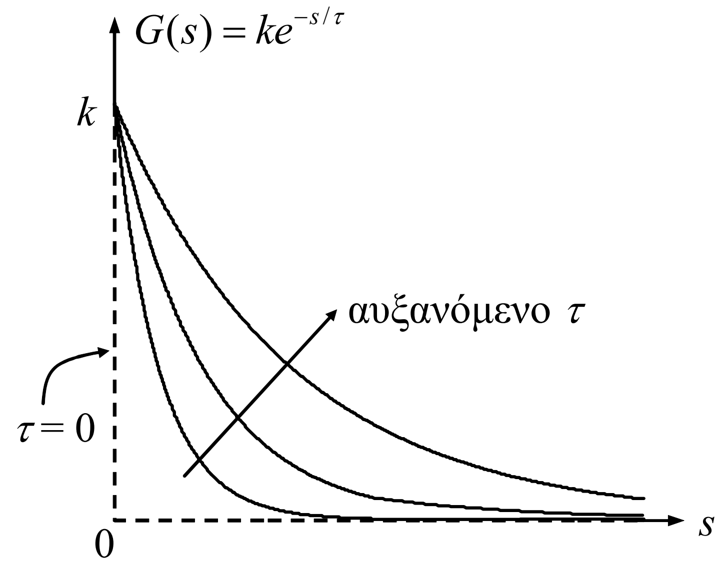
δηλαδή: $\quad T(t) \;=\; \underset{s=0}{\overset{\infty}{f}}\left[\varepsilon(t-s)\right]$

Από την (7) συμπεραίνεται ότι η ***συνάρτηση χαλάρωσης*** του μοντέλου Maxwell είναι:

$$G(s)\equiv ke^{-s/\tau} \qquad (8)$$

η οποία ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες, δηλαδή:

$$G(s)>0,\qquad \dot{G}(s)<0,\qquad \lim_{s\to\infty}G(s)=0$$



$$[(7),(8)] \Rightarrow \boxed{T(t) = G(0)\,\varepsilon(t) + \int_0^{\infty} \dot{G}(s)\,\varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s}\,, \quad \text{δηλ. } k_\infty = 0$$

Για την ειδική φόρτιση: $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \varepsilon^*, & t \geq 0 \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ G(t)\varepsilon^* & t \geq 0 \end{cases}$

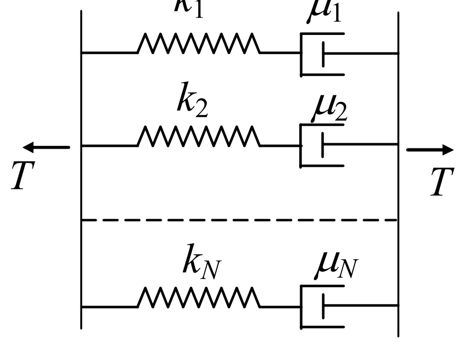
Ως ολοκληρωτικό μοντέλο συμπεριφοράς, το μοντέλο Maxwell μπορεί να περιγράψει **χαλάρωση τάσης**, δηλ. για ε = σταθ., το T μειώνεται με το χρόνο t. Ωστόσο, επειδή $k_\infty \varepsilon^* = 0$, δεν υπάρχει παραμένουσα ελαστικότητα [δηλ. δεν υπάρχει κατάσταση “μακροχρόνιας” ισορροπίας (long-range equilibrium) όπως στη γενική περίπτωση]

<u>Σημείωση</u>: Μοντέλο Maxwell $\Rightarrow$ $T(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{f}}\left[\varepsilon(t-s)\right]$

Ανάλογα, μοντέλο Kelvin-Voigt $\Rightarrow$ $\varepsilon(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{f}}\left[T(t-s)\right]$
που οδηγεί σε γραμμικοποιημένες μορφές όπως & η παραπάνω ανάλυση

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις δεν είναι πάντα ισοδύναμες. Δηλαδή, οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι εν γένει αντιστρεπτές

ΜΟΝΤΕΛΟ N-MAXWELL ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

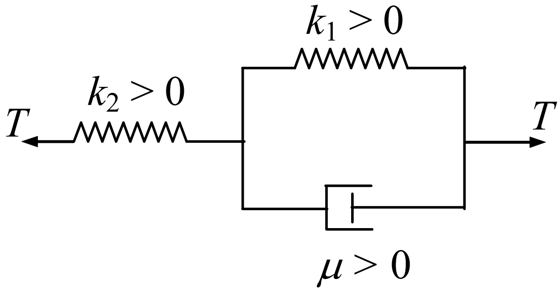


$$\left\{ \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{T}_i}{k_i} + \frac{T_i}{\mu_i}, \quad \sum_{i=1}^{N} T_i = T \right\} \quad \to \quad T = \sum_{i=1}^{N} k_i \varepsilon(t) + \int_0^\infty \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{k_i}{\tau_i} e^{-s/\tau_i} \right) \varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s$$

$k_\infty = 0; \quad G(s) = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{-s/\tau_i}, \quad \tau_i \equiv \dfrac{\mu_i}{k_i} \quad \ldots$ (φάσμα χαρακτηριστικών χρόνων απόσβεσης)

ΤΥΠΙΚΟ (STANDARD) ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

Εν σειρά σύνδεση του μοντέλου Kelvin-Voigt με ένα ελατήριο:



$$\left(\begin{array}{l} T_{k_2} = k\varepsilon_{k_2}, \quad T_{k_1} = k_1 \varepsilon_{k_1}, \quad T_\mu = \mu \dot{\varepsilon}_\mu \\ \varepsilon_\mu = \varepsilon_{k_1} = \varepsilon_{\mu k_1}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{k_2} + \varepsilon_{\mu k_1} \\ T = T_{k_2} = T_{k_1} + T_\mu \\ \left[T(-\infty), \ \varepsilon(-\infty) \right] \to \text{πεπερασμ.} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ T(t) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \varepsilon(t) + \frac{k_2^2}{k_1 + k_2} \varepsilon(t) + \int_0^\infty \left(-\frac{k_2^2}{\mu} \right) e^{-\frac{k_1 + k_2}{\mu} s} \varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s$$

δηλ. ολοκληρωτικό μοντέλο της μορφής:

$$T(t) = k_\infty \varepsilon(t) + G(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s) \varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s$$

με $\quad k_\infty = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad G(s) = \dfrac{k_2^2}{k_1 + k_2} e^{-\frac{k_1 + k_2}{\mu} s}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ ΣΤΗ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (1^{ος} ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ): [θερμότητα $Q(\mathbf{P_t})$ που δίδεται σε κάθε ποσότητα ύλης $\mathbf{P_t}$] + [Έργο $W(\mathbf{P_t})$ που παρέχεται σε αυτήν την ποσότητα ύλης] = [Μεταβολή της ολικής ενέργειας $\Delta E_{ολ}(\mathbf{P_t})$ αυτής της ποσότητας ύλης], δηλ.

$$\boxed{Q(\mathbf{P_t}) + W(\mathbf{P_t}) = \Delta E_{ολ}(\mathbf{P_t})}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}(\mathbf{P_t}) + \dot{W}(\mathbf{P_t}) = \dot{E}_{ολ}(\mathbf{P_t}) \tag{1}$$

$Q, W \rightarrow$ αναφέρονται στην αλληλεπίδραση κάθε τμήματος του Σ.Μ. με το περιβάλλον του

$E_{ολ} \rightarrow$ σχετίζεται με τη μάζα του $\mathbf{P_t}$ & συνήθως χωρίζεται σε 2 μέρη:

$$E_{ολ} = E + K \tag{2}$$

όπου:

ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ: $E(\mathbf{P_t}) \rightarrow$ πρότυπη εμπειρική έννοια (όπως η μάζα & η δύναμη) η οποία σχετίζεται με τη μοριακή συμπεριφορά του υλικού

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ: ένα μέγεθος e, που ορίζεται ως εσωτερική ενέργεια / μον. μάζας σε κάθε θέση του σώματος **B**, έτσι ώστε:

$$E(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho e \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

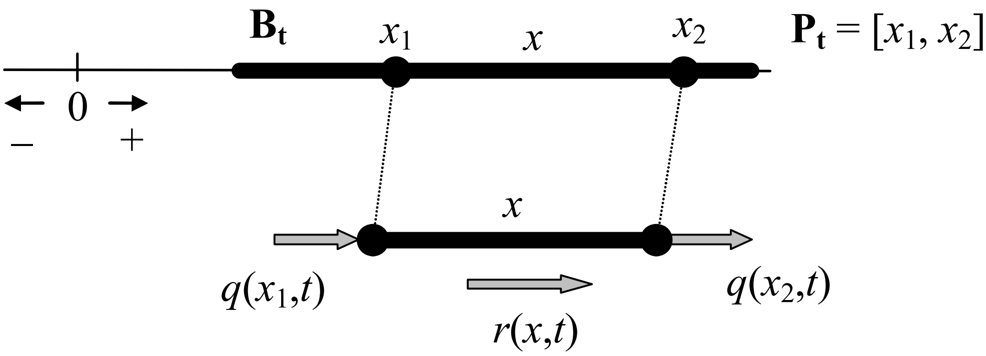
ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ: $K(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \frac{1}{2} \rho v^2 \, \mathrm{d}x$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΟΡΙΣΜΟΙ

ΘΕΡΜΑΝΣΗ $\dot{Q}(\mathbf{P_t})$: συνολικός ρυθμός ροής θερμότητας (θερμική ενέργεια / χρόνο) που παρέχεται στο $\mathbf{P_t}$

- **Ροή θερμότητας λόγω συναγωγής, $q = q(x,t)$:** ρυθμός ροής θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας (σε 3D)* μεταξύ γειτονικών σωματιδίων ύλης λόγω της επαφής τους (θερμότητα επαφής)

- **Ροή θερμότητας λόγω ακτινοβολίας, $r = r(x,t)$:** ρυθμός παραγωγής θερμότητας ανά μονάδα μάζας που οφείλεται στον εξωτερικό κόσμο (περιβάλλον). Π.χ. θερμότητα από μια ραδιενεργή πηγή, ηλιακή ακτινοβολία, κλπ.



(i) Συνολ. ροή θερμότητας συναγωγής στο $\mathbf{P_t}$:

$$\dot{Q}_c(\mathbf{P_t}) = q(x_1,t) - q(x_2,t) = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{P_t}} -\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

(ii) Συνολ. ροή θερμότητας ακτινοβολίας στο $\mathbf{P_t}$:

$$\dot{Q}_r(\mathbf{P_t}) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t) r(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{P_t}} \rho r\,\mathrm{d}x$$

Συνολική ροή θερμότητας στο $\mathbf{P_t}$:

$$\dot{Q}(\mathbf{P_t}) = \dot{Q}_c(\mathbf{P_t}) + \dot{Q}_r(\mathbf{P_t}) \Rightarrow \dot{Q}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} (-\partial q/\partial x + \rho r)\,\mathrm{d}x \qquad (4)$$

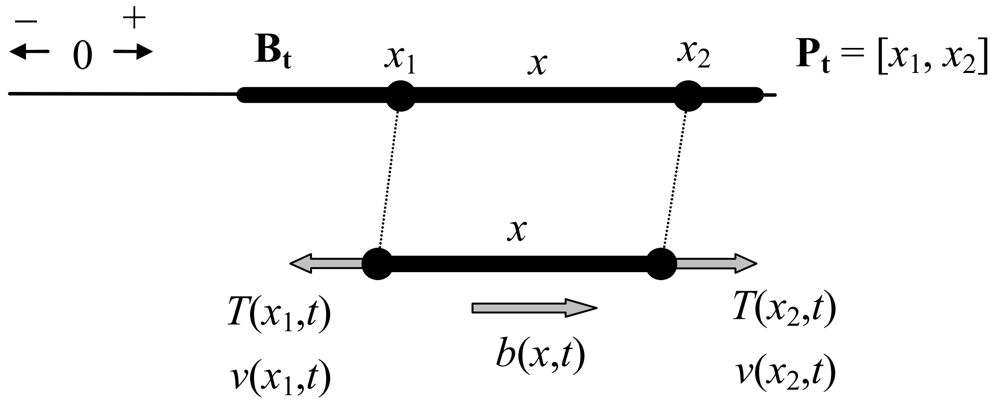
---

* Σε 1D η επιφάνεια επαφής εκφυλίζεται σε σημείο και το q είναι απλά ρυθμός ροής θερμότητας.

Συγκρίνετε την τελευταία εξίσωση με την έκφραση της συνολικής δύναμης $f(\mathbf{P_t})$ & παρατηρήστε τις αντιστοιχίες: $\dot{Q}_c(\mathbf{P_t}) \rightarrow f_c(\mathbf{P_t})$ & $\dot{Q}_r(\mathbf{P_t}) \rightarrow f_b(\mathbf{P_t})$

ΙΣΧΥΣ (ή ΡΥΘΜΟΣ ΠΑΡΕΧΟΜΕΝΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΕΡΓΟΥ):

$$\dot{W}(\mathbf{P_t}) = \underbrace{Tv\Big|_{(x_2,t)} - Tv\Big|_{(x_1,t)}}_{\text{επιφανειακών δυνάμεων}} + \underbrace{\int_{\mathbf{P_t}} (\rho b v)\,\mathrm{d}\upsilon}_{\text{μαζικών δυνάμεων}} = \int_{\mathbf{P_t}} \left[\frac{\partial (Tv)}{\partial x} + \rho b v \right] \mathrm{d}\,x$$



Θεώρημα Ισχύος:

$$\boxed{\dot{W}(\mathbf{P_t}) = \dot{K}(\mathbf{P_t}) + \int_{\mathbf{P_t}} T \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathrm{d}\,x} \qquad (5)$$

<u>Απόδειξη</u>:

$$\dot{W}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \left[\frac{\partial (Tv)}{\partial x} + \rho b v \right] \mathrm{d}\,x = \int_{\mathbf{P_t}} \left[T \frac{\partial v}{\partial x} + \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b \right)}_{\rho \dot{v}} v \right] \mathrm{d}\,x$$

$$= \int_{\mathbf{P_t}} \left(T \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \dot{v} v \right) \mathrm{d}\,x = \int_{\mathbf{P_t}} (\rho \dot{v} v)\,\mathrm{d}\,x + \int_{\mathbf{P_t}} \left(T \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathrm{d}\,x$$

Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι: $\dot{K}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho \dot{v} v \,\mathrm{d}\,x$

$$\dot{K}(\mathbf{P_t}) = \overline{\int_{\mathbf{P_t}} \tfrac{1}{2}\rho v^2 \,\mathrm{d}x}^{\,\bullet} = \overline{\int_{\mathbf{P_o}} \tfrac{1}{2}\rho v^2 F \,\mathrm{d}X}^{\,\bullet} = \overline{\int_{\mathbf{P_o}} \tfrac{1}{2}\rho_o v^2 \,\mathrm{d}X}^{\,\bullet} = \int_{\mathbf{P_o}} \tfrac{1}{2}\rho_o \overline{v^2}^{\,\bullet} \,\mathrm{d}X =$$

$$= \int_{\mathbf{P_o}} \tfrac{1}{2}\rho_o (2v\dot{v}) \,\mathrm{d}X = \int_{\mathbf{P_o}} v\dot{v}\rho_o \,\mathrm{d}X = \int_{\mathbf{P_t}} \rho\dot{v}v \,\mathrm{d}x$$

- **Εξαγωγή της εξίσωσης πεδίου του 1ου Νόμου της Θερμοδυναμικής**

Αντικαθιστώντας την (5) στην (1) και λαμβάνοντας υπόψη την (2) προκύπτει:

$$\dot{E}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} T(\partial v/\partial x)\,\mathrm{d}x + \dot{Q}(\mathbf{P_t}) \tag{6}$$

$$\dot{E}(\mathbf{P_t}) = \overline{\int_{\mathbf{P_t}} \rho e \,\mathrm{d}x}^{\,\bullet} = \overline{\int_{\mathbf{P_o}} \rho F e \,\mathrm{d}X}^{\,\bullet} = \overline{\int_{\mathbf{P_o}} \rho_o e \,\mathrm{d}X}^{\,\bullet} = \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \dot{e} \,\mathrm{d}X =$$

$$= \int_{\mathbf{P_t}} (\rho_o/F)\dot{e}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{P_t}} \rho\dot{e}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dot{E}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho\dot{e}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$[(4),(7) \to (6)] \Rightarrow \int_{\mathbf{P_t}} \left(\rho\dot{e} - T\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} - \rho r \right) \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow$$

$$\therefore \quad \boxed{\rho\dot{e} = T\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} + \rho r \qquad \forall\, x \in \mathbf{B_t}}$$ **… 1ος Νόμος θερμοδυναμικής (Π.Ε.)**

$$\Rightarrow \dot{e} = \frac{1}{\rho}T\frac{\partial v}{\partial x} + h, \quad \text{όπου } h \equiv \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial q}{\partial x} + \rho r \right) = \text{τοπική θέρμανση}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho\dot{e} = T\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial x} + \rho r \\ \rho = \rho_o/F \\ \dot{F} = (\partial v/\partial x)F \Rightarrow \partial v/\partial x = \dot{F}/F \\ \partial q/\partial X = (\partial q/\partial x)(\partial x/\partial X) = (\partial q/\partial x)F \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\rho_o}{F}\dot{e} = T\frac{\dot{F}}{F} - \frac{1}{F}\frac{\partial q}{\partial X} + \frac{\rho_o}{F}r \Rightarrow$$

$$\therefore \quad \boxed{\rho_o \dot{e} = T\dot{F} - \frac{\partial q}{\partial X} + \rho_o r \qquad \forall\ X \in \mathbf{B_o}}$$ **… 1^{ος} Νόμος θερμοδυναμικής (Π.L.)**

$$\Rightarrow\ \dot{e} = \frac{1}{\rho_o} T\dot{F} + h, \quad \text{όπου} \quad h \equiv \frac{1}{\rho_o}\left(-\frac{\partial q}{\partial X} + \rho_o r \right) = \text{τοπική θέρμανση}$$

2^{ΟΣ} ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Είναι μια βασική αρχή της φύσης, η οποία «θίγει» τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ενέργεια, ή αλλιώς την «ποιότητα» της ενέργειας. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να διατυπωθεί ποιοτικά. Π.χ.

- Δεν μπορεί να υπάρξει αυθόρμητη ροή θερμότητας από ένα ψυχρότερο σε ένα θερμότερο αντικείμενο
- Είναι αδύνατο να κατασκευαστεί θερμική μηχανή που να λαμβάνει θερμότητα και να την μετατρέπει εξ ολοκλήρου σε έργο
- Η αταξία ενός «κλειστού» σύστηματος (δηλ. χωρίς εξωτερικές επιδράσεις) δεν ελαττώνεται ποτέ. Ένα μέτρο αυτής της αταξίας αποτελεί η ποσότητα που ονομάζεται **εντροπία**. Επιπλέον, η εντροπία είναι ένα μέτρο του ποσού ενέργειας που δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παραγωγή έργου.

Συνοπτικά, μπορεί να διατυπωθεί ότι ο 2^{ος} νόμος της θερμοδυναμικής εκφράζει την **αύξηση της εντροπίας** και διατυπώνεται μαθηματικά ως:

$$\boxed{\mathrm{d}S \geq \frac{\mathrm{d}Q}{\theta}}$$

δηλ. [Μεταβολή της εντροπίας dS μιας ποσότητας ύλης] ≥ [θερμότητα dQ που δίδεται σε αυτήν την ποσότητα ύλης] / [απόλυτη θερμοκρασία θ]

όπου:

$$[\text{Εντροπία του } \mathbf{P_t}] \equiv S(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho s \,\mathrm{d}x, \qquad s = \text{εντροπία / μον. μάζας}$$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ: $\theta = \theta(x,t) > 0 \ \rightarrow$ πρότυπη εμπειρική ποσότητα της κλασσικής θερμοδυναμικής

- **Ανισότητα Planck:** $\rho\dot{s} \geq \left(-\frac{\partial q}{\partial x} + \rho r\right)/\theta \;\Leftrightarrow\; \dot{s} \geq \frac{h}{\theta}, \qquad \forall\, x \in \mathbf{B_t}$

Σημείωση: αντιστοιχία με τη σχέση $\mathrm{d}S \geq \frac{\mathrm{d}Q}{\theta}$ σε τοπικό επίπεδο (δηλ. για κάθε $x \in \mathbf{B_t}$.

<u>*Εσωτερική απώλεια (internal dissipation)*</u>: $\delta \equiv \theta\dot{s} - h = \theta\dot{s} - \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial q}{\partial x} + \rho r\right)$

Άρα, ανισότητα Planck $\Leftrightarrow \quad \delta \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbf{B_t}$

- **Ανισότητα Fourier:** $q\frac{\partial \theta}{\partial x} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; -q\frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbf{B_t}$

$\Leftrightarrow$ η θερμότητα μεταφέρεται με συναγωγή από τα θερμότερα σημεία στα ψυχρότερα

- **Ανισότητα Clausius-Duhem:** $\rho\delta - \left(\frac{q}{\theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbf{B_t} \; (\theta > 0,\; \rho > 0)$

δηλ. συνδυασμός της ανισότητας Planck & της ανισότητας Fourier $\Rightarrow$ την (ασθενέστερη) ανισότητα Clausius-Duhem

$$\Rightarrow \; \rho\dot{s} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{\theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\rho r}{\theta} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho\dot{s} - \left(-\frac{\partial (q/\theta)}{\partial x} + \frac{\rho r}{\theta}\right) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbf{B_t}}$$

... τοπική μορφή (Π.Ε.)

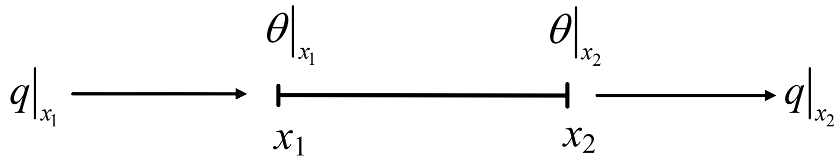
Έστω: $\rho\gamma \equiv \rho\dot{s} - \left(-\frac{\partial (q/\theta)}{\partial x} + \frac{\rho r}{\theta}\right)$

Τότε η ανισότητα Clausius-Duhem γράφεται ως:

$$\rho\gamma \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbf{B_t}$$

Ρυθμός παραγωγής εντροπίας στο $\mathbf{P_t}$:

$$\Gamma(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho\gamma \,\mathrm{d}\,x = \dot{S} - \underbrace{\left\{ \frac{q}{\theta}\bigg|_{x_1} - \frac{q}{\theta}\bigg|_{x_2} \right\}}_{\substack{\text{ροή εντροπίας} \\ \text{λόγω συναγωγής}}} - \underbrace{\int_{\mathbf{P_t}} \frac{\rho r}{\theta} \mathrm{d}\,x}_{\substack{\text{ροή εντροπίας} \\ \text{λόγω ακτινοβολίας}}}$$



$\Rightarrow$ ολική (global) μορφή της ανισότητας Clausius-Duhem:

$$\Gamma(\mathbf{P_t}) \geq 0, \quad \forall\, \mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$$

Ελεύθερη ενεργειακή πυκνότητα του Helmoltz: $\psi \equiv e - \theta s$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \dot{e} - \dot{\theta} s - \theta \dot{s} \Leftrightarrow \dot{\psi} = \frac{1}{\rho} T \frac{\partial v}{\partial x} + h - \dot{\theta} s - \theta \dot{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta \dot{s} = \frac{1}{\rho} T \frac{\partial v}{\partial x} + h - \dot{\theta} s - \dot{\psi} \tag{8}$$

Όμως, η ανισότητα Clausius-Duhem δίνει:

$$\rho\delta - \left(\frac{q}{\theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0 \Leftrightarrow \rho(\theta\dot{s} - h) - \left(\frac{q}{\theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0 \overset{(8)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(8)}{\Leftrightarrow} \rho\left(\frac{1}{\rho} T \frac{\partial v}{\partial x} + \cancel{h} - \dot{\theta} s - \dot{\psi} - \cancel{h}\right) - \left(\frac{q}{\theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T \frac{\partial v}{\partial x} - \rho\dot{\theta} s - \rho\dot{\psi} - \left(\frac{q}{\theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{\psi} + s\dot{\theta} - \frac{1}{\rho} T \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{q}{\rho\theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \le 0 , \quad \forall\ x \in \mathbf{B_t}}$$

… ανισότητα Clausius-Duhem (Π.Ε.)

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{\psi} + s\dot{\theta} - \frac{1}{\rho_o} T \frac{\partial v}{\partial X} + \left(\frac{q}{\rho_o\theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} \le 0 , \quad \forall\ X \in \mathbf{B_o}}$$

… ανισότητα Clausius-Duhem (Π.L.)

3^{ΟΣ} ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Όλες οι διεργασίες σταματούν καθώς η θερμοκρασία τείνει στο απόλυτο μηδέν. Καθώς $\theta \to 0$, η εντροπία ενός συστήματος τείνει σε μια σταθερά

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ως θερμοδυναμική διεργασία ορίζεται ένα σύνολο από 9 (ικανοποιητικά ομαλές) συναρτήσεις

$$\mathcal{P} = [\chi,\ \theta > 0,\ e,\ s,\ T,\ q,\ b,\ r,\ \rho > 0]$$

στο $\mathbf{B_t}$, $\forall\ t$, το οποίο, $\forall\ x \in \mathbf{B_t}$, ικανοποιεί τις διαφορικές σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 & \text{... ισοζύγιο μάζας} \\
\dfrac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \ddot{x} & \text{... ισοζύγιο ορμής} \\
\rho \dot{e} = T \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial x} + \rho r & \text{... ισοζύγιο ενέργειας} \\
\rho \dot{s} - \left(-\dfrac{\partial (q/\theta)}{\partial x} + \dfrac{\rho r}{\theta} \right) \ge 0 & \text{... ανισότητα Clausius - Duhem}
\end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

<u>Ορισμός Επιτρεπτών Θερμοδυναμικών Διεργασιών</u>

7 Αγνώστους (b & r συνήθως δίνονται) $\leftrightarrow$ 3 Εξισώσεις

$\Rightarrow \exists$ απαίτηση για 4 *καταστατικές εξισώσεις*:

$$\left.\begin{aligned} e &= \hat{e} \text{ (ιστορία των πεδίων κίνησης \& θερμοκρασίας, } X\text{)} \\ s &= \hat{s} \text{ (ιστορία των πεδίων κίνησης και θερμοκρασίας, } X\text{)} \\ T &= \hat{T} \text{ (ιστορία των πεδίων κίνησης και θερμοκρασίας, } X\text{)} \\ q &= \hat{q} \text{ (ιστορία των πεδίων κίνησης και θερμοκρασίας, } X\text{)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Μία ειδική καταστατική υπόθεση (II) είναι **<u>συμβατή</u>** με τη θερμοδυναμική αν $\forall\ x = \chi(X,t)$ & $\theta = \theta(X,t) > 0$, προκαλείται μια θερμοδυναμική διεργασία $\mathcal{P}$ από τις (I) και (II) για κάποιες αντίστοιχες τιμές b και r. Τότε η διεργασία ονομάζεται **<u>επιτρεπτή.</u>**

$\Rightarrow$ αυστηρούς ***περιορισμούς στη δομή*** μιας επιτρεπτής διεργασίας. Με άλλα λόγια, $\forall$ εκλογή των χ & θ ορίζονται οι [e, s, T, q] από τις (II) & η ρ από το ισοζύγιο μάζας, ενώ οι b & r από τα ισοζύγια ορμής & ενέργειας αντίστοιχα, & ότι απομένει είναι η ανισότητα Clausius-Duhem η οποία ***δεν ικανοποιείται a priori*** για κάθε εκλογή των $\hat{e}$, $\hat{s}$, $\hat{T}$ & $\hat{q}$

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ & ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

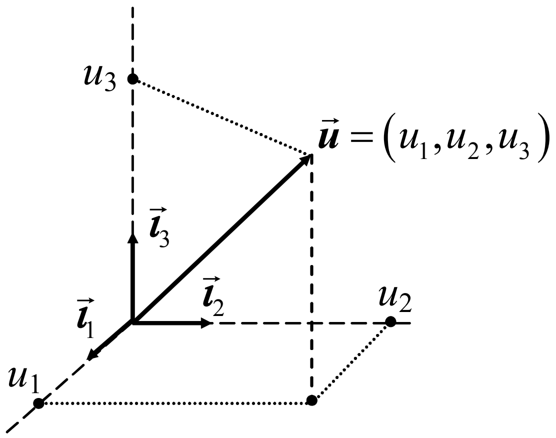
(ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟ ΜΕ ΔΕΙΚΤΕΣ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

❖ Συνιστώσες - Συμβολισμός

$\vec{u} \in \mathbf{V}$ … (**V** σύνολο διανυσμάτων του Ευκλείδιου χώρου **E**)

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων: $\mathbb{B} = \left[\vec{\imath}_1, \vec{\imath}_2, \vec{\imath}_3\right]$



$\vec{\imath}_1 = (1,0,0), \quad \vec{\imath}_2 = (0,1,0), \quad \vec{\imath}_3 = (0,0,1)$

Διάνυσμα: $\vec{u} = u_1\,\vec{\imath}_1 + u_2\,\vec{\imath}_2 + u_3\,\vec{\imath}_3$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_i\,\vec{\imath}_i = u_i\,\vec{\imath}_i$$

συμβολισμός δεικτών (Einstein)*

Άλλοι συμβολισμοί: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$

<u>Παραδείγματα διανυσμάτων</u>: κίνηση $\vec{\chi}$, ταχύτητα $\vec{v}$, επιτάχυνση $\vec{\alpha}$

❖ Κανόνες Δεικτών - Σύμβολα δ_{ij} και ε_{ijk}

- ❑ Εμφάνιση δείκτη (π.χ. i) 2 φορές σ' έναν όρο γινομένου, υπονοεί άθροιση από i=1 μέχρι i=3

- ❑ Εμφάνιση δείκτη (π.χ. i) περισσότερες από 2 φορές σ' έναν όρο γινομένου δεν έχει έννοια

---

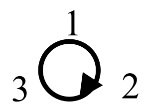
* Ο συμβολισμός Einstein είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στις διατυπώσεις και αποδείξεις θεωρημάτων, προτάσεων, κλπ εξαιτίας της εξοικονόμησης χώρου από την αποφυγή γραφής πολλών και ογκωδών εξισώσεων.

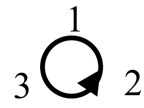
- Όταν το σύμβολο $\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ εμφανίζεται σ' έναν όρο γινομένου που έχει ένα κοινό δείκτη με το δ_{ij}, τότε το δ_{ij} μπορεί ν' απαλειφθεί αλλάζοντας το κοινό δείκτη με τον άλλο. Το σύμβολο δ_{ij} είναι επίσης γνωστό ως δέλτα του Kronecker

- Εμφάνιση ενός δείκτη (i) σ' έναν όρο γινομένου 1 φορά υπονοεί διαφορετικές εξισώσεις για καθεμιά από τις τιμές: $i=1$, $i=2$ & $i=3$. Εμφάνιση 1 φορά και δεύτερου δείκτη (j) στον ίδιο όρο υπονοεί διαφορετική εξίσωση για καθεμιά από τις δυάδες: $(i,j)=(1,1)$, $(i,j)=(1,2)$, $(i,j)=(1,3)$, $(i,j)=(2,1)$, …. $(i,j)=(3,3)$. Αντίστοιχα για n δείκτες που εμφανίζονται 1 φορά ο καθένας στον ίδιο όρο, υπονοεί διαφορετική εξίσωση για καθεμιά από τις n-άδες τιμών ($i,j,\ldots,n$) που λαμβάνονται καθώς οι δείκτες $i,j,\ldots,n$ παίρνουν τις τιμές 1, 2 & 3.

- Τανυστής μετάθεσης ε_{ijk} (σύμβολο εναλλαγής, Eddington)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1; & i,j,k \text{ άρτια ή δεξιόστροφη διάταξη των } 1,2,3 \\ 0; & \text{τουλάχιστον δύο από τα } i,j,k \text{ είναι ίσα} \\ -1; & i,j,k \text{ περριτή ή αριστερόστροφη διάταξη των } 1,2,3 \end{cases}$$





Π.χ. $\varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{112} = 0, \quad \varepsilon_{132} = -1$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$$

… εναλλακτικός συμβολισμός (ορισμός) των $\varepsilon_{ij\kappa}$

Παραδείγματα

- $v_i = A_{ij}u_j = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}u_j = A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + A_{i3}u_3$

  $\rightarrow$ 3 εξισώσεις που προκύπτουν από τη λήψη των τιμών $i=1$, $i=2$ & $i=3$, για το δείκτη i που εμφανίζεται στον αρχικό όρο 1 φορά

  Άρα, η εξίσωση $v_i = A_{ij}u_j$ αντιπροσωπεύει το σύστημα:

  $$\left.\begin{aligned} v_1 &= A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 \\ v_2 &= A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 \\ v_3 &= A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 \end{aligned}\right\}, \text{ δηλ.: } \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

  ή σε διανυσματική μορφή: $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{u}}$

- $$v_i = A_{ijk}B_{jk} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{ijk}B_{jk} = \left(\sum_{j=1}^{3} A_{ij1}B_{j1} + A_{ij2}B_{j2} + A_{ij3}B_{j3}\right) = A_{i11}B_{11} + \\ + A_{i12}B_{12} + A_{i13}B_{13} + A_{i21}B_{21} + A_{i22}B_{22} + A_{i23}B_{23} + \\ + A_{i31}B_{31} + A_{i32}B_{32} + A_{i33}B_{33}$$

  $\rightarrow$ 3 εξισώσεις που προκύπτουν από τη λήψη των τιμών $i=1$, $i=2$ & $i=3$, για το δείκτη i που εμφανίζεται στον αρχικό όρο 1 φορά

  $\rightarrow$ 9 όροι συνολικά σε κάθε εξίσωση με ανάπτυξη των (j,k)

- $A_{ijk}B_{jmj}$ … δεν έχει νόημα (εμφανίζεται 3 φορές ο δείκτης j)

- $A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = A_{jj} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$

- $A_{ijk}\delta_{im} = A_{mjk}$

- $u_i\delta_{ij} = u_j$

❖ **Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων**

- $\vec{u}\cdot\vec{v} \equiv u_i v_i \quad \ldots \left(u_i v_i = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \right)$

❖ **Ιδιότητες / Επιπλέον ορισμοί:**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}; \qquad \vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}\,; \qquad a\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \left(a\,\vec{u}\right)\cdot\vec{v}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} > 0, \quad \vec{u} \neq \vec{o}$$

- $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ ... μέτρο του $\vec{u}$ $\left(\left|\vec{u}\right| = \sqrt{u_i u_i} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \right)$

- Θεώρημα (Ανισότητα Cauchy-Schwarz): $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$

- Θεώρημα (Τριγωνική ανισότητα) : $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \leq \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\varphi$ ... ορισμός γωνίας $\varphi = \angle\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

- $\vec{i}_i \cdot \vec{i}_j = \delta_{ij}$

- $u_i = \vec{u}\cdot\vec{i}_i$ ... τύπος για τις συνιστώσες u_i

  Απόδειξη: $\left(\vec{u} = u_m \vec{i}_m \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{i}_i = u_m \vec{i}_m \cdot \vec{i}_i = u_m \delta_{mi} = u_i \right)$

❖ **Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων**

- $\vec{u}\times\vec{v} = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \vec{i}_i \quad \ldots$ (άθροισμα 27 όρων)

- $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{w} = w_i \vec{i}_i$

- $$\begin{aligned} w_i &= \varepsilon_{ijk} u_j v_k = \varepsilon_{ij1} u_j v_1 + \varepsilon_{ij2} u_j v_2 + \varepsilon_{ij3} u_j v_3 = \\ &= \left(\varepsilon_{i11} u_1 v_1 + \varepsilon_{i21} u_2 v_1 + \varepsilon_{i31} u_3 v_1 \right) + \left(\varepsilon_{i12} u_1 v_2 + \varepsilon_{i22} u_2 v_2 + \varepsilon_{i32} u_3 v_2 \right) + \\ &\quad + \left(\varepsilon_{i12} u_1 v_3 + \varepsilon_{i23} u_2 v_3 + \varepsilon_{i33} u_3 v_3 \right) \end{aligned}$$

  π.χ. $w_1 = \varepsilon_{132} u_3 v_2 + \varepsilon_{123} u_2 v_3 = u_2 v_3 - u_3 v_2$

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad \rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{u} = \vec{o}$

- $\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$

- $\vec{\imath}_i \times \vec{\imath}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{\imath}_k \quad \rightarrow \quad \left(\vec{\imath}_i \times \vec{\imath}_j\right) \cdot \vec{\imath}_k = \varepsilon_{ijk}$

❖ Δυαδικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Το ***δυαδικό γινόμενο*** ανάμεσα σε δύο διανύσματα $\vec{a}$ & $\vec{b}$ ορίζεται από τη σχέση:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{u} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{u}), \qquad \forall\, \vec{u} \in \mathbf{V}$$

<u>Σημείωση:</u> γενικά, $\vec{a} \otimes \vec{b} \neq \vec{b} \otimes \vec{a}$

❖ Γραμμικές Βαθμωτές Συναρτήσεις

Μια γραμμική βαθμωτή συνάρτηση είναι μια απεικόνιση $\mathrm{f}(\cdot)$ του χώρου **V** στο $\mathbb{R}$ (δηλ. απεικόνιση διανύσματος σε πραγματικό αριθμό), τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{f}(\vec{u} + \vec{v}) &= \mathrm{f}(\vec{u}) + \mathrm{f}(\vec{v}) \\ \mathrm{f}(a\,\vec{u}) &= a\,\mathrm{f}(\vec{u}) \end{aligned}\right\} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V} \quad \& \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

- **Θεώρημα αναπαράστασης:** κάθε γραμμική βαθμωτή συνάρτηση $\mathrm{f}(\cdot)$ έχει την αναπαράσταση: $\mathrm{f}(\vec{u}) = \vec{f} \cdot \vec{u}$, όπου το διάνυσμα $\vec{f}$ είναι μοναδικό & ανεξάρτητο από το $\vec{u}$

❖ Γραμμικές Διανυσματικές Συναρτήσεις

Μια γραμμική διανυσματική συνάρτηση είναι μια απεικόνιση $\vec{t}(\cdot)$ του χώρου **V** στο **V** (δηλ. απεικόνιση διανύσματος σε διάνυσμα), τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{t}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{t}(\vec{u}) + \vec{t}(\vec{v}) \\ \vec{t}(a\vec{u}) = a\,\vec{t}(\vec{u}) \end{array}\right\} \quad \forall\, \vec{u},\vec{v} \in \mathbf{V} \quad \& \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

<u>Παράδειγμα</u>: $\vec{t}(\vec{u}) = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{u})$, … $\vec{a}$ & $\vec{b}$ καθορισμένα διανύσματα του $\mathbf{V}$

- **Θεώρημα αναπαράστασης:** κάθε γραμμική διανυσματική συνάρτηση $\vec{t}(\cdot)$ έχει την αναπαράσταση:

$$\vec{t}(\vec{u}) = (\vec{\imath}_1 \otimes \vec{t}_1)\vec{u} + (\vec{\imath}_2 \otimes \vec{t}_2)\vec{u} + (\vec{\imath}_3 \otimes \vec{t}_3)\vec{u}$$

$$\vec{t}(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{3} (\vec{\imath}_i \otimes \vec{t}_i)\vec{u} = (\vec{\imath}_i \otimes \vec{t}_i)\vec{u} = \vec{\imath}_i(\vec{t}_i \cdot \vec{u})$$

όπου το διάνυσμα $\vec{t}_i$ είναι μοναδικό & ανεξάρτητο από το $\vec{u}$

- **Επιπλέον Ιδιότητες**

$$(\vec{t}+\vec{s})(\vec{u}) \equiv \vec{t}(\vec{u}) + \vec{s}(\vec{u}), \quad \forall\, \vec{u} \in \mathbf{V}$$

$$(a\vec{t})(\vec{u}) = a\,\vec{t}(\vec{u}), \quad \forall\, \vec{u} \in \mathbf{V}$$

<u>Θεώρημα:</u> Αν $\vec{t}(\cdot)$ & $\vec{s}(\cdot)$ είναι γραμμικές διανυσματικές συναρτήσεις, τότε οι $(\vec{t}+\vec{s})(\cdot)$ & $(a\vec{t})(\cdot)$ είναι επίσης γραμμικές διανυσματικές συναρτήσεις

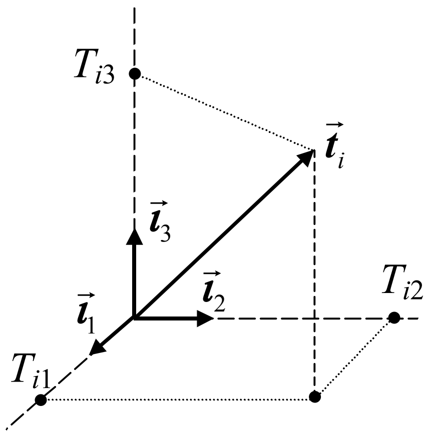
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΤΑΝΥΣΤΕΣ 2^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ

Ο τανυστής δεύτερης τάξης ***T*** είναι μια γραμμική διανυσματική μορφή:

$$\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{u}}) = (\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{t}}_i)\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{u}}$$

δηλ. είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός ενός διανύσματος σε ένα άλλο

❖ Συνιστώσες - Συμβολισμός



Για i=1,2,3
$\{\vec{\boldsymbol{t}}_i\}$ ... 3 διανύσματα χαρακτηριστικά του τανυστή ***T***

$\{\vec{\boldsymbol{t}}_i\}$ ... "διανυσματικές συνιστώσες" ή προβολές του ***T*** στο σύστημα συντεταγμένων $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}_i\}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{t}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{t}}_2 \\ \vec{\boldsymbol{t}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

<u>Παραδείγματα τανυστών 2^{ης} τάξης</u>: κλίση παραμόρφωσης $\boldsymbol{F}$, μηχανική τάση ***T***, ανηγμένη παραμόρφωση $\boldsymbol{\varepsilon}$

❖ Μηδενικός Τανυστής 2^{ης} Τάξης, *O*

= γραμμική διανυσματική συνάρτηση $\vec{\boldsymbol{o}}(\cdot)$ που αν εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε διάνυσμα του **V** το μετατρέπει στο μηδενικό διάνυσμα, δηλ:

$$\vec{\boldsymbol{o}}(\vec{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{O}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{o}}\ , \quad \forall\ \vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{V}$$

❖ Γραφή με δείκτες – Τύποι για τις Συνιστώσες

$$\boldsymbol{T} = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{t}}_i , \qquad \vec{\boldsymbol{t}}_i \equiv T_{ij}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_j$$

T_{ij} ορίζεται ως η j συνιστώσα του διανύσματος $\vec{\boldsymbol{t}}_i$ ως προς $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}_j\}$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{T} \equiv T_{ij}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j ,$$

T_{ij} ... συνιστώσες του τανυστή $\boldsymbol{T}$ (9 αριθμοί: $\boldsymbol{T} \equiv \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j$)

$T_{mn} \equiv \vec{\boldsymbol{\imath}}_m \cdot \boldsymbol{T}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_n$ ... τύπος για τον υπολογισμό των συνιστωσών T_{mn} του $\boldsymbol{T}$

<u>Παραδείγματα:</u>

$$O_{ij} = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \boldsymbol{O}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_j = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{o}} = 0 , \qquad \text{όπου } \{\boldsymbol{O}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{o}} , \quad \forall\, \vec{\boldsymbol{u}}\}$$

$$1_{ij} = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \boldsymbol{1}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_j = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}_j = \delta_{ij} , \qquad \text{όπου } \{\boldsymbol{1}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}} , \quad \forall\, \vec{\boldsymbol{u}}\}$$

$$\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{u}} = T_{ij}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j\, u_m\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_m = T_{ij} u_m\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \left(\vec{\boldsymbol{\imath}}_j \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}_m \right) = T_{ij} u_m\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_i\, \delta_{jm} = T_{ij} u_j\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_i$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{a}} \otimes \vec{\boldsymbol{b}}\right)_{ij} = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \left(\vec{\boldsymbol{a}} \otimes \vec{\boldsymbol{b}}\right) \vec{\boldsymbol{\imath}}_j = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \left(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}_j\right) = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot (\vec{\boldsymbol{a}} b_j) = (\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{a}}) b_j = a_i b_j$$

❖ Άθροισμα / Γινόμενο

$$\left(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}\right)\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{S}\vec{\boldsymbol{u}} , \qquad \left(a\boldsymbol{T}\right)\vec{\boldsymbol{u}} = a\left(\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{u}}\right) , \qquad \left(\boldsymbol{TS}\right)\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{S}\vec{\boldsymbol{u}}\right)$$

Μπορούν να αποδειχθούν χωρίς δυσκολία οι παρακάτω σχέσεις για τις συνιστώσες:

$$\left(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}\right)_{ij} = T_{ij} + S_{ij} , \qquad \left(a\boldsymbol{T}\right)_{ij} = a\, T_{ij} , \qquad \left(\boldsymbol{TS}\right)_{ij} = T_{im} S_{mj}$$

Π.χ. $\left(\boldsymbol{TS}\right)_{ij} = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \left(\boldsymbol{TS}\right) \vec{\boldsymbol{\imath}}_j = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{S}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_j\right) = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \boldsymbol{T}\left[S_{mn} \left(\vec{\boldsymbol{\imath}}_m \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_n\right) \vec{\boldsymbol{\imath}}_j \right] =$

$$= \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \boldsymbol{T}\left(S_{mn} \vec{\boldsymbol{\imath}}_m \left(\vec{\boldsymbol{\imath}}_n \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}_j\right)\right) = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \boldsymbol{T}\left(S_{mn} \vec{\boldsymbol{\imath}}_m \delta_{nj} \right) = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \boldsymbol{T}\left(S_{mj} \vec{\boldsymbol{\imath}}_m \right) =$$

$$= \left(\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \boldsymbol{T}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_m\right) S_{mj} = T_{im} S_{mj}$$

- Ιδιότητες:

$$(\boldsymbol{TS})\boldsymbol{R}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{SR}); \qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R})=\boldsymbol{TS}+\boldsymbol{TR}; \qquad (\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{T}=\boldsymbol{ST}+\boldsymbol{RT};$$

$$a(\boldsymbol{TS})=(a\boldsymbol{T})\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}(a\boldsymbol{S}); \qquad \boldsymbol{1T}=\boldsymbol{T1}=\boldsymbol{T}$$

Όλες οι παραπάνω αποδεικνύονται εύκολα με τη χρήση δεικτών. Σημειώνεται επίσης ότι γενικά $\boldsymbol{ST}\neq\boldsymbol{TS}$. Αν $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{TS}\rightarrow$ $\boldsymbol{S}$ & $\boldsymbol{T}$ αντιμετατίθενται (commute)

❖ Ανάστροφος / Συμμετρικός / Ίχνος

- <u>Ανάστροφος $\boldsymbol{T}^T$ του τανυστή $\boldsymbol{T}$</u>: $\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{T}^T\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$, $\quad\forall\ \vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}$

Συνιστώσες : $T_{ij}^T=T_{ji}$ ... $\left(T_{ij}^T=\vec{\boldsymbol{i}}_i\cdot\boldsymbol{T}^T\,\vec{\boldsymbol{i}}_j=\vec{\boldsymbol{i}}_j\cdot\boldsymbol{T}\,\vec{\boldsymbol{i}}_i=T_{ji}\right)$

- <u>Συμμετρικός τανυστής $\boldsymbol{T}$</u>: εάν $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^T$ δηλ. $T_{ij}=T_{ji}$

- <u>Αντισυμμετρικός τανυστής $\boldsymbol{T}$</u>: εάν $\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{T}^T$ δηλ. $T_{ij}=-T_{ji}$

Θεώρημα: κάθε τανυστής $\boldsymbol{T}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού τανυστή $\boldsymbol{S}$ & ενός αντισυμμετρικού τανυστή $\boldsymbol{W}$:

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{W}, \quad \text{όπου:} \quad \boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^T\right)=\boldsymbol{S}^T, \quad \boldsymbol{W}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^T\right)=-\boldsymbol{W}^T$$

- Ίχνος tr($\boldsymbol{T}$) του τανυστή $\boldsymbol{T}$:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{T})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}) \quad \& \quad \operatorname{tr}(\alpha\boldsymbol{T})=\alpha\operatorname{tr}(\boldsymbol{T})\\ \operatorname{tr}\left(\vec{\boldsymbol{a}}\otimes\vec{\boldsymbol{b}}\right)=\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}\end{array}\right\}\ \ldots\text{ορισμός}$$

Συνιστώσες: $\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) = T_{ii}$

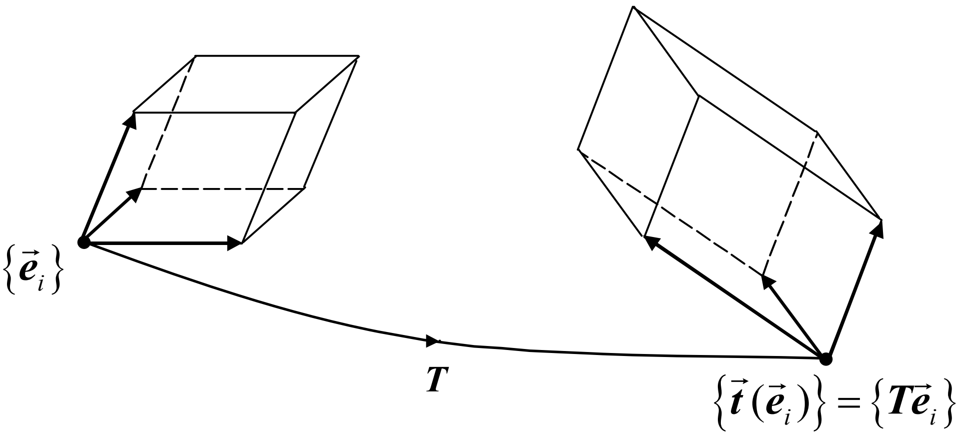
$$\ldots \quad \left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) = \mathrm{tr}\left(T_{ij}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j \right) = T_{ij}\, \mathrm{tr}\left(\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j \right) = T_{ij} \left(\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}_j \right) = T_{ij}\delta_{ij} = T_{ii} \right]$$

❖ **Εσωτερικό Γινόμενο Τανυστών:** $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S} = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^T \right)$

Συνιστώσες: $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S} = \left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^T \right)_{ii} = T_{im} S^T_{mi} = T_{im} S_{im} = T_{ij} S_{ij} \quad \ldots \left(= S \cdot T \right)$

Μέτρο: $|\boldsymbol{T}| = \sqrt{\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}} \quad \ldots \left(= \sqrt{T_{ij} T_{ij}} \right) \quad \ldots \begin{cases} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S} \le |\boldsymbol{T}||\boldsymbol{S}| \\ |\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}| \le |\boldsymbol{T}| + |\boldsymbol{S}| \end{cases}$

❖ **Ορίζουσα (det*T*) του τανυστή *T***



$$\det \boldsymbol{T} = \frac{\left(\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_1 \times \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_2 \right) \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_3}{\left(\vec{\boldsymbol{e}}_1 \times \vec{\boldsymbol{e}}_2 \right) \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_3} \quad \ldots \quad |\det \boldsymbol{T}| = \frac{\text{όγκος } \{\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_i\}}{\text{όγκος } \{\vec{\boldsymbol{e}}_i\}}$$

Θεώρημα: Η det***T*** είναι ανεξάρτητη της βάσης $\{\vec{\boldsymbol{e}}_i\}$

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j \Rightarrow \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_i = \left(T_{rs}\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_r \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_s \right) \vec{\boldsymbol{e}}_i = T_{rs} \vec{\boldsymbol{\imath}}_r (\vec{\boldsymbol{\imath}}_s \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i)$$

Επομένως, ο αριθμητής στον τύπο της ορίζουσας γίνεται:

$$\left(\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_1 \times \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_2\right)\cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_3 = \left\{ T_{rs}\vec{\boldsymbol{\imath}}_r(\vec{\boldsymbol{\imath}}_s \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_1) \times T_{mp}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m(\vec{\boldsymbol{\imath}}_p \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2)\right\} \cdot T_{nt}\vec{\boldsymbol{\imath}}_n(\vec{\boldsymbol{\imath}}_t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_3) =$$
$$= \varepsilon_{rmn} T_{rs} T_{mp} T_{nt}(\vec{\boldsymbol{\imath}}_s \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_1)(\vec{\boldsymbol{\imath}}_p \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2)(\vec{\boldsymbol{\imath}}_t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_3) = E_{spt}(\vec{\boldsymbol{\imath}}_s \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_1)(\vec{\boldsymbol{\imath}}_p \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2)(\vec{\boldsymbol{\imath}}_t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_3)$$

όπου: $E_{spt} = \varepsilon_{rmn} T_{rs} T_{mp} T_{nt}$

<u>Παρατήρηση</u>: $E_{spt} = E_{pts} = E_{tsp} = -E_{pst} = -E_{stp} = -E_{tps}$

& $E_{spt} = 0,$ όταν τουλάχιστον 2 από τα t, s, p είναι ίσα

Επομένως, το E_{spt} μπορεί να γραφεί ως: $E_{spt} = \varepsilon_{spt} E_{123} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{spt} = \varepsilon_{spt}(\varepsilon_{rmn} T_{r1} T_{m2} T_{n3}) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{spt} T_{r1} T_{m2} T_{n3} = T_{rs} T_{mp} T_{nt}$$

Άρα: $\left(\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_1 \times \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_2\right)\cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_3 = \varepsilon_{rmn} T_{r1} T_{m2} T_{n3}\, \varepsilon_{spt}(\vec{\boldsymbol{\imath}}_s \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_1)(\vec{\boldsymbol{\imath}}_p \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2)(\vec{\boldsymbol{\imath}}_t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_3)$

Όμως: $\vec{\boldsymbol{e}}_i = e_m \vec{\boldsymbol{\imath}}_m = (\vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}_m)\, \vec{\boldsymbol{\imath}}_m$

$$\Rightarrow (\vec{\boldsymbol{e}}_1 \times \vec{\boldsymbol{e}}_2)\cdot \vec{\boldsymbol{e}}_3 = \varepsilon_{spt}(\vec{\boldsymbol{\imath}}_s \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_1)(\vec{\boldsymbol{\imath}}_p \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2)(\vec{\boldsymbol{\imath}}_t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_3)$$

$$\therefore \quad \det \boldsymbol{T} = \varepsilon_{rmn} T_{r1} T_{m2} T_{n3}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρείται ότι:

$$\varepsilon_{rst}(\det \boldsymbol{T}) = \varepsilon_{rst}\varepsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3} = \varepsilon_{ijk} T_{ir} T_{js} T_{kt} \tag{1}$$

$$\varepsilon_{rst}\varepsilon_{rst}(\det \boldsymbol{T}) = \varepsilon_{rst}\varepsilon_{ijk} T_{ir} T_{js} T_{kt} \xrightarrow{\varepsilon_{rst}\varepsilon_{rst}=6} 6\det \boldsymbol{T} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst} T_{ir} T_{js} T_{kt}$$

$\Rightarrow$ εναλλακτικός ορισμός της $\det \boldsymbol{T}$:

$$\therefore \quad \boxed{\det \boldsymbol{T} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst} T_{ir} T_{js} T_{kt}} \tag{2}$$

$$(1) \Rightarrow \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{rst}\left(\det \boldsymbol{T}\right) = \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk} T_{ir} T_{js} T_{kt} = \begin{vmatrix} T_{lr} & T_{ls} & T_{lt} \\ T_{mr} & T_{ms} & T_{mt} \\ T_{nr} & T_{ns} & T_{nt} \end{vmatrix} \tag{3}$$

για $\quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{1} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{lr} & \delta_{ls} & \delta_{lt} \\ \delta_{mr} & \delta_{ms} & \delta_{mt} \\ \delta_{nr} & \delta_{ns} & \delta_{nt} \end{vmatrix} \qquad (4)$

για $\left\{\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{1} \quad \rightarrow \ \det \boldsymbol{Q} = \pm 1\right\}, \ (1) \Rightarrow \varepsilon_{rst} = \pm \varepsilon_{ijk} Q_{ir} Q_{js} Q_{kt}$

Με τη βοήθεια της (2) μπορεί ν' αποδειχθούν εύκολα οι σχέσεις:

$$\det(\boldsymbol{TS}) = (\det \boldsymbol{T})(\det \boldsymbol{S}), \quad \det \boldsymbol{T} = \det \boldsymbol{T}^T, \quad \det \boldsymbol{T}^{-1} = (\det \boldsymbol{T})^{-1}$$

όπου $\boldsymbol{T}^{-1}$ είναι ο αντίστροφος τανυστής του $\boldsymbol{T}$, & ορίζεται παρακάτω

❖ Αντίστροφος $\boldsymbol{T}^{-1}$ ενός τανυστή $\boldsymbol{T}$

❑ *Ορισμός*: $\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{w}} \ \Rightarrow \ \vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{w}}, \quad \forall\, \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{w}}$

$$\Rightarrow \ \left\{(\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{T}, \qquad \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{1}, \qquad (\boldsymbol{TS})^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\right\}$$

<u>*Αποδείξεις*</u>

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{w}} \\ &\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{w}} \Rightarrow \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{w}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{w}} \Rightarrow (\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} - \boldsymbol{1})\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{o}}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει $\forall\, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbf{V}$. Άρα ο μηδενόχωρος του πίνακα $(\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} - \boldsymbol{1}) \in \mathbb{R}^3$ είναι ο $\mathbb{R}^3$ και ο χώρος στηλών του είναι το μονοσύνολο $\{\vec{\boldsymbol{o}}\}$. Επομένως, $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} - \boldsymbol{1} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{1}$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{w}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}\vec{\boldsymbol{w}} \\ &\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{w}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{w}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}\vec{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{w}} \underset{\forall\, \vec{\boldsymbol{w}}}{\Rightarrow} (\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{1} \Rightarrow \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{TS}\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{w}}\Rightarrow \boldsymbol{S}\vec{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{w}}\Rightarrow \vec{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{w}}\\ \vec{\boldsymbol{u}}=(\boldsymbol{TS})^{-1}\vec{\boldsymbol{w}}\end{array}\right\}\Rightarrow(\boldsymbol{TS})^{-1}\vec{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{w}}\Rightarrow$$

$$\underset{\forall\,\vec{\boldsymbol{w}}}{\Rightarrow}(\boldsymbol{TS})^{-1}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}$$

- *Συνιστώσες του* $\boldsymbol{T}^{-1}$: δίνονται συναρτήσει του συζυγούς (adjoint) τανυστή $\boldsymbol{T}^C=\mathrm{adj}\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{T}^C=T^C_{mi}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m\otimes\vec{\boldsymbol{\imath}}_i,\qquad T^C_{mi}\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{mst}\varepsilon_{ijk}T_{js}T_{kt}$$

$$(1)\Rightarrow\ \varepsilon_{mst}\varepsilon_{rst}\det\boldsymbol{T}=\varepsilon_{mst}\varepsilon_{ijk}T_{ir}T_{js}T_{kt}$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι [από εξ. (4)]: $\varepsilon_{mst}\varepsilon_{rst}=2\delta_{mr}$

$$2\delta_{mr}\det\boldsymbol{T}=(\varepsilon_{mst}\varepsilon_{ijk}T_{js}T_{kt})T_{ir}\Rightarrow\delta_{mr}\det\boldsymbol{T}=T^C_{mi}T_{ir}\Rightarrow\boldsymbol{1}=\left(\frac{\boldsymbol{T}^C}{\det\boldsymbol{T}}\right)\boldsymbol{T}$$

και επειδή μπορεί ν' αποδειχθεί εκ των προτέρων ότι ο $\boldsymbol{T}^{-1}$ είναι ένας & μοναδικός & εξ' ορισμού $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{1}\ \Rightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{\boldsymbol{T}^C}{\det\boldsymbol{T}},\qquad \det\boldsymbol{T}\neq 0}$$

- *Παρατηρήσεις:*

  - Για να $\exists\ \boldsymbol{T}^{-1}$ πρέπει $\det\boldsymbol{T}\neq 0$, δηλ. ο $\boldsymbol{T}$ να είναι ομαλός: η εξίσωση $\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{o}}$ έχει μοναδική λύση την $\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{o}}$ αν και μόνο αν $\det\boldsymbol{T}\neq 0$

  - Βασικό θεώρημα ύπαρξης του $\boldsymbol{T}^{-1}$:

$$\boldsymbol{T}\ \text{αντιστρέψιμος}\Leftrightarrow\boldsymbol{T}\ \text{ομαλός}$$

- (3) $\Rightarrow$ $\det \boldsymbol{T} = \left[\boldsymbol{T}\right] = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$

- $T_{ij}^{C} = (-1)^{i+j}$ [ελάσσων ορίζουσα του T_{ji}]
  Π.χ. $T_{23}^{C} \equiv -\left(T_{11}T_{23} - T_{21}T_{13}\right) = -$ [ελάσσων ορίζουσα του T_{32}]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΑΝΥΣΤΩΝ

❖ Μονόμετροι (unimodular) τανυστές, $\boldsymbol{H} \in \mathcal{U}$: $|\det \boldsymbol{H}| = 1$

δηλ. $\boldsymbol{H}$ είναι μονόμετρος αν είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που διατηρεί τον όγκο. Μπορεί ν' αποδειχθεί σχετικά εύκολα ότι το σύνολο $\mathcal{U}$ όλων των μονόμετρων τανυστών είναι πολλαπλασιαστική ομάδα, δηλ.

(i) Είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό:

$$\forall\ \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2 \in \mathcal{U} \ \Rightarrow\ (\boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{H}_2) \in \mathcal{U}$$

(ii) Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα: $(\boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{H}_3 = \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{H}_2 \boldsymbol{H}_3)$

(iii) Το $\mathcal{U}$ έχει μοναδιαίο στοιχείο, μιας και $\boldsymbol{1} \in \mathcal{U}$

(iv) $\forall\ \boldsymbol{H} \in \mathcal{U}, \exists\ \boldsymbol{H}^{-1} \in \mathcal{U}$ (μιας και $\det \boldsymbol{H} = \pm 1 \Rightarrow \det \boldsymbol{H}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{H}} = \pm 1$)

❖ Ορθογώνιοι (Orthogonal) τανυστές, $\boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}$:

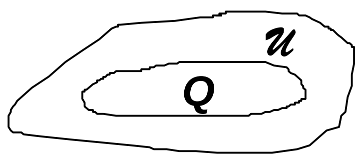
❑ *Ορισμός*: $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$ ή ισοδύναμα: $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{1}$

$$\Rightarrow \det \boldsymbol{Q} = \pm 1 \ \rightarrow \begin{cases} \det \boldsymbol{Q} = +1 \ \rightarrow\ \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}^+ & \text{... δεξιόστροφος} \\ \det \boldsymbol{Q} = -1 \ \rightarrow\ \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}^- & \text{... αριστερόστροφος} \end{cases}$$

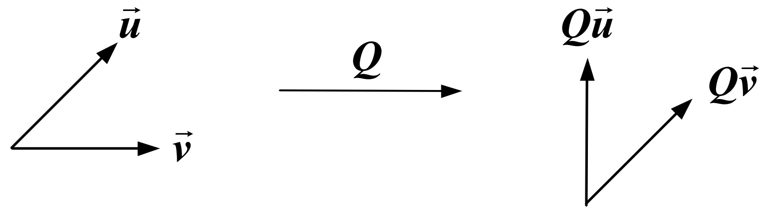
$$\Rightarrow\ Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij}$$

❑ Το σύνολο $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ των ορθογώνιων τανυστών είναι πολλαπλ/ική ομάδα

❑ $\boldsymbol{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{U}$



- ❑ Ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $\boldsymbol{Q}$ είναι ***ισομετρικός***, δηλ. διατηρεί μήκη & γωνίες:



i) $(\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{u}})\cdot(\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{v}})=\vec{\boldsymbol{u}}\cdot(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{v}})=\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}$

$$\xrightarrow{\text{για } \vec{u}=\vec{v}} (\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{u}})\cdot(\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{u}})=\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\Rightarrow\left|\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{u}}\right|=\left|\vec{\boldsymbol{u}}\right|$$

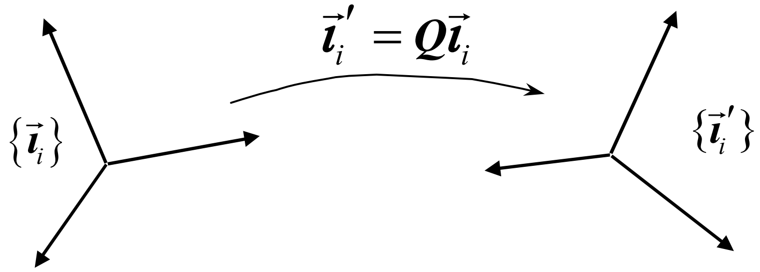
ii) $\cos(\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{v}})=\dfrac{(\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{u}})\cdot(\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{v}})}{\left|\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{u}}\right|\left|\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{v}}\right|}=\dfrac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}{\left|\vec{\boldsymbol{u}}\right|\left|\vec{\boldsymbol{v}}\right|}=\cos(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}})$

- ❑ $\varepsilon_{rst}=\varepsilon_{ijk}Q_{ir}Q_{js}Q_{kt} \quad (\boldsymbol{Q}\in\mathbf{Q}^+), \quad \varepsilon_{rst}=-\varepsilon_{ijk}Q_{ir}Q_{js}Q_{kt} \quad (\boldsymbol{Q}\in\mathbf{Q}^-)$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΛΛΑΓΗΣ ΒΑΣΗΣ</u>

Έστω $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}_i\}$ και $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}_i'\}$ δυο συστήματα ορθοκανονικών βάσεων. Τότε υπάρχει ένας & μοναδικός $\boldsymbol{Q}\in\mathbf{Q}$, τέτοιος ώστε:

$$\vec{\boldsymbol{\imath}}_i'=\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Q}=\vec{\boldsymbol{\imath}}_i'\otimes\vec{\boldsymbol{\imath}}_i, \quad Q_{ij}=\vec{\boldsymbol{\imath}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\imath}}_j'$$



<u>Παρατηρήσεις</u>

- Αν $(\vec{\boldsymbol{\imath}}_1\times\vec{\boldsymbol{\imath}}_2)\cdot\vec{\boldsymbol{\imath}}_3=+1$ τότε η βάση $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}_i\}$ είναι δεξιόστροφη

- Αν $(\vec{\iota}_1 \times \vec{\iota}_2) \cdot \vec{\iota}_3 = -1$ τότε η βάση $\{\vec{\iota}_i\}$ είναι αριστερόστροφη

- $(\vec{\iota}_1' \times \vec{\iota}_2') \cdot \vec{\iota}_3' = (\boldsymbol{Q}\vec{\iota}_1 \times \boldsymbol{Q}\vec{\iota}_2) \cdot \boldsymbol{Q}\vec{\iota}_3 = (\det \boldsymbol{Q})\left[(\vec{\iota}_1 \times \vec{\iota}_2) \cdot \vec{\iota}_3\right]$

  $\Rightarrow$ Αν $\{\vec{\iota}_i\}$ δεξιόστοφη & $\det \boldsymbol{Q} = +1$, τότε και $\{\vec{\iota}_i'\}$ δεξιόστοφη & το $\boldsymbol{Q}$ λέγεται "ακριβώς ορθογώνιος μετασχηματισμός" ή "περιστροφή"
  $\Rightarrow$ Αν $\{\vec{\iota}_i\}$ δεξιόστοφη & $\det \boldsymbol{Q} = -1$, τότε $\{\vec{\iota}_i'\}$ αριστερόστοφη & το $\boldsymbol{Q}$ λέγεται "μη-ακριβώς ορθογώνιος μετασχηματισμός" ή "συμμετρία"

<u>Συνιστώσες Διανυσμάτων & Τανυστών κατόπιν Αλλαγής Βάσης</u>

Διανύσματα: $u_j' = u_i Q_{ij}$ & $u_i = u_j' Q_{ij}$

Τανυστές: $T_{mn}' = T_{ij} Q_{im} Q_{jn}$ & $T_{ij} = T_{mn}' Q_{im} Q_{jn}$

Οι αποδείξεις των παραπάνω σχέσεων δεν είναι δύσκολες: π.χ.

$$\vec{\boldsymbol{u}} = u_i \vec{\iota}_i = u_i' \vec{\iota}_i' \;\rightarrow\; u_j' = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\iota}_j' = u_i \vec{\iota}_i \cdot \vec{\iota}_j' = u_i Q_{ij}$$

και

$$\boldsymbol{T} = T_{ij} \vec{\iota}_i \otimes \vec{\iota}_j = T_{ij}' \vec{\iota}_i' \otimes \vec{\iota}_j' \;\rightarrow\; T_{mn}' = \vec{\iota}_m' \cdot \boldsymbol{T} \vec{\iota}_n' = \vec{\iota}_m' \cdot T_{ij} (\vec{\iota}_i \otimes \vec{\iota}_j) \vec{\iota}_n' =$$
$$= \vec{\iota}_m' \cdot T_{ij} \vec{\iota}_i (\vec{\iota}_j \cdot \vec{\iota}_n') = T_{ij} (\vec{\iota}_i \cdot \vec{\iota}_m')(\vec{\iota}_j \cdot \vec{\iota}_n') = T_{ij} Q_{im} Q_{jn}$$

ΤΑΝΥΣΤΕΣ *N*-ΟΣΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

$$\boldsymbol{C} = C_{\underbrace{ij\ldots k}_{N}} \left(\vec{\iota}_i \otimes \vec{\iota}_j \otimes \ldots \otimes \vec{\iota}_k\right)$$

Με αλλαγή βάσεως λαμβάνεται:

$$C_{mn\ldots l}' = C_{ij\ldots k} Q_{im} Q_{jn} \ldots Q_{kl} \quad \& \quad C_{ij\ldots k} = C_{mn\ldots l}' Q_{im} Q_{jn} \ldots Q_{kl}$$

Ισότροποι (Isotropic) τανυστές $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{J}$ **:**

Ένας τανυστής N-οστής τάξης είναι ισότροπος, αν με μια κατάλληλη αλλαγή βάσης ($\vec{\boldsymbol{i}}_i' = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{i}}_i$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbf{Q}^+$) τα στοιχεία του παραμένουν αμετάβλητα, δηλ.

$$C'_{mn\ldots l} = C_{mn\ldots l} \;\Rightarrow\; C_{ij\ldots k} Q_{im} Q_{jn} \ldots Q_{kl} = C_{mn\ldots l}$$

Θεώρημα Hilbert: κάθε ισότροπος τανυστής οποιασδήποτε τάξης N γράφεται ως άθροισμα εξωτερικών γινομένων των δ_{ij} & ε_{ijk}, ως εξής:

$N =$ άρτιος $\rightarrow$ μόνο τα δ_{ij} είναι απαραίτητα

$N =$ περιττός $\rightarrow$ τόσο τα δ_{ij} όσο & τα ε_{ijk} είναι απαραίτητα

Παραδείγματα:

$$C_{ij} = c\delta_{ij}, \quad C_{ijk} = c\varepsilon_{ijk}, \quad C_{ijkl} = c_1\delta_{ij}\delta_{kl} + c_2\delta_{ik}\delta_{jl} + c_3\delta_{il}\delta_{jk},$$

$$\begin{aligned} C_{ijklm} &= c_1\delta_{ij}\varepsilon_{klm} + c_2\delta_{ik}\varepsilon_{jlm} + c_3\delta_{il}\varepsilon_{jkm} + c_4\delta_{im}\varepsilon_{jkl} + c_5\delta_{jk}\varepsilon_{ilm} + \\ &+ c_6\delta_{jl}\varepsilon_{ikm} + c_7\delta_{jm}\varepsilon_{ikl} + c_8\delta_{kl}\varepsilon_{ijm} + c_9\delta_{km}\varepsilon_{ijl} + c_{10}\delta_{lm}\varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

όπου: c & c_i $\rightarrow$ βαθμωτές ποσότητες (ή σταθερές)

Παρατήρηση: Αν ο $4^{ου}$ βαθμού ισότροπος τανυστής C_{ijkl} είναι και συμμετρικός, δηλ. $C_{ijkl} = C_{jikl}$ (ή C_{ijlk}), τότε:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

Εφαρμογή στα ***Γραμμικά Ελαστικά Στερεά*** *(Νόμος Hooke):*

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{CE} \;\rightarrow\; T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}$$

και επειδή $E_{kl} = E_{lk}$, προκύπτει:

$$T_{ij} = \lambda E_{mm}\delta_{ij} + 2\mu E_{mn} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{T} = \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{1} + 2\mu\boldsymbol{E}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12: ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ & ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ / ΠΟΛΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

1. ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ & ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ του *T*:

- *Ορισμός*: t = ιδιοτιμή & $\vec{\boldsymbol{e}}$ = ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{T}$ όταν: $\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}} = t\vec{\boldsymbol{e}}$ με $\vec{\boldsymbol{e}} \neq \vec{\boldsymbol{o}}$

$$\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}} = t\vec{\boldsymbol{e}} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{T} - t\boldsymbol{1})\vec{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{o}} \quad \Rightarrow \quad \det(\boldsymbol{T} - t\boldsymbol{1}) = 0$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω ορίζουσα ως

$$\det\left(\boldsymbol{T} - t\boldsymbol{1}\right) = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\left(\boldsymbol{T} - t\boldsymbol{1}\right)_{il}\left(\boldsymbol{T} - t\boldsymbol{1}\right)_{jm}\left(\boldsymbol{T} - t\boldsymbol{1}\right)_{kn}$$

παίρνουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** του $\boldsymbol{T}$:

$$\boxed{-t^3 + I_{\boldsymbol{T}}t^2 - II_{\boldsymbol{T}}t + III_{\boldsymbol{T}} = 0}$$

$$I_{\boldsymbol{T}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}), \qquad II_{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}\Big(\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})\right]^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^2)\Big), \qquad III_{\boldsymbol{T}} = \det\boldsymbol{T}$$

όπου $I_{\boldsymbol{T}}, II_{\boldsymbol{T}}, III_{\boldsymbol{T}}$ είναι οι βασικές αναλλοίωτες του $\boldsymbol{T}$

- Αν $\left(t_1, t_2, t_3\right)$ οι ρίζες του παραπάνω πολυωνύμου, τότε:

$$I_{\boldsymbol{T}} = t_1 + t_2 + t_3, \qquad II_{\boldsymbol{T}} = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3, \qquad III_{\boldsymbol{T}} = t_1t_2t_3$$

Από τη θεωρία του κυβικού πολυωνύμου $\rightarrow$ τουλάχιστο μία t_i είναι πραγματική & δύο συζυγείς μιγαδικές

- **Θεώρημα Cayley-Hamilton:** $-\boldsymbol{T}^3 + I_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}^2 - II_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T} + III_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{O}$

❑ Ιδιότητες

- Αν $\boldsymbol{T} \to$ τριγωνικός*, τότε [στοιχεία της κύριας διαγωνίου] = t_i
- t = ιδιοτιμή του ομαλού $\boldsymbol{T}$ & $\vec{\boldsymbol{e}}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\Rightarrow 1/t$ = ιδιοτιμή του $\boldsymbol{T}^{-1}$ & $\vec{\boldsymbol{e}}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα
- t = ιδιοτιμή του $\boldsymbol{T}$ & $\vec{\boldsymbol{e}}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\Rightarrow \alpha t$ = ιδιοτιμή του $\alpha\boldsymbol{T}$ & $\vec{\boldsymbol{e}}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα
- t = ιδιοτιμή του $\boldsymbol{T} \Leftrightarrow t$ = ιδιοτιμή του $\boldsymbol{T}^T$
- Αν $\boldsymbol{T}$ & $\boldsymbol{S} \to$ όμοιοι†, τότε έχουν τις ίδιες χαρακτηριστικές εξισώσεις ($\Rightarrow$ ίδιες ιδιοτιμές) & $\det\boldsymbol{T} = \det\boldsymbol{S}$
- Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα
- $\boldsymbol{T}$ έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{T}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος δηλ. όμοιος με το διαγώνιο τανυστή

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ είναι διαγώνιος $\Leftrightarrow$ τα στήλες-διανύσματα του $\boldsymbol{P}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $\boldsymbol{T}$
- Μηδενική ιδιοτιμή $(t_i = 0) \Leftrightarrow \det\boldsymbol{T} = 0$

❑ **Θεώρημα:** κάθε συμμετρικός τανυστής $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$ έχει τρεις πραγματικές ιδιοτιμές $\{t_i\}$ και τρία πραγματικά & ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\left\{\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_i\right\}$ ... $\left(\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_i = \dfrac{\vec{\boldsymbol{e}}_i}{|\vec{\boldsymbol{e}}_i|}\right)$

---

* Τριγωνικός τανυστής $\boldsymbol{T}$: $\begin{cases} T_{ij} = 0 \text{ για } i < j \text{ (κάτω τριγωνικός)} \\ T_{ij} = 0 \text{ για } i > j \text{ (άνω τριγωνικός)} \end{cases}$

† Όμοιοι τανυστές $\boldsymbol{T}$ & $\boldsymbol{S}$: αν και μόνον αν $\exists$ μη-ιδιόμορφος τανυστής $\boldsymbol{P}$, τέτοιος ώστε: $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^{-1}$. *Σημείωση*: $\forall$ $\boldsymbol{T}$, $\exists$ όμοιος τριγωνικός $\boldsymbol{S}$.

Για την απόδειξη (δεν παρατίθεται εδώ) του θεωρήματος αυτού χρησιμοποιούνται τα εξής δύο λήμματα:

Λήμμα 1: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad \Rightarrow$ οι ιδιοτιμές t_i είναι πραγματικές

Λήμμα 2: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad \Rightarrow$ διακριτές ιδιοτιμές $(t_1 \neq t_2)$ αντιστοιχούν σε ορθογώνια ιδιοδιανύσματα $(\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2)$

Συνιστώσες: $\boldsymbol{T} = \hat{T}_{ij}\, \hat{\vec{e}}_i \otimes \hat{\vec{e}}_j$, με $\hat{T}_{ij} = \hat{\vec{e}}_i \cdot \boldsymbol{T}\hat{\vec{e}}_j = t_j \hat{\vec{e}}_i \cdot \hat{\vec{e}}_j = t_j \delta_{ij}$

όπου το j δεν αθροίζεται

δηλ. $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{T} = t_1\, \hat{\vec{e}}_1 \otimes \hat{\vec{e}}_1 + t_2\, \hat{\vec{e}}_2 \otimes \hat{\vec{e}}_2 + t_3\, \hat{\vec{e}}_3 \otimes \hat{\vec{e}}_3$

Πόρισμα 1: Αν $t_1 \neq t_2 = t_3$, τότε κάθε διάνυσμα του επιπέδου που ορίζεται από τα $\hat{\vec{e}}_2, \hat{\vec{e}}_3$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή t_2

Πόρισμα 2: Αν $t_1 = t_2 = t_3$, τότε κάθε διάνυσμα του χώρου **V** είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μοναδική ιδιοτιμή t_1.

❖ **Θεώρημα ιδιοτιμής για ορθογώνιους τανυστές:** Οι πραγματικές ιδιοτιμές ενός ορθογώνιου τανυστή είναι είτε +1 είτε –1

<u>*Απόδειξη:*</u> Έστω $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{Q}$ & $\boldsymbol{R}\vec{u} = \lambda\vec{u}$, τότε:

$$\boldsymbol{R}\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow \boldsymbol{R}\vec{u} \cdot \boldsymbol{R}\vec{u} = \lambda^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) \Rightarrow \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}\vec{u} \cdot \vec{u} = \lambda^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = \lambda^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) \Rightarrow (1-\lambda^2)(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

❖ **Θετικά Ορισμένος Τανυστής**

Ένας τανυστής $\boldsymbol{T}$ είναι θετικά ορισμένος ανν $\boldsymbol{T}\vec{u} \cdot \vec{u} > 0,\ \forall \vec{u} \neq \vec{o}$.

<u>*Θεώρημα:*</u> ο $\boldsymbol{T}$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι: $t_i > 0$ (με $i = 1,2,3$)

- **Τετραγωνική Ρίζα** $\sqrt{\boldsymbol{T}}$: για ένα θετικά ορισμένο συμμετρικό τανυστή $\boldsymbol{T}$, ορίζεται ως

$$\sqrt{\boldsymbol{T}} = \sqrt{t_1}\,\vec{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_1 + \sqrt{t_2}\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_2 + \sqrt{t_3}\,\vec{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_3$$

δηλ. $\sqrt{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{t_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{t_3} \end{bmatrix}$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Αν $\boldsymbol{T}$ είναι θετικά ορισμένος & $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$, τότε $\sqrt{\boldsymbol{T}}$ είναι επίσης συμμετρικός & θετικά ορισμένος
- Ισχύει: $\sqrt{\boldsymbol{T}}\sqrt{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}$

<u>2. ΠΟΛΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ή ΠΟΛΙΚΗ ΔΙΑΣΠΑΣΗ (POLAR DECOMPOSITION) ΤΑΝΥΣΤΗ</u>

Αν $\boldsymbol{F}$ είναι ένας ομαλός τανυστής $(\det \boldsymbol{F} \neq 0)$, τότε λαμβάνει την εξής ***μοναδική*** αναπαράσταση (διάσπαση)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}$$

όπου $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ είναι θετικά ορισμένοι & συμμετρικοί ($\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^T$) και $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{Q}$. Συγκεκριμένα:

$$\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}}, \qquad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T$$

<u>***Απόδειξη***</u>

- $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ είναι θετικά ορισμένος και συμμετρικός:

$$(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})^T = \boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{F}^T)^T = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} \quad \rightarrow \text{ συμμετρικός}$$
$$(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{F}\vec{\boldsymbol{u}})\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{F}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{F}\vec{\boldsymbol{u}} > 0 \quad (\text{με } \vec{\boldsymbol{u}} \neq \vec{\boldsymbol{o}}) \quad \rightarrow \text{ θετικά ορισμ.}$$

- Ορίζουμε $\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}}$, ο οποίος είναι ομαλός, συμμετρικός & θετικά ορισμένος

- Ορίζουμε $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}$ (άρα $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$) & παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{Q}$, αφού

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{U}^{-1})^T\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}\sqrt{\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}}\sqrt{\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}}\,\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{1}$$

- *Μοναδικότητα:* Έστω $\exists$ 2 διαφορετικές εκφράσεις, δηλ.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}_2$$

όπου $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2$ είναι θετικά ορισμένοι & συμμετρικοί, και $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2 \in \boldsymbol{Q}$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{R}_1^T\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_1^2 \\ \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{U}_2^T\boldsymbol{R}_2^T\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{U}_1^2 = \boldsymbol{U}_2^2 \Rightarrow \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$$

Θέτοντας $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2 \ \rightarrow \ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U} \Rightarrow \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2$

- Παρατηρούμε ότι: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} \Rightarrow \boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T)\boldsymbol{R}$

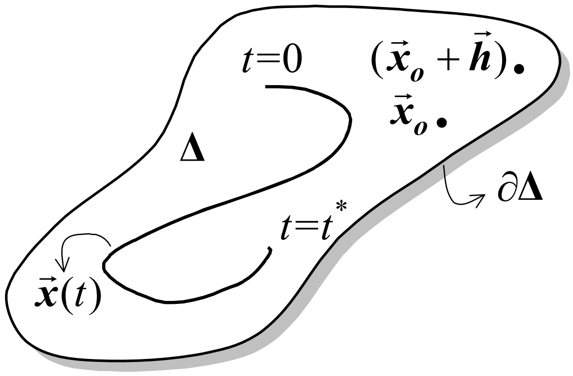
- Ορίζουμε: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T$ (άρα $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}$). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\boldsymbol{V}$ είναι συμμετρικός & θετικά ορισμένος, αφού τα $\boldsymbol{R}$ και $\boldsymbol{U}$ είναι μοναδικά. Έχουμε:

$$\boldsymbol{V}^T = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T)^T = (\boldsymbol{R}^T)^T(\boldsymbol{R}\boldsymbol{U})^T = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{V}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{R}\underbrace{\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T\vec{\boldsymbol{u}}}_{\vec{\boldsymbol{v}}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{R}\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}^T\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{U}\underbrace{\boldsymbol{R}^T\vec{\boldsymbol{u}}}_{\vec{\boldsymbol{w}}}\cdot\boldsymbol{R}^T\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{U}\vec{\boldsymbol{w}}\cdot\vec{\boldsymbol{w}} > 0$$

αφού $\boldsymbol{U}$ είναι θετικά ορισμένος & $\vec{\boldsymbol{w}} \neq \vec{\boldsymbol{o}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: ΠΕΔΙΑ (ΒΑΘΜΩΤΑ / ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ / ΤΑΝΥΣΤΙΚΑ)



- Δ = ανοικτή περιοχή (δηλ. η οριακή επιφάνεια $\partial\Delta \notin \Delta$) στον Ευκλείδιο χώρο **E**

- $\vec{x}(t)$ ... μονοπαραμετρική διανυσματική μεταβλητή

- $\vec{x} \in \Delta$ ... αν μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μία σφαίρα γύρω από το $\vec{x}$ που να περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο **Δ**

❖ ΒΑΘΜΩΤΟ ΠΕΔΙΟ: $\varphi(\vec{x}) : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$

V = σύνολο διανυσμάτων στον τριδιάστατο Ευκλείδιο χώρο **E**
$\mathbb{R}$ = σύνολο πραγματικών αριθμών

❑ Παραγώγιση:

$$\varphi(\vec{x}_o + \vec{h}) - \varphi(\vec{x}_o) = \boldsymbol{\varphi},_{\vec{x}}(\vec{x}_o) \cdot \vec{h} + \mathbb{O}\left(\left|\vec{h}\right|\right), \qquad \forall\, \vec{h} \in \mathbf{V} \;\&\; (\vec{x}_o + \vec{h}) \in \Delta$$

όπου $\dfrac{\mathbb{O}\left(\left|\vec{h}\right|\right)}{\left|\vec{h}\right|} \to 0$ όταν $\left|\vec{h}\right| \to 0$

$\varphi,_{\vec{x}}(\vec{x}_o) \equiv \mathrm{grad}\,\varphi \in \mathbf{V}$ ... (***κλίση*** του φ) → διάνυσμα
για δεδομένη $\varphi(\vec{x})$, το $\mathrm{grad}\,\varphi$ είναι μοναδικό

- **Συστήματα συντεταγμένων:** Για ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}_i\}$, $\exists$ μια 1-1 αντιστοιχία των σημείων του **E** σε ένα τριπαραμετρικό σύνολο αριθμών:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = x_i \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \Rightarrow \vec{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(x_i) = \hat{\boldsymbol{x}}(x_1, x_2, x_3)$$

Άρα: $\varphi(\vec{\boldsymbol{x}}) = \varphi\big(\hat{\boldsymbol{x}}(x_i)\big) = \overline{\varphi}(x_i)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = (\operatorname{grad}\varphi) \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial x_i} = (\operatorname{grad}\varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}_i = (\operatorname{grad}\varphi)_i$$

$\therefore$ *Συνιστώσες*: $\boxed{\operatorname{grad}\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \vec{\boldsymbol{\imath}}_i = \varphi,_i \vec{\boldsymbol{\imath}}_i}$

- **Σύνθετη παραγώγιση:**

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{x}}) = \varphi\big(\vec{\boldsymbol{x}}(t)\big) = \overline{\varphi}(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi,_{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \operatorname{grad}\varphi \cdot \dot{\vec{\boldsymbol{x}}}$$

❖ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{x}}) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$

- **Παραγώγιση:**

$$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{x}}_o + \vec{\boldsymbol{h}}) - \boldsymbol{u}(\vec{\boldsymbol{x}}_o) = \big[\vec{\boldsymbol{u}},_{\vec{x}}(\vec{\boldsymbol{x}}_o)\big]\vec{\boldsymbol{h}} + \mathbb{O}\Big(\big|\vec{\boldsymbol{h}}\big|\Big), \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{h}} \in \mathbf{V} \;\&\; (\vec{\boldsymbol{x}}_o + \vec{\boldsymbol{h}}) \in \Delta$$

όπου $\dfrac{\mathbb{O}\Big(\big|\vec{\boldsymbol{h}}\big|\Big)}{\big|\vec{\boldsymbol{h}}\big|} \rightarrow \vec{\boldsymbol{o}}$ όταν $\big|\vec{\boldsymbol{h}}\big| \rightarrow 0$

$\big[\vec{\boldsymbol{u}},_{\vec{x}}(\vec{\boldsymbol{x}}_o)\big] \equiv \operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}} \in (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})$ ... (***κλίση*** του $\vec{\boldsymbol{u}}$) $\rightarrow$ τανυστής

για δεδομένο $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{x}})$, το $\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}}$ είναι μοναδικό

❑ **Συνιστώσες:**

$$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{u}}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(x_i)\big) = \vec{\boldsymbol{u}}(x_i)$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial x_i} = \left(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}}\right)\frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial x_i} = \left(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}}\right)\vec{\boldsymbol{\imath}}_i, \qquad \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial x_i} = \frac{\partial (u_m \vec{\boldsymbol{\imath}}_m)}{\partial x_i} = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m$$

$$\Rightarrow \ (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})_{ij} = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \left(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}}\right)\vec{\boldsymbol{\imath}}_j = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_j}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m = \delta_{im}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j = u_{i,j}\,(\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j)}$$

❑ **Σύνθετη παραγώγιση:**

$$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{u}}\big(\vec{\boldsymbol{x}}(t)\big) = \vec{\boldsymbol{u}}(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} = \left(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}}\right)\frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{\boldsymbol{u}}} = (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})\dot{\vec{\boldsymbol{x}}}$$

❑ **Απόκλιση διανυσματικού πεδίου:**

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}} \equiv \operatorname{tr}\left(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}}\right) = \operatorname{tr}\left[u_{i,j}\,(\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j)\right] = u_{i,i} \ \rightarrow \ \text{δηλ. βαθμωτό μέγεθος}$$

❑ **Περιστροφή (ή στροβιλισμός) διανυσματικού πεδίου:**

$$\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}} \equiv \varepsilon_{ijk}u_{k,j}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \quad \rightarrow \ \text{δηλ. διανυσματικό μέγεθος}$$

❑ **Λαπλασιανή βαθμωτού πεδίου:**

$$\nabla^2\varphi \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{div}\left(\varphi_{,i}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}_i\right) = \varphi_{,ii} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

$$\rightarrow \ \text{δηλ. βαθμωτό μέγεθος}$$

❑ **Λαπλασιανή διανυσματικού πεδίου:**

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{u}} \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}}) = \operatorname{div}\left(u_{i,j}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j\right) = u_{i,jj}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}_i$$

$$\rightarrow \ \text{δηλ. διανυσματικό μέγεθος}$$

- **Ταυτότητες / Παραδείγματα:**

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{\boldsymbol{u}}) = \varphi(\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}}) + \vec{\boldsymbol{u}}\cdot(\operatorname{grad}\varphi)$$

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}}) - \operatorname{div}(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})$$

<u>*Απόδειξη 2^{ου} παραδείγματος*</u>:

$$\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\varepsilon_{ijk}u_{k},_{j}}_{w_i}\vec{\boldsymbol{i}}_i \quad \rightarrow \quad \operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{w}}$$

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}}) = \operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{w}} = \varepsilon_{mps}w_{s},_{p}\vec{\boldsymbol{i}}_m = \varepsilon_{mps}(\varepsilon_{sjk}u_{k},_{j}),_{p}\vec{\boldsymbol{i}}_m =$$

$$= \varepsilon_{mps}\varepsilon_{sjk}u_{k},_{jp}\vec{\boldsymbol{i}}_m = \varepsilon_{mps}\varepsilon_{jks}u_{k},_{jp}\vec{\boldsymbol{i}}_m = (\delta_{mj}\delta_{pk} - \delta_{mk}\delta_{jp})u_{k},_{jp}\vec{\boldsymbol{i}}_m =$$

$$= u_{k},_{mk}\vec{\boldsymbol{i}}_m - u_{m},_{pp}\vec{\boldsymbol{i}}_m = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}}) - \operatorname{div}(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})$$

- **Πεδιακές γραμμές** ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{\boldsymbol{u}} = u_i(x_1, x_2, x_3)\vec{\boldsymbol{i}}_i$ ονομάζονται οι γραμμές των οποίων η εφαπτόμενη σε κάθε σημείο τους είναι παράλληλη προς $\vec{\boldsymbol{u}}$. Προκύπτουν από τη λύση του διαφορικού συστήματος:

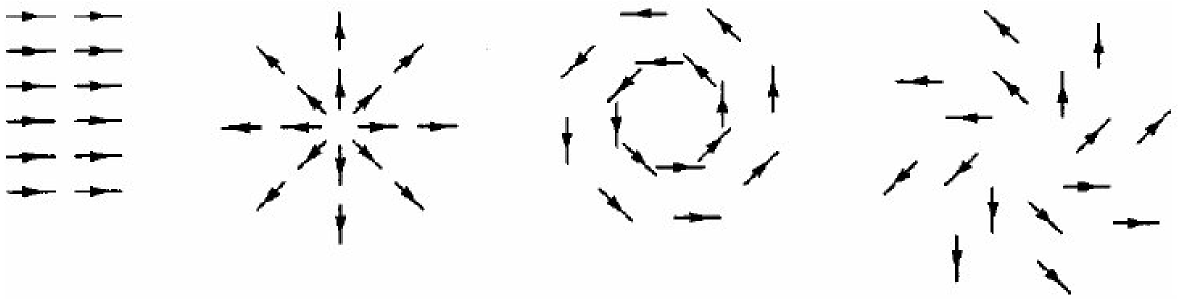
$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{u_1} = \frac{\mathrm{d}\,x_2}{u_2} = \frac{\mathrm{d}\,x_3}{u_3}$$

- **Ταξινόμηση διανυσματικών πεδίων:**

(Βάση μηδενισμού των $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}}$ ή/και $\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}}$ σε κάθε σημείο)

- *Σωληνοειδές πεδίο:* $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}} = 0$
- *Αστρόβιλο πεδίο:* $\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{o}}$

<u>Παραδείγματα</u>



$\vec{u} = k\vec{\imath}_1$ $\quad$ $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ $\quad$ $\operatorname{curl}\vec{u} = \vec{o}$

$\vec{u} = k\,\vec{r}$ $\quad$ $\operatorname{div}\vec{u} = 3k$ $\quad$ $\operatorname{curl}\vec{u} = \vec{o}$

$\vec{u} = \vec{k}\times\vec{r}$ $\quad$ $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ $\quad$ $\operatorname{curl}\vec{u} = 2\vec{k}$

$\vec{u} = c\vec{r} + \vec{k}\times\vec{r}$ $\quad$ $\operatorname{div}\vec{u} = 3c$ $\quad$ $\operatorname{curl}\vec{u} = 2\vec{k}$

όπου $\vec{r} = r\vec{\hat{e}}_{<r>} = x_i\vec{\imath}_i$, με $\vec{\hat{e}}_{<r>}$ = μοναδιαίο διάνυσμα στην ακτινική διεύθυνση σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων & r η αντίστοιχη (ακτινική) συνιστώσα

❖ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: $\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}}):\ \mathbf{V}\to(\mathbf{V}\otimes\mathbf{V})$

❑ Παραγώγιση:

$$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}}_o+\vec{\boldsymbol{h}})-\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}}_o)=\left[\boldsymbol{T},_{\vec{x}}(\vec{\boldsymbol{x}}_o)\right]\vec{\boldsymbol{h}}+\mathbb{O}\left(\left|\vec{\boldsymbol{h}}\right|\right),\quad \forall\,\vec{\boldsymbol{h}}\in\mathbf{V}\ \&\ (\vec{\boldsymbol{x}}_o+\vec{\boldsymbol{h}})\in\Delta$$

όπου $\dfrac{\mathbb{O}\left(\left|\vec{\boldsymbol{h}}\right|\right)}{\left|\vec{\boldsymbol{h}}\right|}\to\boldsymbol{O}$ όταν $\left|\vec{\boldsymbol{h}}\right|\to 0$

$\left[\boldsymbol{T},_{\vec{x}}(\vec{\boldsymbol{x}}_o)\right]\equiv\operatorname{grad}\boldsymbol{T}\quad\in(\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}\otimes\mathbf{V})$ ... ***κλίση*** του $\boldsymbol{T}$

$\to$ τανυστής $3^{ης}$ τάξης [μοναδικός για δεδομένο $\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}})$]

❑ Συνιστώσες:

$$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{T}\left(\hat{\boldsymbol{x}}(x_i)\right)=\overline{\boldsymbol{T}}(x_i)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_k} = \left(\operatorname{grad}\boldsymbol{T}\right)\frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial x_k} = \left(\operatorname{grad}\boldsymbol{T}\right)\vec{\boldsymbol{\imath}}_k, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_k} = \frac{\partial (T_{mn}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_n)}{\partial x_k} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_k}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_n$$

$$\rightarrow \ (\operatorname{grad}\boldsymbol{T})_{ijk} = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \left[(\operatorname{grad}\boldsymbol{T})\vec{\boldsymbol{\imath}}_k\right]\vec{\boldsymbol{\imath}}_j = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \left[\frac{\partial T_{mn}}{\partial x_k}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_n\right]\vec{\boldsymbol{\imath}}_j =$$

$$= \vec{\boldsymbol{\imath}}_i \cdot \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_k}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m \delta_{nj} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_k}\delta_{im}\delta_{nj} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\operatorname{grad}\boldsymbol{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_k = T_{ij},_k\,(\vec{\boldsymbol{\imath}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_j \otimes \vec{\boldsymbol{\imath}}_k)}$$

- **Σύνθετη παραγώγιση:**

$$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{T}\left(\vec{\boldsymbol{x}}(t)\right) = \overline{\boldsymbol{T}}(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} = \left(\operatorname{grad}\boldsymbol{T}\right)\frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{T}} = (\operatorname{grad}\boldsymbol{T})\dot{\vec{\boldsymbol{x}}}$$

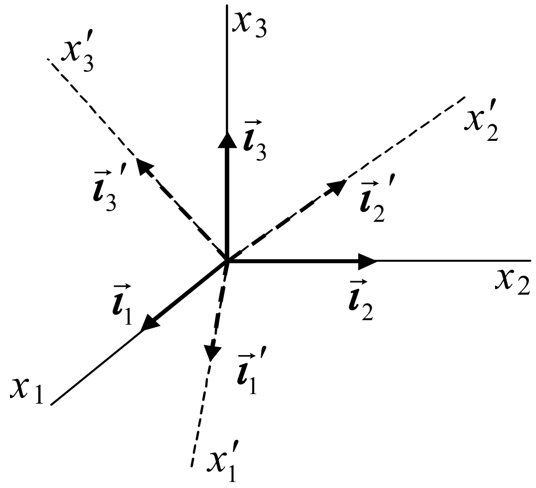
- **Απόκλιση τανυστή:**

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i = T_{ij},_j\,\vec{\boldsymbol{\imath}}_i = \left(T_{i1,1} + T_{i2,2} + T_{i3,3}\right)\vec{\boldsymbol{\imath}}_i$$

δηλ. είναι διάνυσμα με συνιστώσες: $\begin{cases} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_3}, & i = 1 \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_3}, & i = 2 \\ \dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3}, & i = 3 \end{cases}$

❖ ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ & ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ

❑ Αλλαγή συντεταγμένων:



$(x_i) \to (x_i')$

$\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{o}} + x_i \vec{\boldsymbol{\iota}}_i = \vec{\boldsymbol{o}} + x_i' \vec{\boldsymbol{\iota}}_i'$

$\vec{\boldsymbol{\iota}}_i' = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{\iota}}_i, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbf{Q}$

$\to \ \boldsymbol{Q} = \vec{\boldsymbol{\iota}}_i' \otimes \vec{\boldsymbol{\iota}}_i, \quad Q_{ij} = \vec{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\iota}}_j\,'$

$x_j' = x_i Q_{ij} \quad \& \quad x_i = x_j' Q_{ij}$

(δηλ. ίδιες σχέσεις όπως και για τις συνιστώσες διανυσμάτων μιας & $\vec{\boldsymbol{x}}$ = διάνυσμα θέσης)

$$\left(\vec{\boldsymbol{x}} = x_m' \vec{\boldsymbol{\iota}}_m\,' = x_i \vec{\boldsymbol{\iota}}_i \ \Rightarrow \ x_m' \vec{\boldsymbol{\iota}}_m\,' \cdot \vec{\boldsymbol{\iota}}_j\,' = x_i \vec{\boldsymbol{\iota}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\iota}}_j\,' \ \Rightarrow \ x_m' \delta_{mj} = x_i Q_{ij} \ \Rightarrow \ x_j' = x_i Q_{ij} \right)$$

❑ **Αναλλοίωτες ποσότητες:** εκείνες οι ποσότητες που έχουν την ίδια τιμή σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων

- *Παράδειγμα*: το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι αναλλοίωτο, αφού

$$\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$$

$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ … εσωτερικό γινόμενο εκφρασμένο ως προς τη βάση $\{\vec{\boldsymbol{\iota}}_i\}$

$\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{v}}$ … εσωτερικό γινόμενο εκφρασμένο ως προς $\{\vec{\boldsymbol{\iota}}_i'\} = \{\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{\iota}}_i\}$

- Σημαντικές αναλλοίωτες ποσότητες για διαφορίσιμα πεδία:

$$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{u}}, \quad \mathrm{curl}\,\vec{\boldsymbol{u}}, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{T}$$

Απόδειξη για το $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}}$:

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial (u'_j Q_{ij})}{\partial x_i} = \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} Q_{ij} = \frac{\partial u'_j}{\partial x'_m}\frac{\partial x'_m}{\partial x_i} Q_{ij} = \frac{\partial u'_j}{\partial x'_m} Q_{im} Q_{ij} =$$

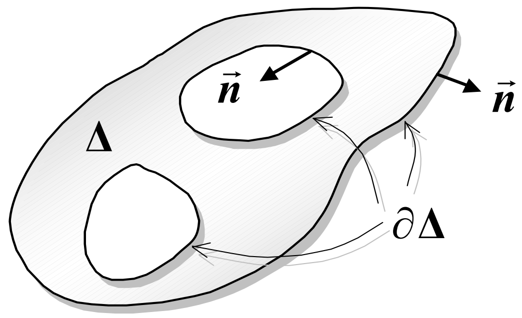
$$= \frac{\partial u'_j}{\partial x'_m}\delta_{mj} = \frac{\partial u'_j}{\partial x'_j} = \operatorname{div}'\vec{\boldsymbol{u}}$$

παρομοίως αποδεικνύεται ότι: $\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}} = \operatorname{curl}'\vec{\boldsymbol{u}}$ & $\operatorname{div}\boldsymbol{T} = \operatorname{div}'\boldsymbol{T}$

❖ ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΔΙΩΝ

❑ Θεώρημα Απόκλισης

Δ … ανοικτή, φραγμένη ή μη φραγμένη περιοχή του χώρου **E**



$\varphi(\cdot)$, $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$, $\boldsymbol{T}(\cdot)$ … συνεχή στο $\bar{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta$ & διαφορίσιμα στο Δ

Τότε:

- $\int_{\Delta} (\operatorname{grad}\varphi)\,\mathrm{d}\upsilon = \int_{\partial\Delta} (\varphi\vec{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}a$
- $\int_{\Delta} (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}\upsilon = \int_{\partial\Delta} (\vec{\boldsymbol{u}} \otimes \vec{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}a$
- $\int_{\Delta} (\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}\upsilon = \int_{\partial\Delta} (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}a$
- $\int_{\Delta} (\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}\upsilon = \int_{\partial\Delta} (\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}a$
- $\int_{\Delta} (\operatorname{div}\boldsymbol{T})\,\mathrm{d}\upsilon = \int_{\partial\Delta} (\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}a$

$\mathrm{d}\upsilon$ = διαφορικός όγκος του Δ, $\mathrm{d}a$ = διαφορική επιφάνεια του ∂Δ
$\vec{\boldsymbol{n}}$ = μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο ∂Δ

Οι παραπάνω πέντε ταυτότητες συνιστούν το "*Γενικευμένο Θεώρημα της Απόκλισης*"

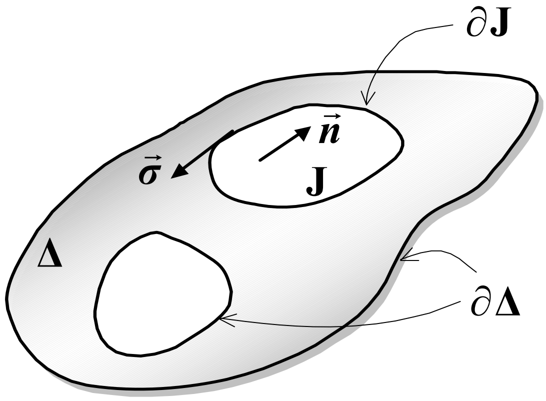
- **<u>Θεώρημα Stokes</u>**

Δ … πεπερασμένη κλειστή περιοχή του χώρου **E**.

$\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ … συνεχές & με συνεχείς $1^{\eta\varsigma}$ τάξης παραγώγους στο Δ

J … τμηματικώς λεία επιφάνεια[1] με σύνορο $\partial\mathbf{J}$ … τμηματικώς λεία[2] απλή κλειστή καμπύλη

$\overline{\mathbf{J}}\ (\equiv \mathbf{J}\cup\partial\mathbf{J}\,)\subset\overline{\Delta}\ (\equiv\Delta\cup\partial\Delta)$



$(\vec{\boldsymbol{n}},\vec{\boldsymbol{\sigma}})$ … δεξιόστροφα μοναδιαία διανύσματα

$\vec{\boldsymbol{n}}$ = μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο **J**

$\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ = μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στο $\partial\mathbf{J}$

$$\therefore\qquad \int_{\mathbf{J}}(\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}a=\oint_{\partial\mathbf{J}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{\sigma}})\,\mathrm{d}s$$

da = διαφορική επιφάνεια του **J**, ds = διαφορικό μήκος του $\partial\mathbf{J}$

- **<u>Θεώρημα</u>:** Έστω ότι το Δ είναι απλά συνεκτικό & $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ διαφορίσιμο στο Δ με $\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{o}}$. [δηλ. $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ ≡ αστρόβιλο πεδίο]. Τότε ∃ $\varphi(\cdot)$, 2 φορές διαφορίσιμο στο Δ, τέτοιο ώστε:

$$\vec{\boldsymbol{u}}=\operatorname{grad}\varphi$$

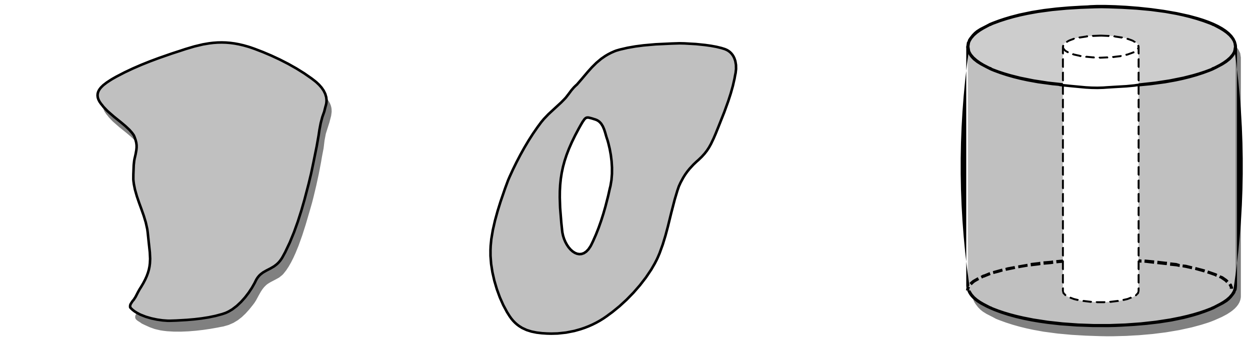
& λέμε ότι το $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ προέρχεται από το δυναμικό φ. Αντιστρόφως, αν το $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ προέρχεται από δυναμικό, τότε $\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{o}}$.

---

[1] Αν μια επιφάνεια **S** έχει μοναδική κάθετη της οποίας η διεύθυνση εξαρτάται συνεχώς από κάθε σημείο της **S**, τότε **S** ≡ **λεία επιφάνεια**. Αν η **S** μπορεί να υποδιαιρεθεί σε πεπερασμένου πλήθους λείες επιφάνειες, τότε **S** ≡ **τμηματικώς λεία επιφάνεια**. (Π.χ. επιφάν. σφαίρας → λεία επιφάν., επιφάν. κύβου → τμηματικώς λεία επιφάν.)

[2] Μια καμπύλη $\vec{\boldsymbol{r}}(s)=r_i(s)\vec{\boldsymbol{\imath}}_i$ (με $s\in[\alpha,\beta]$) ονομάζεται **λεία** εάν είναι συνεχής & με συνεχή $1^{\eta\varsigma}$ τάξης παράγωγο, η οποία είναι διάφορη του $\vec{\boldsymbol{o}}$, $\forall\ s\in[\alpha,\beta]$. Μια λεία καμπύλη έχει σε κάθε σημείο της μια μοναδική εφαπτόμενη. Αν η $\vec{\boldsymbol{r}}(s)$ μπορεί να υποδιαιρεθεί σε πεπερασμένου πλήθους λείες καμπύλες, τότε $\vec{\boldsymbol{r}}(s)$ ≡ **τμηματικώς λεία καμπύλη**.

<u>Σημείωση 1</u>: Ένα σύνολο $\mathbf{\Delta} \subset \mathbf{E}$ ονομάζεται απλά συνεκτικό αν κάθε κλειστή καμπύλη που ανήκει στο $\mathbf{\Delta}$ περιορίζει ένα φραγμένο τμήμα που βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στο $\mathbf{\Delta}$. Άρα, ένα απλά συνεκτικό σύνολο δεν μπορεί να περιέχει οπές που το διαπερνούν. Π.χ.



απλά συνεκτικό 2D — όχι απλά συνεκτικό 2D — όχι απλά συνεκτικό 3D

<u>Σημείωση 2</u>: Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ ονομάζεται ***συντηρητικό*** αν & μόνο αν είναι η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου.

<u>Σημείωση 3</u>: Αν $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ ένα συντηρητικό διανυσματικό πεδίο, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{\boldsymbol{u}}$ κατά μήκος μιας λείας καμπύλης η οποία συνδέει δυο σημεία είναι ανεξάρτητο της καμπύλης που ενώνει αυτά τα σημεία. Επιπλέον το θεώρημα Stokes δίνει:

$$\oint_{\partial \mathbf{J}} \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = 0$$

μιας και το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\vec{\boldsymbol{r}}(s) = r_i(s)\vec{\boldsymbol{i}}_i$ που ορίζει το $\partial\mathbf{J}$ δίνεται από τη σχέση $\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \partial\vec{\boldsymbol{r}} / \partial s$

- **<u>Θεώρημα</u>:** Έστω ότι το Δ είναι φραγμένο από μια ***μοναδική*** επιφάνεια & $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ διαφορίσιμο στο Δ με $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}} = 0$ [δηλ. $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot) \equiv$ σωληνοειδές πεδίο]. Τότε $\exists\ \vec{\boldsymbol{w}}(\cdot)$ διαφορίσιμο στο Δ, τέτοιο ώστε:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{w}}$$

❑ **Θεώρημα αναπαράστασης του Helmholtz**

Κάθε συνεχώς διαφορίσιμο $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ επιδέχεται την αναπαράσταση:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{w}}$$

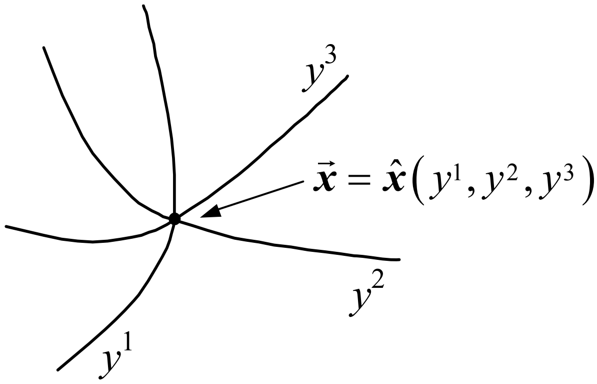
όπου: $\varphi(\cdot)$ είναι ένα C^2 (δηλ. 2 φορές διαφορίσιμο) βαθμωτό πεδίο & $\vec{\boldsymbol{w}}(\cdot)$ είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο. Δηλ. το $\vec{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα ενός αστρόβιλου & ενός σωληνοειδούς πεδίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

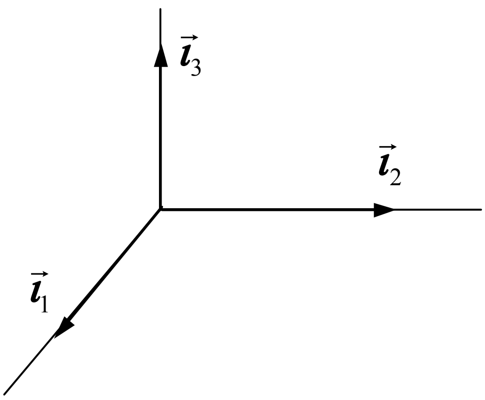
Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία των σημείων του **E** σε ένα τριπαραμετρικό σύνολο αριθμών

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(y^i) = \hat{\boldsymbol{x}}(y^1, y^2, y^3)$$

$$\therefore \quad y^i = \hat{y}^i(\vec{\boldsymbol{x}})$$



Π.χ. για καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

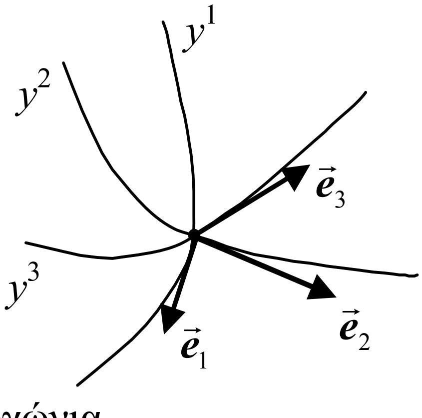


$$\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{o}} + x_i \vec{\boldsymbol{\imath}}_i = \hat{\boldsymbol{x}}(x_i)$$

$$(y^i \to x_i) \quad \Rightarrow x_i = \left(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}_i$$

❖ Διανύσματα Βάσης Συντεταγμένων στο $\vec{\boldsymbol{x}}$

Ορισμός: $\vec{\boldsymbol{e}}_i(\vec{\boldsymbol{x}}) \equiv \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial y^i}$



Γενικά τα $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ δεν είναι μοναδιαία ή ορθογώνια

❖ Διανύσματα Δυαδικής Βάσης

Παρατηρούμε ότι: $\dfrac{\partial y^i}{\partial y^j} = \delta^i_j = \dfrac{\partial y^i}{\partial \vec{x}} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial y^j}}_{\vec{e}_j} = (\,\mathrm{grad}\,\hat{y}^i\,) \cdot \vec{e}_j$

Ορισμός δυαδικής βάσης: $\vec{e}^{\,i}(\vec{x}) \equiv \mathrm{grad}\,\hat{y}^i \quad \Rightarrow \quad \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j$

<u>Παράδειγμα</u>: Ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\vec{e}_i(\vec{x}) \to \vec{i}_i \qquad \& \qquad \vec{e}^{\,i}(\vec{x}) \to \vec{i}_i \quad \text{(δηλ. ανεξάρτητα του } \vec{x}\text{)}$$

- ❑ *Συναλλοίωτος μετρικός τανυστής:* $\boxed{g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}$

- ❑ *Ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής:* $\boxed{g^{ij} = \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}^{\,j}}$

❖ **Πρόταση:** κάθε διάνυσμα $\vec{u}(\vec{x})$ μπορεί να παρασταθεί είτε ως προς τη βάση $\{\vec{e}_i(\vec{x})\}$ ή ως προς τη δυαδική $\{\vec{e}^{\,i}(\vec{x})\}$, δηλ. $\boxed{\vec{u} = u_i \vec{e}^{\,i} = u^i \vec{e}_i}$

$\vec{u} \cdot \vec{e}_i = u_m \vec{e}^{\,m} \cdot \vec{e}_i = u_m \delta^m_i = u_i \ \equiv$ συναλλοίωτες συνιστώσες

$\vec{u} \cdot \vec{e}^{\,i} = u^m \vec{e}_m \cdot \vec{e}^{\,i} = u^m \delta^i_m = u^i \ \equiv$ ανταλλοίωτες συνιστώσες

❑ <u>Παράδειγμα</u>

Για ένα βαθμωτό πεδίο είναι δυνατόν να θεωρηθεί:

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi\big(\hat{\vec{x}}(y^i)\big) = \overline{\varphi}(y^i)$$

και

$$\mathrm{grad}\,\varphi = (\,\mathrm{grad}\,\varphi)_i\, \vec{e}^{\,i} = (\,\mathrm{grad}\,\varphi)^i\, \vec{e}_i$$

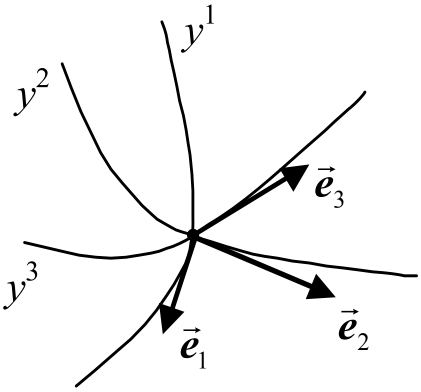
$$\Rightarrow \ \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} = (\mathrm{grad}\,\varphi) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^i} = (\mathrm{grad}\,\varphi) \cdot \vec{e}_i = (\mathrm{grad}\,\varphi)_m \vec{e}^{\,m} \cdot \vec{e}_i = (\mathrm{grad}\,\varphi)_i$$

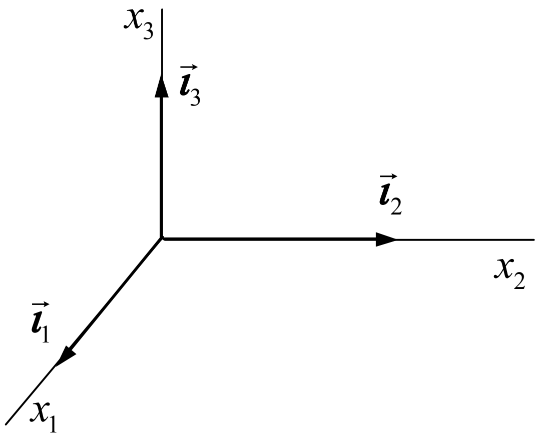
… συναλλοίωτες συνιστώσες του $(\mathrm{grad}\varphi)$

Π.χ. για ο*ρθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες:*

$$(\text{grad}\,\varphi) = (\text{grad}\,\varphi)_i \vec{\boldsymbol{\iota}}_i \quad \longrightarrow \quad (\text{grad}\,\varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \equiv \varphi,_i$$

❖ Υπολογισμός Διανυσμάτων Βάσης (Σχέση $\{\vec{e}_i(\vec{x})\}$, $\{\vec{e}^{\,i}(\vec{x})\}$ με $\{\vec{\iota}_i\}$)





$$\vec{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(y^m) \quad \rightarrow \quad x_i = \hat{x}_i(y^m)\ , \qquad y^i = \hat{y}^i(x_m)$$

Οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\vec{\boldsymbol{e}}_i \equiv \frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial y^i} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial y^i} = \vec{\boldsymbol{\iota}}_m \frac{\partial x_m}{\partial y^i}, \qquad \vec{\boldsymbol{e}}^i = \text{grad}\, y^i = \vec{\boldsymbol{\iota}}_m \frac{\partial y^i}{\partial x_m}$$

και αντίστροφα: $$\vec{\boldsymbol{\iota}}_m = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial x_m} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x_m} = \vec{\boldsymbol{e}}_i \frac{\partial y^i}{\partial x_m},$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^i = \vec{\boldsymbol{\iota}}_m \frac{\partial y^i}{\partial x_m} \Rightarrow \frac{\partial x_k}{\partial y^i}\vec{\boldsymbol{e}}^i = \frac{\partial x_k}{\partial y^i}\vec{\boldsymbol{\iota}}_m \frac{\partial y^i}{\partial x_m} \Rightarrow \frac{\partial x_k}{\partial y^i}\vec{\boldsymbol{e}}^i = \vec{\boldsymbol{\iota}}_m \delta_{km} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{\iota}}_k = \frac{\partial x_k}{\partial y^i}\vec{\boldsymbol{e}}^i$$

Συνοπτικά:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{e}_i = \frac{\partial x_m}{\partial y^i}\vec{\imath}_m, \qquad \vec{e}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x_m}\vec{\imath}_m \\ &\vec{\imath}_m = \frac{\partial y^i}{\partial x_m}\vec{e}_i = \frac{\partial x_m}{\partial y^i}\vec{e}^i \end{aligned}}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\vec{e}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x_m}\vec{\imath}_m \Rightarrow \vec{e}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x_m}\frac{\partial y^j}{\partial x_m}\vec{e}_j \Rightarrow \vec{e}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x_m}\frac{\partial y^j}{\partial x_k}\delta_{km}\vec{e}_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{e}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x_m}\frac{\partial y^j}{\partial x_k}\left(\vec{\imath}_m \cdot \vec{\imath}_k\right)\vec{e}_j \Rightarrow \vec{e}^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x_m}\vec{\imath}_m \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x_k}\vec{\imath}_k\right)\vec{e}_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{e}^i = \left(\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j\right)\vec{e}_j \Rightarrow \boxed{\vec{e}^i = g^{ij}\vec{e}_j}$$

και

$$\vec{e}_i = \frac{\partial x_m}{\partial y^i}\vec{\imath}_m \Rightarrow \vec{e}_i = \frac{\partial x_m}{\partial y^i}\frac{\partial x_m}{\partial y^j}\vec{e}^j \Rightarrow \vec{e}_i = \frac{\partial x_m}{\partial y^i}\frac{\partial x_k}{\partial y^j}\delta_{km}\vec{e}^j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{e}_i = \frac{\partial x_m}{\partial y^i}\frac{\partial x_k}{\partial y^j}\left(\vec{\imath}_m \cdot \vec{\imath}_k\right)\vec{e}^j \Rightarrow \vec{e}_i = \left(\frac{\partial x_m}{\partial y^i}\vec{\imath}_m \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y^j}\vec{\imath}_k\right)\vec{e}^j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{e}_i = \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right)\vec{e}^j \Rightarrow \boxed{\vec{e}_i = g_{ij}\vec{e}^j}$$

Παρατηρήσεις

- $g_{ik}g^{kj} = g_{ik}\vec{e}^k \cdot \vec{e}^j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$
- $u_i = g_{ij}u^j, \quad u^i = g^{ij}u_j$

❖ **Ορθογώνιο Σύστημα Συντεταγμένων:** $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \quad \text{για} \;\; i \neq j$

$\Rightarrow \vec{e}_i \perp \vec{e}_j$, για $i \neq j$

επίσης: $\Rightarrow \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = 0$ δηλ. $\vec{e}^i \perp \vec{e}^j$, για $i \neq j$

$\Rightarrow g_{ij} = g^{ij} = 0$, για $i \neq j$ (δηλ. τανυστές $[g_{ij}]$ & $[g^{ij}]$ $\rightarrow$ διαγώνιοι)

Επιπλέον: $g^{11} = 1/g_{11}, \quad g^{22} = 1/g_{22}, \quad g^{33} = 1/g_{33}$

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j \Rightarrow \underbrace{\vec{e}^i \cdot \vec{e}_i}_{\text{όχι άθροισμ.}} = 1 \Rightarrow \underbrace{\left|\vec{e}^i\right|\left|\vec{e}_i\right|}_{\text{όχι άθροισμ.}} = 1 \Rightarrow \left|\vec{e}_i\right| = \frac{1}{\left|\vec{e}^i\right|}$$

❖ **Καμπυλόγραμμη Ορθοκανονική Βάση:**

$$\vec{e}_{<i>} = \frac{\vec{e}_i}{\left|\vec{e}_i\right|} = \frac{\vec{e}^i}{\left|\vec{e}^i\right|} \qquad \text{(όπου το } i \text{ \underline{δεν} υποδηλώνει άθροισμα)}$$

<u>Απόδειξη της ισότητας</u> $\dfrac{\vec{e}_i}{\left|\vec{e}_i\right|} = \dfrac{\vec{e}^i}{\left|\vec{e}^i\right|}$ (για $\{\vec{e}_i\}$ ορθογώνια):

$$\frac{\vec{e}_i}{\left|\vec{e}_i\right|} = \frac{g_{ij}\vec{e}^j}{\left|\vec{e}_i\right|} = \frac{g_{ii}\vec{e}^i}{\left|\vec{e}_i\right|} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i)\frac{\vec{e}^i}{\left|\vec{e}_i\right|} = \left|\vec{e}_i\right|^2 \frac{\vec{e}^i}{\left|\vec{e}_i\right|} = \left|\vec{e}_i\right|\vec{e}^i = \frac{\vec{e}^i}{\left|\vec{e}^i\right|}$$

όπου το i <u>δεν</u> υποδηλώνει άθροισμα

Κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ μπορεί να γραφεί ως: $\vec{u} = u_{<i>}\vec{e}_{<i>}$

όπου $u_{<i>} = \vec{u} \cdot \vec{e}_{<i>} \equiv$ ***φυσικές συντεταγμένες του*** $\vec{u}$

$$\Rightarrow u_{<i>} = u^m \vec{e}_m \cdot \vec{e}_{<i>} = u^m \vec{e}_m \cdot \frac{\vec{e}^i}{\left|\vec{e}^i\right|} = u^m \delta^i_m \frac{1}{\left|\vec{e}^i\right|} = \frac{u^i}{\left|\vec{e}^i\right|} = u^i \left|\vec{e}_i\right|$$

(όχι άθροισμα στο i)

Ομοίως: $$u_{<i>} = \frac{u_i}{|\vec{e}_i|} = u_i |\vec{e}^i| \qquad \text{(όχι άθροισμα στο } i\text{)}$$

Π.χ.: $$(\operatorname{grad}\varphi)_{<i>} = \frac{(\operatorname{grad}\varphi)_i}{|\vec{e}_i|} = \frac{1}{|\vec{e}_i|}\frac{\partial\varphi}{\partial y^i} \qquad \text{(όχι άθροισμα στο } i\text{)}$$

❑ **<u>Παράδειγμα:</u>** ***Κυλινδρικές συντεταγμένες*:** $\{(y^1, y^2, y^3) = (r, \theta, z)\}$

$$x_1 = r\cos\theta, \qquad x_2 = r\sin\theta, \qquad x_3 = z$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial x_m}{\partial y^1}\vec{\imath}_m = \frac{\partial x_m}{\partial r}\vec{\imath}_m = (\cos\theta)\vec{\imath}_1 + (\sin\theta)\vec{\imath}_2$$

$$\vec{e}_2 = \quad \cdots \quad = -(r\sin\theta)\vec{\imath}_1 + (r\cos\theta)\vec{\imath}_2$$

$$\vec{e}_3 = \vec{\imath}_3$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

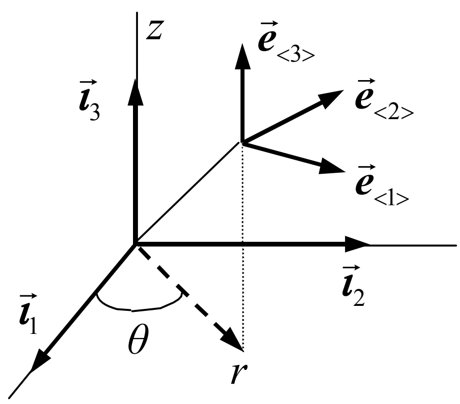
- $|\vec{e}_1| = 1 \qquad |\vec{e}_2| = r \qquad |\vec{e}_3| = 1$
- $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$, για $i \neq j$ (δηλ. ορθογώνιο σύστημα)

Άρα, ***καμπυλόγραμμη ορθοκανονική βάση***:

$$\vec{e}_{<1>} = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_{<2>} = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = \frac{1}{r}\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_{<3>} = \frac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|} = \vec{e}_3 = \vec{\imath}_3$$



Π.χ.: $$(\text{grad}\,\varphi)_{<i>} = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{e}}_i|}\frac{\partial\varphi}{\partial y^i} \Rightarrow \begin{cases} (\text{grad}\,\varphi)_{<1>} = \dfrac{\partial\varphi/\partial y^1}{|\vec{\boldsymbol{e}}_1|} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \\ (\text{grad}\,\varphi)_{<2>} = \dfrac{\partial\varphi/\partial y^2}{|\vec{\boldsymbol{e}}_2|} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} \\ (\text{grad}\,\varphi)_{<3>} = \dfrac{\partial\varphi/\partial y^3}{|\vec{\boldsymbol{e}}_3|} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases}$$

… φυσικές συνιστώσες του $\text{grad}\,\varphi$ σε ένα κυλινδρικό σύστημα

❖ Καμπυλόγραμμες Συνιστώσες Τανυστή

Κάθε τανυστής $\boldsymbol{T}$ μπορεί να παρασταθεί με όρους της βάσης $\{\vec{\boldsymbol{e}}_i\}$, ή της βάσης $\{\vec{\boldsymbol{e}}^i\}$, δηλ.

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}\vec{\boldsymbol{e}}^i \otimes \vec{\boldsymbol{e}}^j = T^{ij}\vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_j = T_i^{\ j}\vec{\boldsymbol{e}}^i \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_j = T^i_{\ j}\vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{e}}^j$$

$T_{ij} = \vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_j$ $\equiv$ συναλλοίωτες συνιστώσες

$T^{ij} = \vec{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}^j$ $\equiv$ ανταλλοίωτες συνιστώσες

$$\left.\begin{aligned} T^i_{\ j} &= \vec{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_j \\ T_i^{\ j} &= \vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}^j \end{aligned}\right\} \equiv \text{μικτές συνιστώσες}$$

❑ <u>Παράδειγμα:</u> $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{1}$ (δηλ. ο μοναδιαίος τανυστής)

$\boldsymbol{1}_{ij} = \vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{1}\vec{\boldsymbol{e}}_j = \vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_j = g_{ij}$ $\equiv$ συναλλοίωτες συνιστώσες

$\boldsymbol{1}^{ij} = \vec{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{1}\vec{\boldsymbol{e}}^j = \vec{\boldsymbol{e}}^i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^j = g^{ij}$ $\equiv$ ανταλλοίωτες συνιστώσες

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{1}^i_{\ j} &= \vec{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{1}\vec{\boldsymbol{e}}_j = \vec{\boldsymbol{e}}^i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_j = \delta^i_j \\ \boldsymbol{1}_i^{\ j} &= \vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{1}\vec{\boldsymbol{e}}^j = \vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^j = \delta_i^j \end{aligned}\right\} \equiv \text{μικτές συνιστώσες}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- $T^{ij} = g^{im}g^{jn}T_{mn} = g^{jn}T^i_{\ n} = g^{im}T_m^{\ j}$
- $T_{ij} = g_{im}g_{jn}T^{mn} = g_{im}T^m_{\ j} = g_{jn}T_i^{\ n}$

❖ Φυσικές Συνιστώσες Τανυστή:

$$\boldsymbol{T} = T_{<ij>}\vec{\boldsymbol{e}}^{<i>} \otimes \vec{\boldsymbol{e}}^{<j>} = T^{<ij>}\vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_{<j>} = T_{<i>}{}^{<j>}\vec{\boldsymbol{e}}^{<i>} \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_{<j>} = T^{<i>}{}_{<j>}\vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \otimes \vec{\boldsymbol{e}}^{<j>}$$

όπου: $\vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{e}}_i}{|\vec{\boldsymbol{e}}_i|}, \quad \vec{\boldsymbol{e}}^{<i>} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{e}}^i}{|\vec{\boldsymbol{e}}^i|}$

$$T_{<ij>} = \vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_{<j>} \quad \equiv \text{συναλλοίωτες συνιστώσες}$$

$$T^{<ij>} = \vec{\boldsymbol{e}}^{<i>} \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}^{<j>} \quad \equiv \text{ανταλλοίωτες συνιστώσες}$$

$$\left.\begin{aligned} T^{<i>}{}_{<j>} &= \vec{\boldsymbol{e}}^{<i>} \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_{<j>} \\ T_{<i>}{}^{<j>} &= \vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}^{<j>} \end{aligned}\right\} \equiv \text{μικτές συνιστώσες}$$

❑ **Για ορθογώνιες βάσεις $\{\vec{e}_i\}$ & $\{\vec{e}^{\,i}\} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} = \vec{\boldsymbol{e}}^{<i>}$**

$$\Rightarrow \quad T_{<ij>} = T^{<ij>} = T^{<i>}{}_{<j>} = T_{<i>}{}^{<j>}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{T} = T_{<ij>}\vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_{<j>}, \qquad T_{<ij>} = \vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_{<j>}$$

$$T_{<ij>} = \vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_{<j>} = \frac{\vec{\boldsymbol{e}}^i}{|\vec{\boldsymbol{e}}^i|} \cdot \boldsymbol{T}\frac{\vec{\boldsymbol{e}}^j}{|\vec{\boldsymbol{e}}^j|} = \frac{T^{ij}}{|\vec{\boldsymbol{e}}^i||\vec{\boldsymbol{e}}^j|} = T^{ij}|\vec{\boldsymbol{e}}_i||\vec{\boldsymbol{e}}_j| \quad \text{(όχι άθροισμα)}$$

$$T_{<ij>} = \vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_{<j>} = \frac{\vec{\boldsymbol{e}}_i}{|\vec{\boldsymbol{e}}_i|} \cdot \boldsymbol{T}\frac{\vec{\boldsymbol{e}}_j}{|\vec{\boldsymbol{e}}_j|} = \frac{T_{ij}}{|\vec{\boldsymbol{e}}_i||\vec{\boldsymbol{e}}_j|} = T_{ij}|\vec{\boldsymbol{e}}^i||\vec{\boldsymbol{e}}^j| \quad \text{(όχι άθροισμα)}$$

$$T_{<ij>} = \vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_{<j>} = \frac{\vec{\boldsymbol{e}}^i}{|\vec{\boldsymbol{e}}^i|} \cdot \boldsymbol{T}\frac{\vec{\boldsymbol{e}}_j}{|\vec{\boldsymbol{e}}_j|} = \frac{T^i_j}{|\vec{\boldsymbol{e}}^i||\vec{\boldsymbol{e}}_j|} = T^i_j|\vec{\boldsymbol{e}}_i||\vec{\boldsymbol{e}}^j| \quad \text{(όχι άθροισμα)}$$

$$T_{<ij>} = \vec{\boldsymbol{e}}_{<i>} \cdot \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{e}}_{<j>} = \frac{\vec{\boldsymbol{e}}_i}{|\vec{\boldsymbol{e}}_i|} \cdot \boldsymbol{T}\frac{\vec{\boldsymbol{e}}^j}{|\vec{\boldsymbol{e}}^j|} = \frac{T_i^j}{|\vec{\boldsymbol{e}}_i||\vec{\boldsymbol{e}}^j|} = T_i^j|\vec{\boldsymbol{e}}^i||\vec{\boldsymbol{e}}_j| \quad \text{(όχι άθροισμα)}$$

❖ Συναλλοίωτη Παραγώγιση

Επειδή $\vec{\boldsymbol{e}}_i = \dfrac{\partial x_m}{\partial y^i}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{e}}_i = \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial y^i}$, η παράγωγος του $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ ως προς y^j γράφεται ως

$$\vec{\boldsymbol{e}}_i,_j \equiv \frac{\partial \vec{\boldsymbol{e}}_i}{\partial y^j} = \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial y^j \partial y^i} = \vec{\boldsymbol{x}},_{ji} = \vec{\boldsymbol{x}},_{ij} \quad (\text{δηλ. } \vec{\boldsymbol{e}}_i,_j = \vec{\boldsymbol{e}}_j,_i)$$

ή ισοδύναμα:

$$\vec{\boldsymbol{e}}_i,_j = \frac{\partial^2 x_m}{\partial y^i \partial y^j}\vec{\boldsymbol{\imath}}_m = \underbrace{\frac{\partial^2 x_m}{\partial y^i \partial y^j}\left(\frac{\partial x_m}{\partial y^k}\right.}_{\Gamma_{ijk}}\left.\vec{\boldsymbol{e}}^k\right) = \underbrace{\frac{\partial^2 x_m}{\partial y^i \partial y^j}\frac{\partial x_m}{\partial y^k} g^{kn}}_{\substack{\Gamma^n_{ij} \\ \| \\ \Gamma_{ijk} g^{kn}}} \vec{\boldsymbol{e}}_n$$

$$\therefore \qquad \boxed{\vec{\boldsymbol{e}}_i,_j = \Gamma_{ijk}\vec{\boldsymbol{e}}^k = \Gamma^n_{ij}\vec{\boldsymbol{e}}_n} \qquad (1)$$

όπου: $\begin{cases} \Gamma_{ijk} & \equiv \text{σύμβολο Christoffel του } 1^{\text{ου}} \text{ είδους} \\ \Gamma^n_{ij} & \equiv \text{σύμβολο Christoffel του } 2^{\text{ου}} \text{ είδους} \end{cases}$

τα οποία συσχετίζονται ως: $\Gamma^n_{ij} = g^{nk}\Gamma_{ijk}$ & $\Gamma_{ijk} = g_{nk}\Gamma^n_{ij}$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (1) μπορεί να δείξει κανείς ότι

$$g_{ij},_k \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$$

Αντίστοιχα, επειδή $\vec{\boldsymbol{e}}^i = g^{ik}\vec{\boldsymbol{e}}_k$, η παράγωγος του $\vec{\boldsymbol{e}}^i$ ως προς y^j γράφεται ως

$$\vec{\boldsymbol{e}}^i,_j \equiv \frac{\partial \vec{\boldsymbol{e}}^i}{\partial y^j} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial y^j}\vec{\boldsymbol{e}}_k + g^{ik}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{e}}_k}{\partial y^j} = g^{ik},_j \vec{\boldsymbol{e}}_k + g^{ik}\vec{\boldsymbol{e}}_k,_j$$

όπου ο 2ος όρος στο δεξί μέλος υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την (1), ενώ το $g^{ik},_j$ στον 1ον όρο υπολογίζεται ως εξής:

$$g_{mk}g^{ik} = \delta_m^i \Rightarrow g_{mk,j}g^{ik} + g_{mk}g^{ik},_j = 0 \Rightarrow g_{mk}g^{ik},_j = -g_{mk,j}g^{ik} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{g^{nm}g_{mk}}_{\delta_k^n} g^{ik},_j = -g^{nm}g_{mk,j}g^{ik} \Rightarrow g^{in},_j = -g^{nm}g^{ik}g_{mk,j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{in},_j = -g^{nm}g^{ik}(\Gamma_{mjk} + \Gamma_{kjm}) = -(g^{nm}\Gamma_{mj}^i + g^{ik}\Gamma_{kj}^n)$$

Οπότε: $\boldsymbol{e}^i,_j = -(g^{km}\Gamma_{mj}^i + g^{is}\Gamma_{sj}^k)\boldsymbol{e}_k + g^{ik}\Gamma_{kj}^n\boldsymbol{e}_n \Rightarrow \boldsymbol{e}^i,_j = -g^{km}\Gamma_{mj}^i\boldsymbol{e}_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{e}}^i,_j = -\Gamma_{mj}^i\vec{\boldsymbol{e}}^m}$$

<u>*Παρατηρήσεις*</u>:

- $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} = \vec{\boldsymbol{e}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{i,j} = \vec{\boldsymbol{e}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{j,i}$
- $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = \vec{\boldsymbol{e}}^k \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{i,j} = \vec{\boldsymbol{e}}^k \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{j,i} = -\vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^k,_j$
- Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων: $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (i \neq j \neq k \neq i)$

❑ Παραγώγιση του διανύσματος $\vec{\boldsymbol{u}} = u_i\vec{\boldsymbol{e}}^i = u^i\vec{\boldsymbol{e}}_i$

$$\vec{\boldsymbol{u}},_k \equiv \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial y^k} = \begin{cases} u_{i,k}\vec{\boldsymbol{e}}^i + u_i\vec{\boldsymbol{e}}^i,_k = u_{m,k}\vec{\boldsymbol{e}}^m - u_i\Gamma_{mk}^i\vec{\boldsymbol{e}}^m = \underbrace{(u_{m,k} - u_i\Gamma_{mk}^i)}_{u_m|_k}\vec{\boldsymbol{e}}^m \\ u^i,_k\,\vec{\boldsymbol{e}}_i + u^i\vec{\boldsymbol{e}}_{i,k} = u^m,_k\,\vec{\boldsymbol{e}}_m + u^i\Gamma_{ik}^m\vec{\boldsymbol{e}}_m = \underbrace{(u^m,_k + u^i\Gamma_{ik}^m)}_{u^m|_k}\vec{\boldsymbol{e}}_m \end{cases}$$

δηλ. $\boxed{\vec{\boldsymbol{u}},_k = u_m\big|_k\,\vec{\boldsymbol{e}}^m = u^m\big|_k\,\vec{\boldsymbol{e}}_m}$

όπου $u_m\big|_k$ & $u^m\big|_k$ … συναλλοίωτες παράγωγοι των συνιστωσών u_m & u^m, αντίστοιχα

Παράδειγμα
Για ένα διανυσματικό πεδίο είναι δυνατόν να θεωρηθεί:

$$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{u}}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(y^i)\big) = \bar{\boldsymbol{u}}(y^i)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial y^i} = (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})\frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial y^i} = (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})\vec{\boldsymbol{e}}_i$$

η οποία, επειδή $\vec{\boldsymbol{u}} = u^m \vec{\boldsymbol{e}}_m$, δίνει

$$\frac{\partial u_m}{\partial y^i}\vec{\boldsymbol{e}}^m + u_m \frac{\partial \vec{\boldsymbol{e}}^m}{\partial y^i} = (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})\vec{\boldsymbol{e}}_i$$

και οι συναλλοίωτες συνιστώσες του $(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})$ λαμβάνονται ως:

$$(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})_{ij} = \vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})\vec{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial u_m}{\partial y^j}\underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}^m \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i}_{\delta_i^m} + u_m \underbrace{\frac{\partial \vec{\boldsymbol{e}}^m}{\partial y^j}\cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i}_{-\Gamma_{ij}^m} = \frac{\partial u_i}{\partial y^j} - u_m \Gamma_{ij}^m$$

Σημείωση
Αντίστοιχα με το διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{u}}$, μπορούν να βρεθούν συναλλοίωτες παράγωγοι των συνιστωσών T_{ij}, T^{ij}, $T^i{}_j$ & $T_i{}^j$ ενός τανυστή $\boldsymbol{T}$ ως

$$\left.\begin{aligned}
T_{ij}\big|_k &= T_{ij,k} - \Gamma_{ik}^m T_{mj} - \Gamma_{jk}^m T_{im} \\
T^{ij}\big|_k &= T^{ij}{}_{,k} + \Gamma_{km}^i T^{mj} + \Gamma_{km}^j T^{im} \\
T^i{}_j\big|_k &= T^i{}_{j,k} + \Gamma_{km}^i T^m{}_j - \Gamma_{jk}^m T^i{}_m \\
T_i{}^j\big|_k &= T_i{}^j{}_{,k} - \Gamma_{ik}^m T_m{}^j + \Gamma_{km}^j T_i{}^m
\end{aligned}\right\}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι οι συναλλοίωτες παράγωγοι του μετρικού τανυστή είναι ίσες με μηδέν, δηλ.

$$g_{ij}\big|_k = g^{ij}\big|_k = \underbrace{g^i{}_j\big|_k}_{\delta_j^i|_k} = \underbrace{g_i{}^j\big|_k}_{\delta_i^j|_k} = 0$$

ΜΕΡΟΣ III

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΚΙΝΗΣΗ / ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

❖ Βασικές Έννοιες Περιγραφής του Συνεχούς Μέσου

❑ Φυσικός (Ευκλείδειος) χώρος → Ευκλείδεια ***γεωμετρία***

❑ ***Χρόνος*** (σχετικός χρόνος)

⇒ Αυτομάτως μπορούν να οριστούν οι έννοιες:

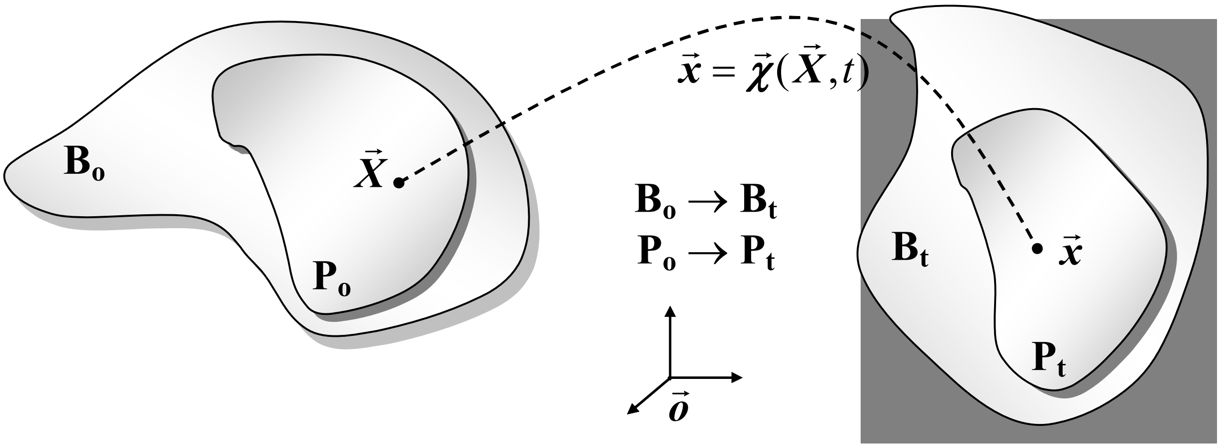
❑ ***Σχήμα*** (μορφή) ❑ ***Μεταβολή*** (ρυθμός)

⇒ έννοιες της **κινηματικής** που προκύπτουν ως μαθηματικές συνέπειες του σχήματος & της μεταβολής:

❑ ***Κίνηση*** ❑ ***Παραμόρφωση***

❑ ***Ταχύτητα*** ❑ ***Επιτάχυνση***

Αρχική διαμόρφωση ($t = 0$) Τρέχουσα διαμόρφωση ($t = t$)



$\vec{X}$ = διάνυσμα θέσης που χαρακτηρίζει οποιοδήποτε σημείο του Σ.Μ. τη χρονική στιγμή $t = 0$ (Στην πραγματικότητα το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{X} - \vec{o}$, όπου $\vec{o}$ είναι ένα σταθερό σημείο)

$\vec{x}$ = διάνυσμα θέσης που χαρακτηρίζει το ίδιο σημείο του σώματος την χρονική στιγμή $t = t$

Κίνηση : “1-1” & “επί” απεικόνιση $\mathbf{B_o} \rightarrow \mathbf{B_t}$, η οποία συμβολίζεται ως $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$, με $\vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},0) = \vec{\boldsymbol{X}}$ & $\vec{\boldsymbol{x}} \in C^1$

Άρα: $\exists\ \vec{\boldsymbol{\chi}}^{-1}$: $\mathbf{B_t} \rightarrow \mathbf{B_o}$, με $\vec{\boldsymbol{\chi}}^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}},t) = \vec{\boldsymbol{X}}$

Ταχύτητα : $$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)}{\partial t} \equiv \dot{\vec{\boldsymbol{x}}}$$

Επιτάχυνση : $$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)}{\partial t^2} \equiv \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} \equiv \ddot{\vec{\boldsymbol{x}}}$$

Μετατόπιση : $$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t) - \vec{\boldsymbol{X}}$$

Κλίση παραμόρφωσης : $$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}}$$ (τανυστής $2^{ης}$ τάξης)

$$= \mathrm{GRAD}\, \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = \nabla \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$$

όπου: $\nabla \equiv \mathrm{GRAD} \equiv \dfrac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} \equiv$ κλίση ως προς $\vec{\boldsymbol{X}}$

$\mathrm{grad} \equiv \dfrac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} \equiv$ κλίση ως προς $\vec{\boldsymbol{x}}$

- ***Γραφή με δείκτες*:**

$$x_i = \chi_i\left(X_j,t\right), \quad v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad a_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}, \quad u_i = x_i - X_i, \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

❖ Lagrangean (Υλική) & Eulerian (Χωρική) Παρατήρηση

Έστω ένα βαθμωτό πεδίο φ που παριστάνει ένα φυσικό μέγεθος (π.χ. θερμοκρασία, πυκνότητα, κλπ)

- Περιγραφή κατά Lagrange (Π.L.) του φ: $\varphi = \hat{\varphi}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$
- Περιγραφή κατά Euler (Π.Ε.) του φ: $\varphi = \varphi(\vec{\boldsymbol{x}},t)$

$$\therefore \qquad \varphi = \varphi(\vec{\boldsymbol{x}},t) = \varphi(\vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t) = \hat{\varphi}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$$

Παραγωγίζοντας ως προς t προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}(\vec{\boldsymbol{X}},t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\vec{\boldsymbol{x}},t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\vec{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\varphi}(\vec{\boldsymbol{X}},t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\vec{\boldsymbol{x}},t)}{\partial t} + [\operatorname{grad} \vec{\varphi}(\vec{\boldsymbol{x}},t)] \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$$

- Υλική ή ολική χρονική παράγωγος (ολική χρονική μεταβολή ή ρυθμός μεταβολής της ιδιότητας φ ενός υλικού σημείου $\vec{\boldsymbol{X}}$):

$$\dot{\varphi} = \frac{D\varphi}{Dt} \equiv \left.\frac{\partial \hat{\varphi}(\vec{\boldsymbol{X}},t)}{\partial t}\right|_{\vec{X}=\text{δεδομένο}} \qquad \text{... (Lagrangean) χρονική παράγωγος}$$

- Τοπική χρονική παράγωγος (ρυθμός μεταβολής της ιδιότητας φ σε ένα σημείο $\vec{\boldsymbol{x}}$ του χώρου):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left.\frac{\partial \varphi(\vec{\boldsymbol{x}},t)}{\partial t}\right|_{\vec{x}=\text{δεδομένο}} \qquad \text{... (Eulerian) χρονική παράγωγος}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\operatorname{grad} \varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}$$

Ομοίως, μπορεί να δειχθεί ότι μια εξίσωση της παραπάνω μορφής ισχύει και για διανυσματικά & τανυστικά πεδία οποιουδήποτε βαθμού.

<u>Παραδείγματα</u>

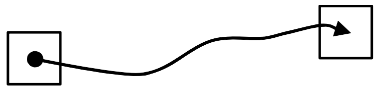
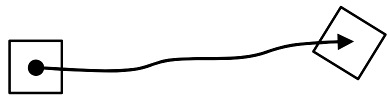
$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\operatorname{grad} \theta) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}, \quad \left\{ \dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta,_i \, v_i \right\} \qquad \dots\ \theta = \text{θερμοκρασία}$$

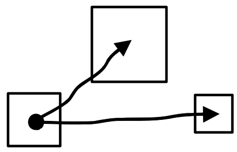
$$\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \vec{\boldsymbol{v}}) \vec{\boldsymbol{v}}, \quad \left\{ \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,m} v_m \right\} \qquad \dots\ \vec{\boldsymbol{v}} = \text{διάνυσμα ταχύτητας}$$

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{T}) \vec{\boldsymbol{v}}, \quad \left\{ \dot{T}_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + T_{ij,m} v_m \right\} \qquad \dots\ \boldsymbol{T} = \text{τανυστής τάσης}$$

❖ Τύποι Κίνησης του Συνεχούς Μέσου

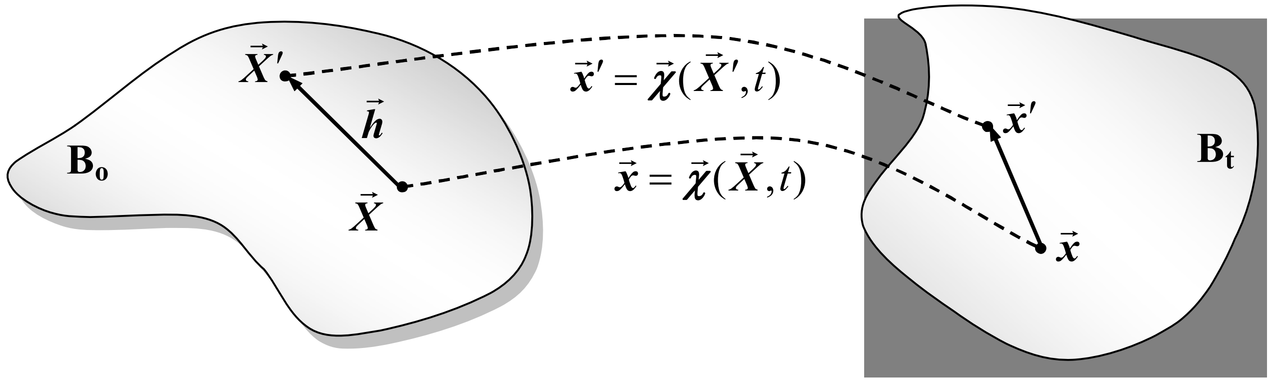
Η κίνηση οποιουδήποτε στοιχειώδους τμήματος του Σ.Μ. μπορεί να περιγραφεί με κατάλληλη υπέρθεση των παρακάτω τύπων κίνησης:

1. Κίνηση συμπαγούς σώματος:
- Μεταφορά: 
- Περιστροφή: 

2. Παραμόρφωση:
- Εκτατικότητα (ογκομετρική διαστολή / συστολή): 
- Διάτμηση: 

❖ Η Έννοια της (Τοπικής) Παραμόρφωσης

Η έννοια της τοπικής παραμόρφωσης πηγάζει από την έννοια της κίνησης όταν κρατάμε σταθερό τον χρόνο. Μόνο η μορφή αναφοράς (t = 0) και η παρούσα μορφή (t = σταθ.) απαιτούνται για τον ορισμό της.



$$\vec{x}' - \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}',t) - \vec{\chi}(\vec{X},t) = \vec{\chi}(\vec{X}+\vec{h},t) - \vec{\chi}(\vec{X},t)$$

Αν $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X},t)$ συνεχές & παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο, τότε από τον ορισμό της παραγώγισης:

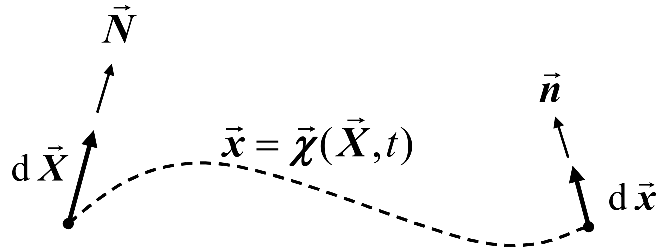
$$\vec{x}' - \vec{x} = \left[\nabla\vec{\chi}(\vec{X},t)\right]\vec{h} + \mathbb{O}\left(\left|\vec{h}\right|\right) \Rightarrow \vec{x}' - \vec{x} = \left[\boldsymbol{F}(\vec{X},t)\right]\vec{h} + \mathbb{O}\left(\left|\vec{h}\right|\right)$$

Έστω $\vec{\boldsymbol{h}} \to \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}$, όπου $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}$ …μία ***διαφορική υλική ίνα*** στο $\vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}$. Τότε

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\Big|_{t=\text{σταθ.}}} \tag{1}$$

όπου $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}$ είναι μια διαφορική υλική ίνα στο $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$

Επομένως, ο τανυστής $\boldsymbol{F}$ παίρνει μια διαφορική διανυσματική υλική ίνα $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}$ σε χρόνο t = 0, την περιστρέφει & την επεκτείνει (ή τη συρρικνώνει), έτσι ώστε να τη μεταμορφώσει σε μια υλική ίνα $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}$ για $t = t$. Δηλ. $\boldsymbol{F}$ = απεικόνιση μιας πολύ μικρής περιοχής γύρω από το $\vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}$ σε μια μικρή περιοχή γύρω από το $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$. Με άλλα λόγια, το $\boldsymbol{F}$ είναι ένα μέτρο της μεταβολής της τοπικής γεωμετρίας στην περιοχή γύρω από το $\boldsymbol{X}$.



$$\vec{\boldsymbol{N}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|}, \quad \vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\right|} \quad \text{(μοναδιαία διανύσματα)}$$

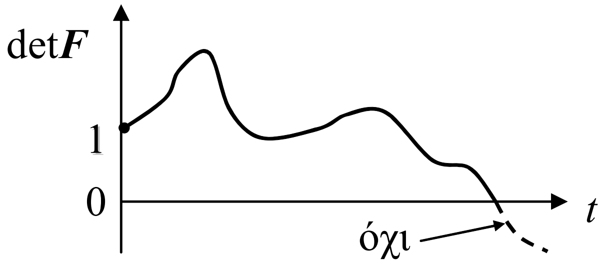
Από την (1) & τη γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας, προκύπτει:

$$\left|\det \boldsymbol{F}\right| = \frac{\text{όγκος }\left\{\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right\}}{\text{όγκος }\left\{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right\}} = \frac{\text{όγκος }\left\{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\right\}}{\text{όγκος }\left\{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right\}} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}V}$$

$\mathrm{d}\upsilon$ & $\mathrm{d}V$ δεν μπορεί να είναι μηδέν αφού στα συνεχή μέσα είναι αδύνατη η καταστροφή όγκου $\Rightarrow \left|\det \boldsymbol{F}\right| \neq 0, \infty$

$$\vec{\chi}(\vec{\boldsymbol{X}},0) = \vec{\boldsymbol{X}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{1} \quad \Rightarrow \quad \det \boldsymbol{F}\Big|_{t=0} = 1$$

Επειδή, $\det \boldsymbol{F}\big|_{t=0} > 0$, $\left|\det \boldsymbol{F}\right| \neq 0$ ($\Rightarrow$ $\det \boldsymbol{F} \neq 0$) & $\boldsymbol{F}$ συνεχής, προκύπτει ότι $\boxed{\det \boldsymbol{F} > 0}$



<u>Σημείωση 1</u>: Από τη θεωρία πεπλεγμένων συναρτήσεων γνωρίζούμε ότι αν $\det\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) = \det \boldsymbol{F} \neq 0$, τότε η συνάρτηση $x_i = \chi_i(X_m, t)$ είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή $\exists\ \chi_m^{-1}\ :\ X_m = \chi_m^{-1}(x_i, t)$

<u>Σημείωση 2</u>:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t) - \vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t) \quad \ldots \textit{Lagrangean Μορφή}$$

Αν η κίνηση είναι αντιστρέψιμη τότε

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{\chi}}^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \quad \ldots \textit{Eulerian Μορφή}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\nabla \vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1} \\ &\operatorname{grad} \vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{F}^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{grad} \vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{1} - \left(\boldsymbol{1} + \nabla \vec{\boldsymbol{u}}\right)^{-1}$$

… σχέση $\nabla \vec{\boldsymbol{u}}$ & $\operatorname{grad} \vec{\boldsymbol{u}}$

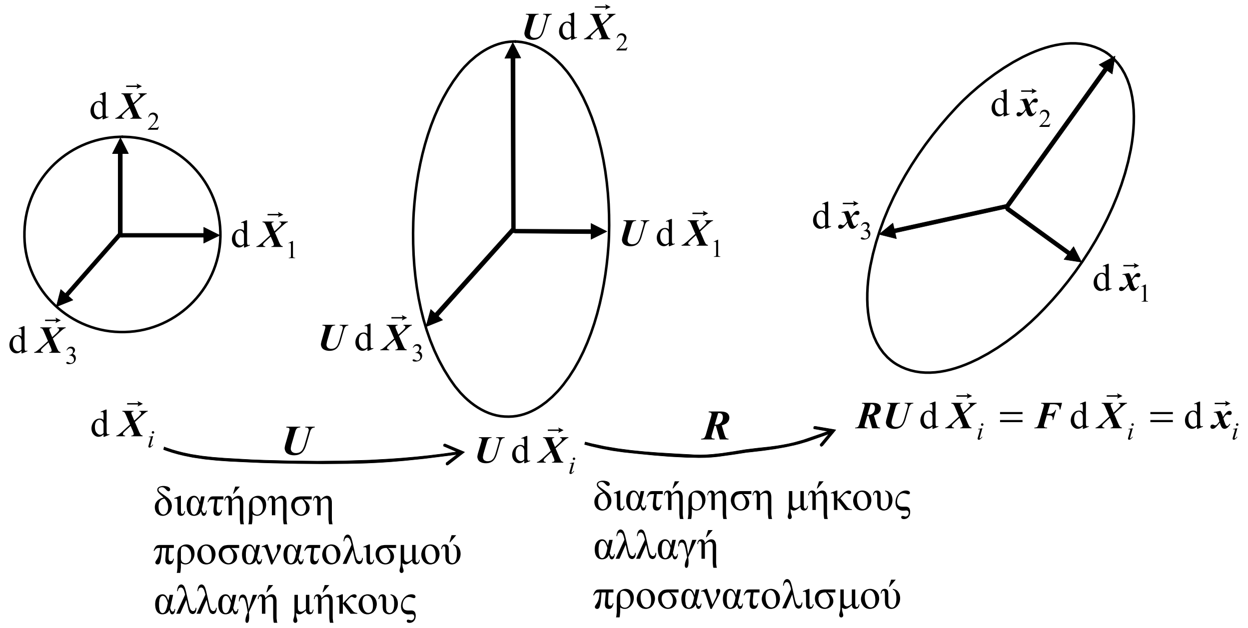
Επίσης:

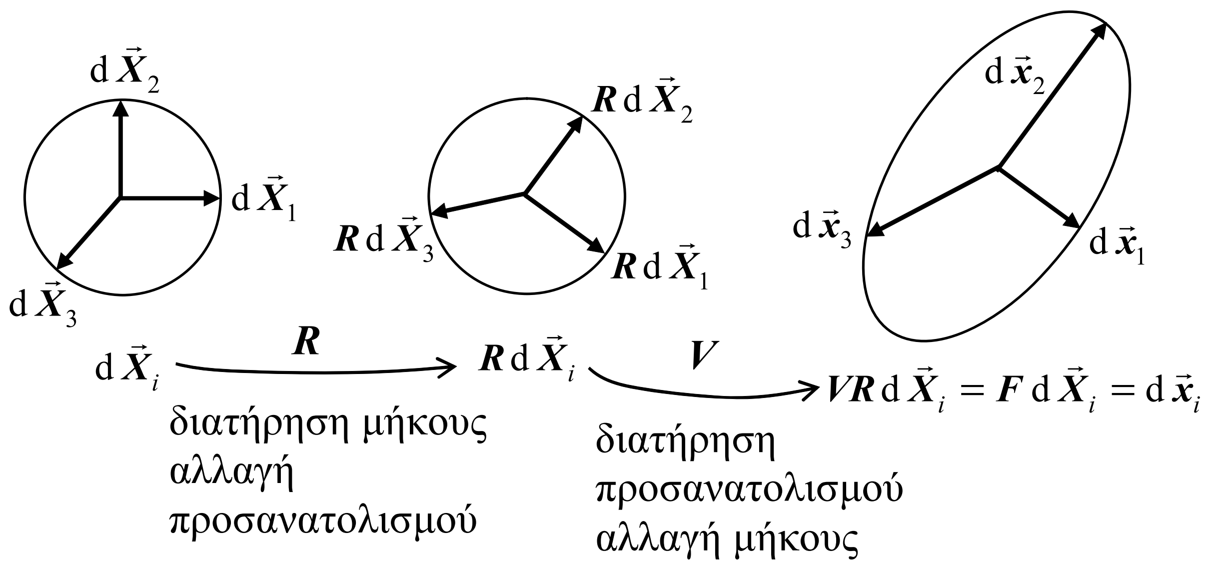
$$\left(\begin{aligned} &\nabla \vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} \frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} = \left(\operatorname{grad} \vec{\boldsymbol{u}}\right) \boldsymbol{F} \\ &\left(\nabla \vec{\boldsymbol{u}}\right)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} = \left(\operatorname{grad} \vec{\boldsymbol{u}}\right)_{im} F_{mj} \end{aligned} \right)$$

❖ Γεωμετρική Θεώρηση της Παραμόρφωσης

Επειδή $\det \boldsymbol{F} \neq 0$, η πολική αναπαράσταση του $\boldsymbol{F}$ γράφεται ως

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}, \quad \text{όπου} \quad \begin{cases} \boldsymbol{U} & \text{...δεξιός τανυστής έκτασης (stretch)} \\ \boldsymbol{V} & \text{...αριστερός τανυστής έκτασης} \\ \boldsymbol{R} & \text{...(ορθογώνιος) τανυστής στροφής} \end{cases}$$





$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{C}$ … ***δεξιά Cauchy-Green παραμόρφωση***

$\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T \equiv \boldsymbol{B}$ … ***αριστερή Cauchy-Green παραμόρφωση***

- ***Σημείωση 1:*** $(\boldsymbol{F}^{-1})^T = (\boldsymbol{F}^T)^{-1}$

- ***Σημείωση 2:*** $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}^{-1}, \boldsymbol{C}^{-1}$ είναι θετικά ορισμένοι & συμμετρικοί

- ***Σημείωση 3:*** Αν (υ_i) = ιδιοτιμές του $\boldsymbol{U}$

  $\vec{\hat{\boldsymbol{u}}}_i$ = (ορθοκανονικά) ιδιοδιανύσματα του $\boldsymbol{U}$

  Τότε:

  (υ_i) = ιδιοτιμές του $\boldsymbol{V}$

  (υ_i^2) = ιδιοτιμές των $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$

  $(1/\upsilon_i^2)$ = ιδιοτιμές των $\boldsymbol{B}^{-1}, \boldsymbol{C}^{-1}$

  $\vec{\hat{\boldsymbol{u}}}_i$ = ιδιοδιανύσματα των $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}^{-1}$

  $\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_i = \boldsymbol{R}\vec{\hat{\boldsymbol{u}}}_i$ = (ορθοκανονικά) ιδιοδιανύσματα των $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{-1}$

- ***Θεώρημα:*** όταν το $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}$ περιγράφει μια σφαίρα, τότε το $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}$ περιγράφει ένα ελλειψοειδές

  <u>*Απόδειξη*</u>

  $$\text{σταθ.} = \left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|^2 = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{F}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}) \cdot (\boldsymbol{F}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}) = [(\boldsymbol{F}^{-1})^T \boldsymbol{F}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}] \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}$$

  $$\Rightarrow (\boldsymbol{B}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}} = \text{σταθ.}$$

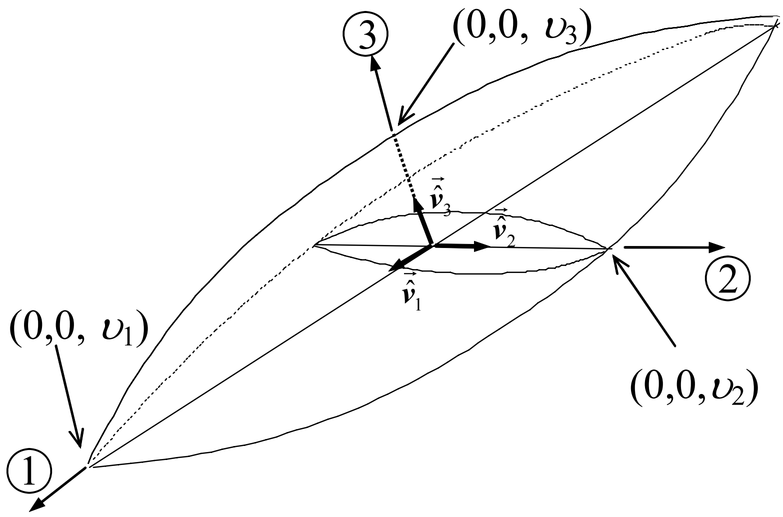
  Έστω $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}} = dx_i\,\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_i$, τότε η προηγούμενη σχέση δίνει:

  $$\text{σταθ.} = (\boldsymbol{B}^{-1} dx_i \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_i) \cdot (dx_j \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_j) = dx_i dx_j (\boldsymbol{B}^{-1}\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_i) \cdot \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} dx_i dx_j (\boldsymbol{B}^{-1}\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_i) \cdot \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_j =$$

  $$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} dx_i dx_j \frac{1}{\upsilon_i^2} (\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_i \cdot \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} dx_i dx_j \frac{1}{\upsilon_i^2} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2 \frac{1}{\upsilon_i^2}$$

  $$\Rightarrow \frac{1}{\upsilon_1^2}(dx_1)^2 + \frac{1}{\upsilon_2^2}(dx_2)^2 + \frac{1}{\upsilon_3^2}(dx_3)^2 = \text{σταθ.}$$

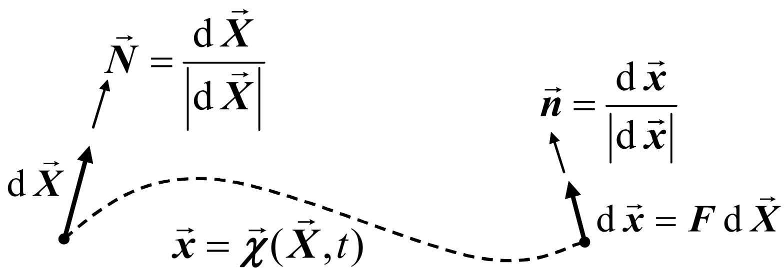
  … ελλειψοειδές παραμορφώσεως



Για $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3$ το ελλειψοειδές γίνεται σφαίρα

❖ **Επέκταση (Stretch)**

$\lambda \equiv \dfrac{|\mathrm{d}\vec{x}|}{|\mathrm{d}\vec{X}|}$ σε μία συγκεκριμένη διεύθυνση πάνω σε μια υλική ίνα



❑ Επέκταση στο σημείο $\vec{x}$ μιας υλικής ίνας του σώματος $\mathbf{B_t}$

$$|\mathrm{d}\vec{X}|^2 = (\boldsymbol{B}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x} \Rightarrow \frac{|\mathrm{d}\vec{X}|^2}{|\mathrm{d}\vec{x}|^2} = (\boldsymbol{B}^{-1}\vec{n})\cdot\vec{n} \Rightarrow \lambda = \lambda_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{B}^{-1}\vec{n})\cdot\vec{n}}}$$

η οποία για $\vec{n} = \hat{\vec{v}}_i$, δηλ. για ιδιοδιανύσματα του $\boldsymbol{B}^{-1}$, δίνει:

$$\lambda_{\hat{\vec{v}}_i} = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{B}^{-1}\hat{\vec{v}}_i)\cdot\hat{\vec{v}}_i}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\upsilon_i^2}\hat{\vec{v}}_i\right)\cdot\hat{\vec{v}}_i}} = \upsilon_i$$ **… *κύριες επεκτάσεις***

όπου ο δείκτης *i* <u>δεν</u> εκφράζει άθροισμα

$\{\hat{\vec{v}}_i\}$ **… *κύριες διευθύνσεις μετά την παραμόρφωση***

❑ Επέκταση στο σημείο $\vec{X}$ μιας υλικής ίνας του σώματος $\mathbf{B_o}$

$$\lambda = \frac{|\mathrm{d}\vec{x}|}{|\mathrm{d}\vec{X}|} = \frac{|\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{X}|}{|\mathrm{d}\vec{X}|} = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{X})\cdot(\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{X})}}{|\mathrm{d}\vec{X}|} = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{X})\cdot\mathrm{d}\vec{X}}}{|\mathrm{d}\vec{X}|}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{C}\,\mathrm{d}\vec{X})\cdot\mathrm{d}\vec{X}}}{|\mathrm{d}\vec{X}|} \Rightarrow \lambda = \lambda_{\vec{N}} = \sqrt{(\boldsymbol{C}\,\vec{N})\cdot\vec{N}}$$

η οποία για $\vec{N} = \vec{\hat{u}}_i$, δηλ. για ιδιοδιανύσματα του $\boldsymbol{C}$, δίνει:

$$\lambda_{\vec{\hat{u}}_i} = \sqrt{(\boldsymbol{C}\,\vec{\hat{u}}_i)\cdot\vec{\hat{u}}_i} = \sqrt{(\upsilon_i^2\,\vec{\hat{u}}_i)\cdot\vec{\hat{u}}_i} = \upsilon_i \text{ ... } \textbf{\textit{κύριες επεκτάσεις}}$$

όπου ο δείκτης *i* δεν εκφράζει άθροισμα

$\left\{\vec{\hat{u}}_i\right\}$ ***... κύριες διευθύνσεις πριν την παραμόρφωση***

❖ Ανηγμένη Παραμόρφωση (Strain)

Μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί στην αριστερή και στη δεξιά Cauchy - Green παραμόρφωση, δηλαδή $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$ και $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$, αντίστοιχα. Στην συνέχεια θα αναφέρουμε μερικές άλλες εκφράσεις της παραμόρφωσης.

❑ Θεώρηση κατά Lagrange

Μεταβολή του τετραγώνου του μήκους στο σημείο $\vec{X}$ μιας υλικής ίνας, στην κατεύθυνση $\vec{N} = \mathrm{d}\vec{X}/|\mathrm{d}\vec{X}|$, ανά μονάδα του τετράγωνου του μήκους στην κατάσταση αναφοράς:

$$\frac{|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}|^2-\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|^2}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|^2}=\frac{(\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}})\cdot(\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}})-\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|^2}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|^2}=\frac{\left[\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{1}\right)\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right]\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|^2}=$$

$$=\left[\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{1}\right)\vec{\boldsymbol{N}}\right]\cdot\vec{\boldsymbol{N}}=2(\boldsymbol{E}\vec{\boldsymbol{N}})\cdot\vec{\boldsymbol{N}}$$

όπου

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{1}\right)}$$ ***… Green-St. Venant παραμόρφωση***

$$\left.\begin{aligned}\nabla\vec{\boldsymbol{u}}&=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{C}&=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{1}+\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T(\boldsymbol{1}+\nabla\vec{\boldsymbol{u}})=\boldsymbol{1}+\nabla\vec{\boldsymbol{u}}+(\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T+(\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T(\nabla\vec{\boldsymbol{u}})$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\boldsymbol{u}}+(\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T+(\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T(\nabla\vec{\boldsymbol{u}})\right]$$

δηλαδή $$E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}+\frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)$$

Σημείωση: $\boldsymbol{E}$ σχετίζεται με την «ονομαστική» (ή μηχανική) παραμόρφωση (nominal strain) αφού αναφέρεται σε μεταβολή ως προς το αρχικό μήκος

❑ Θεώρηση κατά Euler

Μεταβολή του τετραγώνου του μήκους στο σημείο $\vec{\boldsymbol{x}}$ μιας υλικής ίνας, στην κατεύθυνση $\vec{\boldsymbol{n}}=\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}/\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\right|$, ανά μονάδα του τετράγωνου του μήκους στην τρέχουσα κατάσταση:

$$\frac{|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}|^2-\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|^2}{|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}|^2}=\frac{|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}|^2-(\boldsymbol{F}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}})\cdot(\boldsymbol{F}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}})}{|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}|^2}=\frac{\left[\left(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\right]\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}}{|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}|^2}=$$

$$=\left[\left(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)\vec{\boldsymbol{n}}\right]\cdot\vec{\boldsymbol{n}}=2(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{n}})\cdot\vec{\boldsymbol{n}}$$

όπου

$$\boxed{\underset{\sim}{e} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{B}^{-1}\right)} \quad \textbf{\textit{… Almansi-Hamel παραμόρφωση}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{F}^{-1} \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{F}^{-1})^T \boldsymbol{F}^{-1} = (\boldsymbol{1} - \operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})^T (\boldsymbol{1} - \operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}}) =$$

$$= \boldsymbol{1} - \operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}} - (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})^T + (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})^T (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})$$

$$\therefore \quad \underset{\sim}{e} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}} + (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})^T - (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})^T (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}})\right]$$

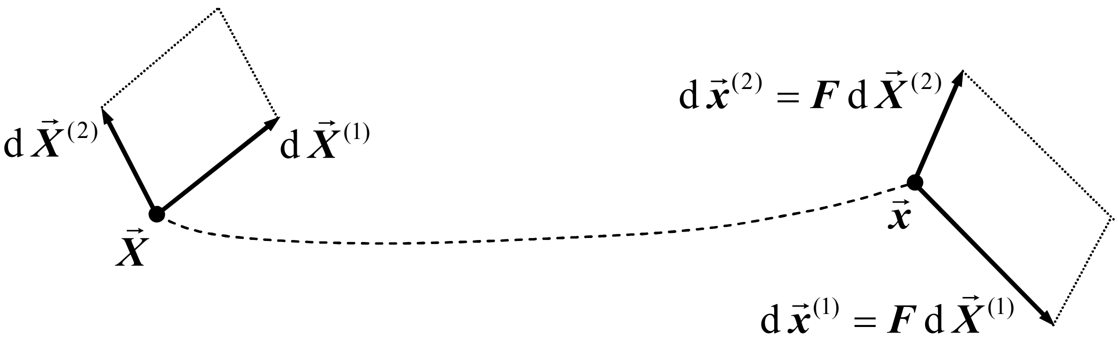
δηλαδή $$\underset{\sim}{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)$$

<u>*Σημείωση*</u>*:* $\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}$ σχετίζεται με την «πραγματική» παραμόρφωση (true strain) αφού αναφέρεται σε μεταβολή ως προς το τρέχον μήκος

❖ Μεταβολές της Επιφάνειας

$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}^{(1)} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}^{(2)}$ (κατάσταση αναφοράς)

$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}} = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}^{(1)} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}^{(2)}$ (παρούσα κατάσταση)



$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}a_i = \varepsilon_{ijk}\,\mathrm{d}x_j^{(1)}\,\mathrm{d}x_k^{(2)} = \varepsilon_{ijk} F_{jm}\,\mathrm{d}X_m^{(1)} F_{kp}\,\mathrm{d}X_p^{(2)}$$

ενώ από την εξίσωση $\varepsilon_{rst}(\det \boldsymbol{T}) = \varepsilon_{ijk} T_{ir} T_{js} T_{kt}$ του Κεφ. 10, έχουμε:

$$\varepsilon_{rjk} F_{rs} F_{jm} F_{kp} = \varepsilon_{smp}(\det \boldsymbol{F}) \Rightarrow \varepsilon_{rjk} F_{rs} F_{jm} F_{kp} F_{si}^{-1} = \varepsilon_{smp}(\det \boldsymbol{F}) F_{si}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{rjk} F_{jm} F_{kp} \delta_{ri} = \varepsilon_{smp}(\det \boldsymbol{F}) F_{si}^{-1} \Rightarrow \varepsilon_{ijk} F_{jm} F_{kp} = \varepsilon_{smp}(\det \boldsymbol{F}) F_{si}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varepsilon_{ijk} F_{jm} F_{kp}\, \mathrm{d} X_m^{(1)}\, \mathrm{d} X_p^{(2)}}_{\mathrm{d} a_i} = \underbrace{\varepsilon_{smp}\, \mathrm{d} X_m^{(1)}\, \mathrm{d} X_p^{(2)}}_{\mathrm{d} A_s} (\det \boldsymbol{F}) F_{si}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{d} a_i = (\det \boldsymbol{F}) F_{si}^{-1} dA_s$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathrm{d} \vec{\boldsymbol{a}} = (\det \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F}^{-1})^T\, \mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}}}$$

<u>Μέτρο της επιφάνειας</u>:

$$\left|\mathrm{d} \vec{\boldsymbol{a}}\right|^2 = (\det \boldsymbol{F})^2 \left[(\boldsymbol{F}^{-1})^T\, \mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}}\right] \cdot \left[(\boldsymbol{F}^{-1})^T\, \mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}}\right] = (\det \boldsymbol{F})^2 \boldsymbol{C}^{-1}\, \mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}}$$

και αφού $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \Rightarrow \det \boldsymbol{C} = (\det \boldsymbol{F}^T)(\det \boldsymbol{F}) = (\det \boldsymbol{F})^2$

$$\Rightarrow \left|\mathrm{d} \vec{\boldsymbol{a}}\right|^2 = (\det \boldsymbol{C}) \boldsymbol{C}^{-1}\, \mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}}$$

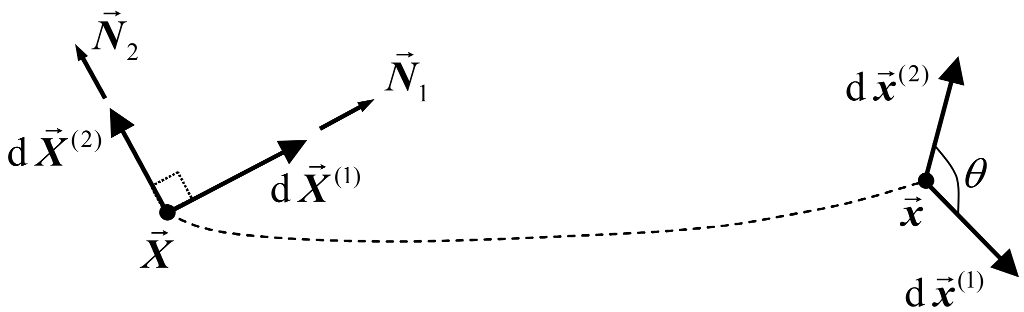
$$\Rightarrow \frac{\left|\mathrm{d} \vec{\boldsymbol{a}}\right|^2}{\left|\mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}}\right|^2} = (\det \boldsymbol{C}) \boldsymbol{C}^{-1} \vec{\boldsymbol{N}}_A \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_A \quad \textbf{\textit{... ανηγμένο μέτρο επιφάνειας}}$$

όπου $\vec{\boldsymbol{N}}_A \equiv \mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}} / \left|\mathrm{d} \vec{\boldsymbol{A}}\right|$

- **Διάτμηση:** η μεταβολή της γωνίας μεταξύ δύο υλικών ινών από την κατάσταση αναφοράς στην τρέχουσα κατάσταση

Θεώρηση κατά Lagrange

Έστω μια ορθή γωνία ανάμεσα σε δύο υλικές ίνες του σώματος $\mathbf{B_o}$, η οποία μεταβάλλεται στην γωνία θ στην τρέχουσα κατάσταση $\mathbf{B_t}$



Διάτμηση κατά Lagrange $\rightarrow \ \gamma_{\vec{N}_1\vec{N}_2} \equiv \dfrac{\pi}{2} - \theta$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{d}\vec{x}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{x}^{(2)}}{\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}\right|} = \frac{\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{X}^{(1)} \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}}{\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}\right|} = \frac{\boldsymbol{C}\,\mathrm{d}\vec{X}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{X}^{(2)}}{\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}\right|} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{C}\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}\right|}\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}\right| = \frac{\boldsymbol{C}\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\lambda_{\vec{N}_1}\lambda_{\vec{N}_2}}$$

όπου: $\quad \vec{N}_1 = \mathrm{d}\vec{X}^{(1)} / \left|\mathrm{d}\vec{X}^{(1)}\right|, \qquad \vec{N}_2 = \mathrm{d}\vec{X}^{(2)} / \left|\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}\right|$

$$\lambda_{\vec{N}_1} = \left|\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\right| / \left|\mathrm{d}\vec{X}^{(1)}\right|, \qquad \lambda_{\vec{N}_2} = \left|\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}\right| / \left|\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}\right|$$

Όμως, $\lambda_{\vec{N}_1} = \sqrt{\boldsymbol{C}\,\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_1}$ & $\lambda_{\vec{N}_2} = \sqrt{\boldsymbol{C}\,\vec{N}_2 \cdot \vec{N}_2}$, ενώ συγχρόνως

$$\sin\gamma_{\vec{N}_1\vec{N}_2} = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma_{\vec{N}_1\vec{N}_2} = \frac{\boldsymbol{C}\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\lambda_{\vec{N}_1}\lambda_{\vec{N}_2}}$$

η οποία, επειδή $\boldsymbol{C} = 2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{1}$, $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$ και $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_1 = \vec{N}_2 \cdot \vec{N}_2 = 1$

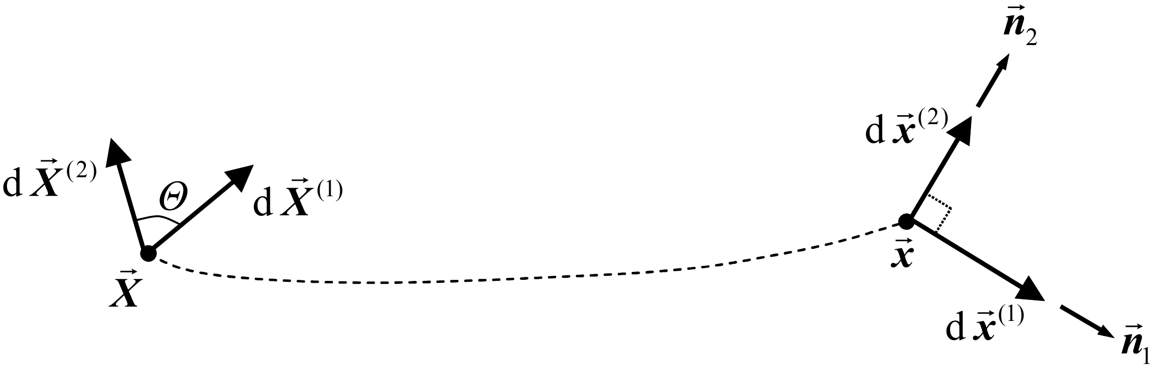
$$\Rightarrow \boxed{\sin\gamma_{\vec{N}_1\vec{N}_2} = \frac{2\boldsymbol{E}\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\sqrt{2\boldsymbol{E}\,\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_1 + 1}\,\sqrt{2\boldsymbol{E}\,\vec{N}_2 \cdot \vec{N}_2 + 1}}}$$

<u>*Παράδειγμα:*</u> Αν $\vec{N}_1 = \vec{\boldsymbol{i}}_1$ & $\vec{N}_2 = \vec{\boldsymbol{i}}_2$

$$\Rightarrow \quad \sin\gamma_{\vec{N}_1\vec{N}_2} = \frac{2E_{21}}{\sqrt{2E_{11}+1}\,\sqrt{2E_{22}+1}}$$

❑ Θεώρηση κατά Euler

Έστω μια ορθή γωνία ανάμεσα σε δύο υλικές ίνες του Σ.Μ. στην τρέχουσα κατάσταση $\mathbf{B_t}$, και Θ η γωνία ανάμεσα στις ίδιες υλικές ίνες στην κατάσταση αναφοράς $\mathbf{B_o}$



Διάτμηση κατά Euler $\rightarrow \;\; \gamma_{\vec{n}_1\vec{n}_2} \equiv \Theta - \dfrac{\pi}{2}$

$$\cos\Theta = \frac{\mathrm{d}\vec{X}^{(1)}\cdot\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}}{\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}\right|} = \frac{\boldsymbol{F}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}}{\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}\right|} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\,\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}}{\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}\right|} =$$

$$= \frac{\vec{n}_1\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\vec{n}_2}{\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}\right|}\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\right|\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}\right| = \left(\boldsymbol{B}^{-1}\vec{n}_2\cdot\vec{n}_1\right)\lambda_{\vec{n}_1}\lambda_{\vec{n}_2}$$

όπου: $\quad \vec{n}_1 = \mathrm{d}\vec{x}^{(1)}/\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\right|, \qquad \vec{n}_2 = \mathrm{d}\vec{x}^{(2)}/\left|\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}\right|$

$$\lambda_{\vec{n}_1} = \left|\mathrm{d}\vec{x}^{(1)}\right|/\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(1)}\right|, \qquad \lambda_{\vec{n}_2} = \left|\mathrm{d}\vec{x}^{(2)}\right|/\left|\mathrm{d}\vec{X}^{(2)}\right|$$

Όμως, $\lambda_{\vec{n}_1} = \dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{B}^{-1}\vec{n}_1\cdot\vec{n}_1}}$ & $\lambda_{\vec{n}_2} = \dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{B}^{-1}\vec{n}_2\cdot\vec{n}_2}}$, ενώ συγχρόνως

$$\sin\gamma_{\vec{n}_1\vec{n}_2} = -\cos\Theta \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma_{\vec{n}_1\vec{n}_2} = -\left(\boldsymbol{B}^{-1}\vec{\boldsymbol{n}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_1\right)\lambda_{\vec{n}_1}\lambda_{\vec{n}_2}$$

η οποία, επειδή $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{1} - 2\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}$, $\vec{\boldsymbol{n}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_2 = 0$ και $\vec{\boldsymbol{n}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_1 = \vec{\boldsymbol{n}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\gamma_{\vec{n}_1\vec{n}_2} = \frac{2\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{n}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_1}{\sqrt{1-2\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{n}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_1}\sqrt{1-2\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{n}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_2}}}$$

❖ Ρυθμός Επέκτασης (Stretching) και Περιστροφής (Spin)

Η συμπεριφορά μερικών υλικών εξαρτάται όχι μόνο από την παραμόρφωση τους στην παρούσα κατάσταση, αλλά και από το ***ρυθμό*** με τον οποίο τα παραμορφώνουμε (δηλ. το ρυθμό με τον οποίο επεκτείνουμε-συρρικνώνουμε ή/και περιστρέφουμε κάθε στοιχειώδες τμήμα ενός Σ.Μ.)

Έστω: $\vec{\boldsymbol{N}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|}, \quad \vec{\boldsymbol{n}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\right|}, \quad \lambda = \dfrac{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\right|}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|}$ = επέκταση

Άρα: $\vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{F}\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\right|} = \boldsymbol{F}\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|}\dfrac{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{X}}\right|}{\left|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\right|} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{n}} = \dfrac{\boldsymbol{F}\vec{\boldsymbol{N}}}{\lambda}$

Επιπλέον, έχει αποδειχθεί παραπάνω ότι $\lambda = \lambda_{\vec{N}} = \sqrt{\boldsymbol{C}\,\vec{\boldsymbol{N}}\cdot\vec{\boldsymbol{N}}}$

❑ <u>Ρυθμός επέκτασης</u>

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{N}}\cdot\vec{\boldsymbol{N}})^{-1/2}\dot{\boldsymbol{C}}\vec{\boldsymbol{N}}\cdot\vec{\boldsymbol{N}} = \frac{1}{2\lambda}\dot{\boldsymbol{C}}\vec{\boldsymbol{N}}\cdot\vec{\boldsymbol{N}} \qquad (*)$$

Όμως, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{C}} = \dot{\overline{\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}}} = \dot{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}}$

$\boldsymbol{F} = \nabla\vec{\boldsymbol{\chi}} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{F}} = \nabla\dot{\vec{\boldsymbol{\chi}}} = \nabla\vec{\boldsymbol{v}} = (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{F}$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}}$$

και επομένως, $\dot{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{F}^T \left[(\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}) + (\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}})^T \right] \boldsymbol{F} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{C}} = 2\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{F} \quad (\#)$

όπου $\boldsymbol{D} = \dfrac{1}{2}\left[(\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}) + (\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}})^T \right]$ ... ***τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης ή ρυθμού επέκτασης (strain rate tensor, or stretching tensor)***

δηλ. $\boldsymbol{D}$ = συμμετρικό τμήμα της κλίσης της ταχύτητας $\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}$. Επίσης, έχει για τα ιξώδη ρευστά τον ίδιο ρόλο που έχει το $\boldsymbol{\varepsilon}$ για τα ελαστικά στερεά, δηλ. υπεισέρχεται ως κύρια μεταβλητή στις αντίστοιχες καταστατικές εξισώσεις

$$\{(*),(\#)\} \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}\vec{\boldsymbol{N}}) \cdot \underbrace{\hat{\boldsymbol{N}}}_{\lambda \boldsymbol{F}^{-1}\vec{\boldsymbol{n}}} = \lambda(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{F}^{-1}\vec{\boldsymbol{n}} = \lambda \boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$$

$$\therefore \quad \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \Rightarrow \boxed{\dot{\overline{\ln \lambda}} = \boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}}$$

το οποίο σημαίνει ότι ο ρυθμός επέκτασης ανά μονάδα επέκτασης βρίσκεται στη διεύθυνση του $\vec{\boldsymbol{n}}$ και ο $\boldsymbol{D}$ χαρακτηρίζει το ρυθμό μεταβολής του λογαρίθμου της επέκτασης στην παραπάνω διεύθυνση. Π.χ. για $\vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{i}}_1 \Rightarrow \dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda} = D_{11}$, κλπ.

❑ <u>Ρυθμός περιστροφής (spin)</u>

Τανυστής ρυθμού περιστροφής (vorticity or spin tensor)

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}) - (\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}})^T \right] = -\boldsymbol{W}^T$$

δηλ. $\boldsymbol{W}$ = αντισυμμετρικό τμήμα της κλίσης της ταχύτητας $\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}$, οπότε: $\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}$

Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega_k \vec{\boldsymbol{i}}_k$, τέτοιο ώστε: $\boxed{\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kpm}W_{mp}}$, όπου $\boldsymbol{W} = W_{mp}\vec{\boldsymbol{i}}_m \otimes \vec{\boldsymbol{i}}_p$

$$\Rightarrow \varepsilon_{kij}\omega_k = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kpm}W_{mp} = \tfrac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jm} - \delta_{jp}\delta_{im})W_{mp} = \tfrac{1}{2}(W_{ji} - W_{ij}) = W_{ji}$$

$$\therefore \quad \boxed{W_{ij} = \varepsilon_{jik}\omega_k}$$

Δηλ. $\exists$ 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα σε κάθε αντισυμμετρικό τανυστή $\boldsymbol{W}$ & ένα διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ (ένας αντισυμμετρικός τανυστής έχει μόνο 3 σημαντικές συνιστώσες)

<u>*Παρατήρηση*</u>: $W_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \Rightarrow \omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kpm}v_{m,p}$, δηλ. $\boxed{\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\operatorname{curl}\vec{\boldsymbol{v}}}$

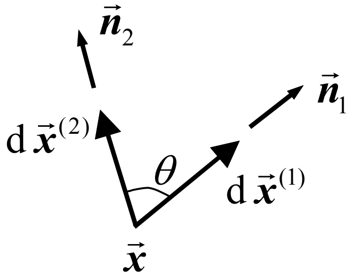
Ρυθμός μεταβολής του $\vec{\boldsymbol{n}}$***:***

$$\dot{\vec{\boldsymbol{n}}} = \frac{\dot{\boldsymbol{F}}\vec{\boldsymbol{N}}}{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2}\boldsymbol{F}\vec{\boldsymbol{N}} \xrightarrow[\boldsymbol{F}\vec{\boldsymbol{N}}=\lambda\vec{\boldsymbol{n}}]{\dot{\boldsymbol{F}}=(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{F}} \dot{\vec{\boldsymbol{n}}} = (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}})\vec{\boldsymbol{n}} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\vec{\boldsymbol{n}}$$

$$\xrightarrow[\dot{\lambda}/\lambda=\boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}]{\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W}} \dot{\vec{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{W}\vec{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}} - (\boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\vec{\boldsymbol{n}}$$

Για $\vec{\boldsymbol{n}} = \hat{\vec{\boldsymbol{d}}}_i$ = μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{D}$, η τελευταία εξίσωση συνεπάγεται ότι $\dot{\hat{\vec{\boldsymbol{d}}}}_i = \boldsymbol{W}\hat{\vec{\boldsymbol{d}}}_i \Rightarrow \dot{\hat{\vec{\boldsymbol{d}}}}_i = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\vec{\boldsymbol{d}}}_i$

Ρυθμός διάτμησης δύο υλικών ινών



$$\cos\theta = \vec{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_2 \Rightarrow -(\sin\theta)\dot{\theta} = \dot{\vec{\boldsymbol{n}}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_2 + \vec{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \dot{\vec{\boldsymbol{n}}}_2$$

$$\Rightarrow -(\sin\theta)\dot{\theta} = 2\boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_2 - \left(\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda}\right)\vec{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_2$$

όπου ελήφθη υπόψη ότι $\boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_2 = \boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_1$ (αφού $\boldsymbol{D}$ συμμετρικός), & $\boldsymbol{W}\vec{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_2 = -\boldsymbol{W}\vec{\boldsymbol{n}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_1$ (αφού $\boldsymbol{W}$ αντισυμμετρικός)

Για $\vec{\boldsymbol{n}}_1 \perp \vec{\boldsymbol{n}}_2$, (δηλ. $\vec{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_2 = 0$ & $\theta = \pi/2) \Rightarrow \dot{\theta} = -2\boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_2$

<u>*Παράδειγμα 1*</u>: $\{\vec{\boldsymbol{n}}_1 = \vec{\boldsymbol{\imath}}_i,\ \vec{\boldsymbol{n}}_2 = \vec{\boldsymbol{\imath}}_j\ \ (i \neq j)\} \Rightarrow \dot{\theta} = -2D_{ij}$

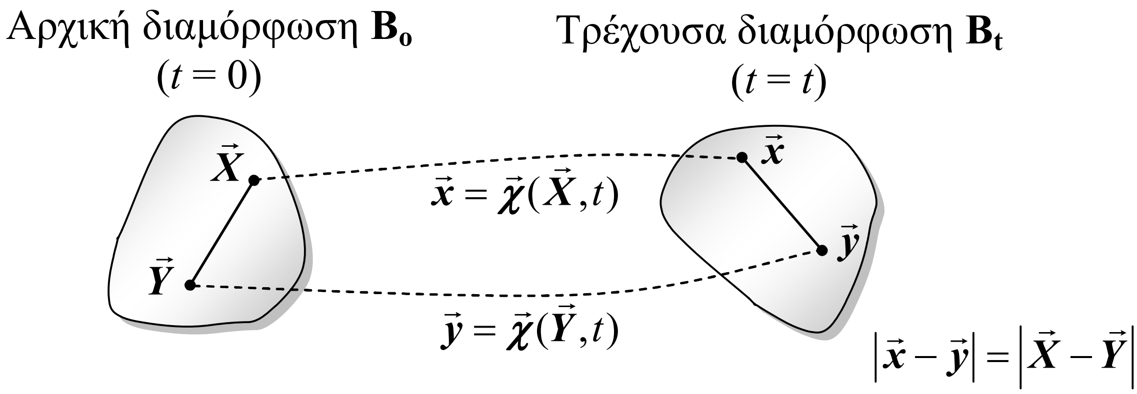
<u>*Παράδειγμα 2*</u>: $\{\vec{\boldsymbol{n}}_1 = \vec{\hat{\boldsymbol{d}}}_i,\ \vec{\boldsymbol{n}}_2 = \vec{\hat{\boldsymbol{d}}}_j\ \ (i \neq j)\} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$

δηλ. η γωνία μεταξύ των $\left\{\vec{\hat{\boldsymbol{d}}}_i\right\}$ δεν αλλάζει

❖ Ειδικές Περιπτώσεις Κίνησης

❑ <u>Κίνηση μη-παραμορφωμένου σώματος</u>

$\left|\vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t) - \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{Y}},t)\right| = \left|\vec{\boldsymbol{X}} - \vec{\boldsymbol{Y}}\right|,\ \forall\ \ \vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Y}} \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{o}}\ \ (\equiv \mathbf{B_o} \cup \partial\mathbf{B_o})$. Δηλ. η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε υλικών σημείων $\vec{\boldsymbol{X}}$ και $\vec{\boldsymbol{Y}}$ παραμένει σταθερή



Θεώρημα Euler: Μια κίνηση $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{o}} \to \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{t}}$ είναι μια κίνηση μη-παραμορφωμένου σώματος, αν και μόνο αν:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}}_o,t) + \boldsymbol{Q}(t)\left(\vec{\boldsymbol{X}} - \vec{\boldsymbol{X}}_o\right) \qquad (*)$$

όπου $\vec{\boldsymbol{X}}_o \in \mathbf{B_o}$, $\boldsymbol{Q}(t) \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}$

- <u>*Σημείωση 1*</u>: $\vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},0) = \vec{\boldsymbol{X}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{X}}_o + \boldsymbol{Q}(0)\,(\vec{\boldsymbol{X}} - \vec{\boldsymbol{X}}_o)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Q}(0)(\vec{\boldsymbol{X}}-\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{o}})=(\vec{\boldsymbol{X}}-\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{o}}), \qquad \forall\ (\vec{\boldsymbol{X}}-\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{o}})$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{Q}(0)=\boldsymbol{1}$$

- <u>*Σημείωση 2*</u>: Εναλλακτικός τρόπος γραφής της (*)

$$\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{c}}(t)+\boldsymbol{Q}(t)\left(\vec{\boldsymbol{X}}-\vec{\boldsymbol{o}}\right), \quad \text{όπου} \quad \vec{\boldsymbol{c}}(t)=\vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{o}},t)-\boldsymbol{Q}(t)\left(\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{o}}-\vec{\boldsymbol{o}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{\boldsymbol{x}}}{\partial\vec{\boldsymbol{X}}}=\boldsymbol{Q}(t)\Rightarrow \boldsymbol{F}=\boldsymbol{Q}(t)$$

Έχουμε όμως αποδείξει ότι πάντα $\det\boldsymbol{F}>0$, οπότε: $\det\boldsymbol{Q}(t)>0$ $\Rightarrow \boldsymbol{Q}(t)\in\mathbf{Q}^{+}$

- <u>*Σημείωση 3*</u>: $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}(t), \quad \boldsymbol{V}=\boldsymbol{U}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{1}, \quad \boldsymbol{E}=\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{O}$

- <u>*Σημείωση 4*</u>:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}}&=\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\\ \boldsymbol{F}&=\boldsymbol{Q}(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{T}$$

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{T}=\boldsymbol{1}\Rightarrow \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{T}+\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^{T}=\boldsymbol{O}\Rightarrow \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{T}=-\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^{T}\Rightarrow \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{T}=-\left(\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{T}\right)^{T}$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{W}=\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{T}, \quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$$

δηλ. γενικά $\boldsymbol{W}\neq\dot{\boldsymbol{R}}$. Όμως για $t=0$ έχουμε: $\boldsymbol{R}(0)=\boldsymbol{1}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{W}(0)=\dot{\boldsymbol{R}}(0)$$

❑ <u>Ισόχωρη κίνηση</u>

Μια κίνηση $\mathbf{B_o}\rightarrow\mathbf{B_t}$ είναι ισόχωρη αν ο όγκος όλων των τμημάτων $\mathbf{P_t}\subseteq\mathbf{B_t}$ παραμένει σταθερός, δηλ.

$$\int_{\mathbf{P_o}}\mathrm{d}V=\int_{\mathbf{P_t}}\mathrm{d}\upsilon, \quad \forall\ \mathbf{P_t}\subseteq\mathbf{B_t}$$

Θεώρημα: Μια κίνηση είναι ισόχωρη αν και μόνο αν:

(i) $\boxed{\det \boldsymbol{F} = 1}$ … περιγραφή Lagrange

(ii) $\boxed{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}} = 0}$ … περιγραφή Euler

σε όλο το **B** & $\forall\ t$

<u>*Απόδειξη*</u>

(i) $$\int_{\mathbf{P_o}} \mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_t}} \mathrm{d}\upsilon \Leftrightarrow \int_{\mathbf{P_o}} \mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_o}} (\det \boldsymbol{F})\,\mathrm{d}V \quad (\text{αφού } \det \boldsymbol{F} = \mathrm{d}\upsilon / \mathrm{d}V)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbf{P_o}} (\det \boldsymbol{F} - 1)\,\mathrm{d}V = 0, \quad \forall\ \mathbf{P_o} \subseteq \mathbf{B_o}, \ \forall\ t$$

Οπότε, θεωρώντας ότι η συνάρτηση $(\det \boldsymbol{F} - 1)$ είναι συνεχής, έχουμε: $\det \boldsymbol{F} = 1, \ \forall\ \boldsymbol{X} \in \mathbf{B_o}, \forall\ t$

(ii) $$\int_{\mathbf{P_o}} \mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_t}} \mathrm{d}\upsilon \Rightarrow \overset{\bullet}{\overline{\int_{\mathbf{P_t}} \mathrm{d}\upsilon}} = 0 \Leftrightarrow \overset{\bullet}{\overline{\int_{\mathbf{P_o}} (\det \boldsymbol{F})\,\mathrm{d}V}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbf{P_o}} \overset{\bullet}{\overline{(\det \boldsymbol{F})}}\,\mathrm{d}V = 0 \qquad (\$)$$

όμως:

$$\overset{\bullet}{\overline{\det \boldsymbol{F}}} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\dot{F}_{il}F_{jm}F_{kn} + \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}F_{il}\dot{F}_{jm}F_{kn} + \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}F_{il}F_{jm}\dot{F}_{kn} =$$

$$= \frac{1}{6}\underbrace{(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}F_{jm}F_{kn})}_{2F^c_{li}}\dot{F}_{il} + \frac{1}{6}\underbrace{(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}F_{il}F_{kn})}_{2F^c_{mj}}\dot{F}_{jm} + \frac{1}{6}\underbrace{(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}F_{il}F_{jm})}_{2F^c_{nk}}\dot{F}_{kn} =$$

$$= F^c_{mj}\dot{F}_{jm} = (\det \boldsymbol{F})F^{-1}_{mj}\dot{F}_{jm} = (\det \boldsymbol{F})\,\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1})$$

Άρα: $$\overset{\bullet}{\overline{\det \boldsymbol{F}}} = (\det \boldsymbol{F})\,\mathrm{tr}(\underbrace{\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}}_{\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}}}) = (\det \boldsymbol{F})\underbrace{\mathrm{tr}(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}})}_{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\overset{\bullet}{\overline{\det \boldsymbol{F}}} = (\det \boldsymbol{F})\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}}}$$

επομένως, η σχέση ($) γίνεται:

$$\int_{\mathbf{P_o}} [(\det \boldsymbol{F}) \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{v}}] \mathrm{d}V = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbf{P_t}} (\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{v}}) \mathrm{d}\upsilon = 0, \quad \forall\ \mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t},\ \forall\ t$$

και θεωρώντας ότι η συνάρτηση $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}}$ είναι συνεχής, έχουμε: $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}} = 0,\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{B_t},\ \forall\ t$

❖ Γραμμική Θεωρία ή Θεωρία Μικρής Παραμόρφωσης

Μέχρι τώρα μιλήσαμε για την αλλαγή του σχήματος, την παραμόρφωση κ.τ.λ., χωρίς να θέσουμε περιορισμούς στην κατάσταση του υλικού. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις στην πράξη οι αλλαγές στη γεωμετρία είναι μικρές. Είναι χρήσιμο λοιπόν να εξειδικεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για την περίπτωση μικρών αλλαγών στη γεωμετρία.

Για ευκολία θεωρούμε την ***κλίση μετατόπισης*** $\nabla\vec{\boldsymbol{u}}$ ως μέτρο της αλλαγής της γεωμετρίας. Έτσι εξάγουμε αποτελέσματα για την περίπτωση των ***μικρών κλίσεων μετατόπισης***. Αυτή η περίπτωση μερικές φορές ονομάζεται ***γραμμική θεωρία*** ή ***θεωρία μικρής παραμόρφωσης***.

$$|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{\operatorname{tr}\left[(\nabla\vec{\boldsymbol{u}})(\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T\right]} = \sqrt{\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{\partial u_i}{\partial X_j}} = \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)^2}$$

Ορίζουμε ως $\|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}\| = \max\limits_t |\nabla\vec{\boldsymbol{u}}|$. Έτσι η ***θεωρία μικρής παραμόρφωσης*** λέει ότι:

$$\|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}\| = \varepsilon << 1,\ \forall\ \vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}$$

❑ <u>Παρατηρήσεις</u>

$$\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{1} - \left(\boldsymbol{1} + \nabla\vec{\boldsymbol{u}}\right)^{-1} \Rightarrow \operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{u}} \doteq \nabla\vec{\boldsymbol{u}}, \quad \text{όπου } (\doteq) \text{ σημαίνει } +\mathbb{O}(\varepsilon^2)$$

$$\boldsymbol{E} \doteq \underset{\sim}{\boldsymbol{e}} \doteq \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\boldsymbol{u}} + (\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T\right], \qquad \boldsymbol{U} \doteq \boldsymbol{V} \doteq \boldsymbol{1} + \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\boldsymbol{u}} + (\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T\right]$$

$$\boldsymbol{R} \doteq \boldsymbol{1} - \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\boldsymbol{u}} - (\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T\right]$$

$$\lambda_{\vec{N}} = \sqrt{\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{N}}\cdot\vec{\boldsymbol{N}}} = \sqrt{1 + 2\boldsymbol{E}\vec{\boldsymbol{N}}\cdot\vec{\boldsymbol{N}}} \doteq 1 + \underset{\sim}{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{N}}\cdot\vec{\boldsymbol{N}}$$

$$\sin\gamma_{\vec{N}_1\vec{N}_2} \doteq 2\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{N}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{N}}_1 \cong \gamma_{\vec{N}_1\vec{N}_2}$$

❑ **<u>Ορισμοί</u>**

Τανυστής απειροστής ανηγμένης παραμόρφωσης (συμμετρικός):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\boldsymbol{u}} + (\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T\right]$$

Τανυστής απειροστής στροφής (αντισυμμετρικός):

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\boldsymbol{u}} - (\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T\right]$$

❑ **<u>Μεταβολή όγκου</u>:** $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}V} = \det\boldsymbol{F} = \sqrt{\det\boldsymbol{C}} \equiv \sqrt{III_C}$

$$III_C = \det\boldsymbol{C} = \det\left(2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{1}\right) = 2^3\det\left(\boldsymbol{E} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{1}\right) =$$

$$= 2^3[(\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^2 \underset{\mathbb{O}(\varepsilon)}{\underset{\downarrow}{I_E}} + (\tfrac{1}{2}) \underset{\mathbb{O}(\varepsilon^2)}{\underset{\downarrow}{II_E}} + \underset{\mathbb{O}(\varepsilon^3)}{\underset{\downarrow}{III_E}}]$$

$$\Rightarrow\ III_C \doteq 1 + 2I_E = 1 + 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}) = 1 + 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}V} \doteq \sqrt{1 + 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})} \cong 1 + \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})}$$

$$\mathit{Διόγκωση} \equiv \frac{\mathrm{d}\upsilon - \mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} \doteq \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16: ΝΟΜΟΙ-ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ Σ. Μ. & Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Μάζα: πρότυπη (βασική) εμπειρική έννοια περιγραφής του συνεχούς μέσου (την αισθανόμαστε, την κατανοούμε, δεν μπορούμε όμως να την ορίσουμε)

Πυκνότητα Μάζας: ένα βαθμωτό μέγεθος $\rho(\vec{X},t)>0$, που ορίζεται ως το πηλίκο της μάζας προς τον όγκο σε κάθε θέση του σώματος **B**, έτσι ώστε:

$$m(\mathbf{P_o})=\int_{\mathbf{P_o}}\rho_o\,\mathrm{d}V\,,\ \text{ όπου }\ \rho_o=\rho_o(\vec{X},0)=\rho_o(\vec{X})\ \text{... αρχική ή πυκνότητα αναφοράς}$$

$$m(\mathbf{P_t})=\int_{\mathbf{P_t}}\rho\,\mathrm{d}\upsilon\,,\ \text{ όπου }\ \rho=\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)=\hat{\rho}(\vec{X},t)\ \text{... τρέχουσα πυκνότητα (σε χρόνο } t\text{)}$$

ΑΞΙΩΜΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

$$\boxed{m(\mathbf{P_o})=m(\mathbf{P_t})=m(\mathbf{P})}\quad\forall\ \mathbf{P}\subseteq\mathbf{B}$$

… ολική (global) μορφή

$$\Rightarrow\int_{\mathbf{P_o}}\rho_o(\vec{X},0)\,\mathrm{d}V=\int_{\mathbf{P_t}}\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\,\mathrm{d}\upsilon\,,\quad[\text{με}\quad\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\big|_{t=0}=\rho_o(\vec{X},0)\,]$$

Ενδιαφέρει ο μετασχηματισμός της ολικής μορφής που ισχύει για $\forall\ \mathbf{P}\subseteq\mathbf{B}$ σε τοπική (local) εξίσωση που εκφράζει την εν λόγω αρχή $\forall\ \vec{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{B}\rightarrow$ ***εξίσωση πεδίου*** (διατήρησης της μάζας)

$$\int_{\mathbf{P_o}}\rho_o\,\mathrm{d}V=\int_{\mathbf{P_t}}\rho\,\mathrm{d}\upsilon\xrightarrow{\mathrm{d}\upsilon=(\det\boldsymbol{F})\mathrm{d}V}\int_{\mathbf{P_o}}\rho_o\,\mathrm{d}V=\int_{\mathbf{P_o}}\rho(\det\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}V\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{\mathbf{P_o}}\left[\rho_o-\rho(\det\boldsymbol{F})\right]\mathrm{d}V=0,\qquad\forall\ \mathbf{P_o}\subseteq\mathbf{B_o}$$

Θεωρώντας ότι η κίνηση και η πυκνότητα είναι τέτοιες ώστε η ποσότητα $\left[\rho_o - \rho(\det \boldsymbol{F})\right]$ να είναι συνεχής στο $\mathbf{B_o}$, προκύπτει:

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_o}{\det \boldsymbol{F}}, \qquad \forall\ \vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}}$$ ***... Lagrangean τοπική μορφή***

$$\rho(\det \boldsymbol{F}) = \rho_o \Rightarrow \overline{\rho(\det \boldsymbol{F})}^{\bullet} = 0 \Rightarrow \dot{\rho}(\det \boldsymbol{F}) + \rho \underbrace{\overline{(\det \boldsymbol{F})}^{\bullet}}_{(\det \boldsymbol{F})\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}}} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}(\det \boldsymbol{F}) + \rho(\det \boldsymbol{F})\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}} = 0$$

και επειδή $\det \boldsymbol{F} \neq 0$, προκύπτει ότι

$$\boxed{\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}} = 0, \qquad \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{B_t}}$$ ***... Eulerian τοπική μορφή***

Από τη σχέση υλικής & χωρικής ως προς χρόνο παράγωγο, υπενθυμίζεται ότι $\dot{\rho} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (\operatorname{grad}\rho)\cdot\vec{\boldsymbol{v}}$, οπότε η παραπάνω Eulerian τοπική μορφή του ισοζυγίου μάζας μπορεί να γραφτεί ως $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{(\operatorname{grad}\rho)\cdot\vec{\boldsymbol{v}} + \rho \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}}}_{\operatorname{div}(\rho\vec{\boldsymbol{v}})} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{\boldsymbol{v}}) = 0, \qquad \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{B_t}}$$ ***... Eulerian τοπική μορφή (άλλος τρόπος γραφής)***

Ορισμός: *Ένα* ***υλικό*** ονομάζεται ***ασυμπίεστο*** αν και μόνο αν:

$$\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{X}},t) = 0, \quad \text{δηλ.} \quad \rho = \rho_o(\vec{\boldsymbol{X}}), \quad \forall\ \vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}$$

Θεώρημα: Ένα ασυμπίεστο υλικό υφίσταται μόνο ισόχωρες κινήσεις

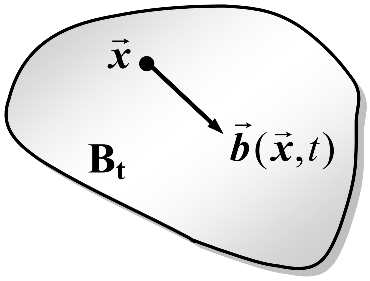
Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ασυμπιεστότητας ($\dot{\rho} = 0$), από το ισοζύγιο μάζας ($\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}} = 0$) προκύπτει: $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}} = 0 \Leftrightarrow$ ισόχωρη κίνηση

2. ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΔΥΝΑΜΗ & ΤΑΣΗ

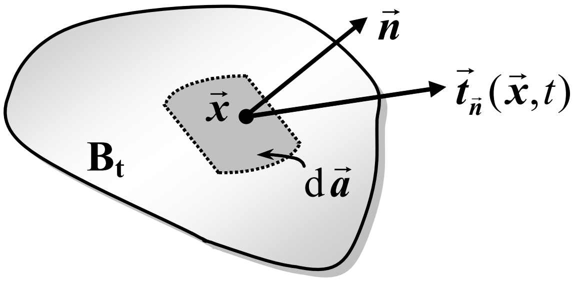
Δύναμη: πρότυπη (βασική) εμπειρική έννοια περιγραφής του συνεχούς μέσου (όπως, οι προαναφερόμενες έννοιες του χώρου, του χρόνου & της μάζας)

Οι δυνάμεις διακρίνονται σε ***μαζικές*** & ***επιφανειακές***. Αυτός ο διαχωρισμός μπορεί να αναφερθεί ως ένα επιπλέον αξίωμα της μηχανικής του συνεχούς μέσου

- **Μαζικές δυνάμεις (body forces) ή δυνάμεις πεδίου, $\vec{b}(\vec{x},t)$:** προέρχονται από τον εξωτερικό για το σώμα κόσμο [δηλ. από ένα <u>εξωτερικό πεδίο</u> δυνάμεων, π.χ. ηλεκτρομαγνητικό, βαρυτικό, κλπ], εκφράζονται ως δύναμη ανά μονάδα μάζας & ενεργούν σε κάθε σημείο $\vec{x} \in \mathbf{B_t}$

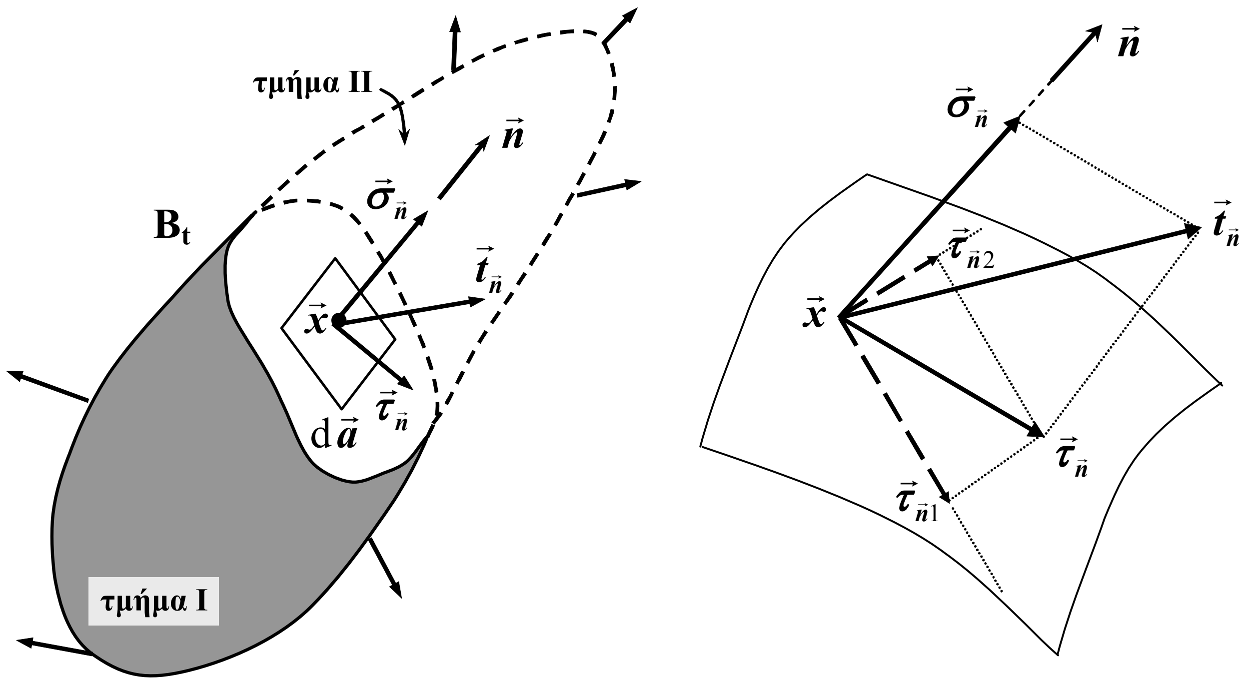


- **Επιφανειακές ή δυνάμεις επαφής (contact forces), $\vec{t}_{\vec{n}}(\vec{x},t)$:** αμοιβαίες πιέσεις (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) μεταξύ γειτονικών σημείων στο $\vec{x} \in \mathbf{B_t}$ ή γενικά μεταξύ σωμάτων που εφάπτονται [επιφάνεια επαφής = ιδεατή επιφάνεια στο εσωτερικό του $\mathbf{B_t}$ ή οριακή (εξωτερική) επιφάνεια του $\mathbf{B_t}$].



Επιπλέον, αντιπροσωπεύουν ένα *φαινομενολογικό μέσο όρο* των μοριακών δυνάμεων μεταξύ γειτονικών υλικών σημείων (δυνάμεις συνοχής). Άλλα ονόματα για τη δύναμη επαφής είναι η ***επιφανειακή έλξη*** και το ***διάνυσμα τάσης***.

Για να προσδιορίζουμε τις δυνάμεις επαφής που αναπτύσσονται σε ένα σημείο $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$, φέρνουμε μια υποθετική τομή που περιέχει το $\boldsymbol{x}$ και χωρίζει το $\mathbf{B_t}$ σε 2 τμήματα Ι & ΙΙ. Το τμήμα ΙΙ ασκεί στο τμήμα Ι (μέσω της επιφάνειας της τομής) εσωτερικές δυνάμεις που η κατανομή τους είναι συνεχής, αλλά γενικά ανομοιόμορφη



Το διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ μπορεί να αναλυθεί σε ένα διάνυσμα τάσης $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ κάθετο στην $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}a$ και σε ένα διάνυσμα τάσης $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ εφαπτόμενο στην $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}}$ το οποίο, με τη σειρά του, αναλύεται σε δύο διανύσματα τάσης $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\vec{n}1}$ & $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\vec{n}2}$ κατά μήκος δύο υλικών γραμμών που ορίζουν την $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}}$. Αυτή η ανάλυση εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας επαφής, δηλ. από τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\boldsymbol{n}}$ το οποίο είναι κάθετο στη στοιχειώδη επιφάνεια $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}a$ γύρω από το $\vec{\boldsymbol{x}}$.

$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) \equiv$ ***ορθή τάση***

$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ ή $\{\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\vec{n}1},\, \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\vec{n}2}\} \equiv$ ***διατμητικές τάσεις***

ΟΡΙΣΜΟΙ

❖ ***Συνισταμένη Δύναμη*** σε ένα τμήμα $\mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$

$$\vec{\boldsymbol{f}}(\mathbf{P_t}) \equiv \underbrace{\int_{\mathbf{P_t}} \rho \vec{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}\upsilon}_{\vec{f}_b(\mathbf{P_t})} + \underbrace{\int_{\partial \mathbf{P_t}} \vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}\,\mathrm{d}a}_{\vec{f}_c(\mathbf{P_t})}$$

$\vec{\boldsymbol{f}}_b(\mathbf{P_t})$ … συνολική μαζική δύναμη στο $\mathbf{P_t}$

$\vec{\boldsymbol{f}}_c(\mathbf{P_t})$ … συνολική δύναμη επαφής στο $\mathbf{P_t}$

❖ ***Συνισταμένη Ροπή*** γύρω από το σημείο $\vec{\boldsymbol{o}}$ σε ένα τμήμα $\mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$

$$\vec{\boldsymbol{m}}(\mathbf{P_t};\vec{\boldsymbol{o}}) \equiv \underbrace{\int_{\mathbf{P_t}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \times \rho \vec{\boldsymbol{b}} \right] \mathrm{d}\upsilon}_{\vec{m}_b(\mathbf{P_t};\vec{o})} + \underbrace{\int_{\partial \mathbf{P_t}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \times \vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}} \right] \mathrm{d}a}_{\vec{m}_c(\mathbf{P_t};\vec{o})}$$

$\vec{\boldsymbol{m}}_b(\mathbf{P_t};\vec{\boldsymbol{o}})$ … συνολική ροπή μαζικών δυνάμεων στο $\mathbf{P_t}$ γύρω από το $\boldsymbol{o}$

$\vec{\boldsymbol{m}}_c(\mathbf{P_t};\vec{\boldsymbol{o}})$ … συνολική ροπή δυνάμεων επαφής στο $\mathbf{P_t}$ γύρω από το $\boldsymbol{o}$

❖ ***(Γραμμική) Ορμή*** ενός τμήματος $\mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$

$$\vec{\boldsymbol{l}}(\mathbf{P_t}) \equiv \int_{\mathbf{P_t}} \rho \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\upsilon$$

❖ ***Ροπή Ορμής* (ή *Στροφορμή*)** γύρω από το $\vec{\boldsymbol{o}}$ σε ένα τμήμα $\mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$

$$\vec{\boldsymbol{h}}(\mathbf{P_t};\vec{\boldsymbol{o}}) \equiv \int_{\mathbf{P_t}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \times \rho \vec{\boldsymbol{v}} \right] \mathrm{d}\upsilon$$

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΣΗ

Έχει ήδη αναφερθεί ότι οι έννοιες του χωροχρόνου, της μάζας και της δύναμης λαμβάνονται ως βασικές στην παρούσα θεώρηση. Αντίθετα ποσότητες όπως κίνηση, ταχύτητα, επιτάχυνση, παραμόρφωση, πυκνότητα μάζας, ροπή, ορμή, στροφορμή θεωρούνται μαθηματικά παράγωγα των παραπάνω βασικών εννοιών.

Σε όλες τις θεωρίες οι ***βασικές ποσότητες*** συνδέονται μεταξύ τους με ***αξιωματικές εκφράσεις***, οι οποίες πηγάζουν εμπειρικά. Για παράδειγμα, λαμβάνοντας την έννοια της μάζας ως βασική, διατυπώθηκε το αξίωμα διατήρησης της. Ομοίως, μπορούν να διατυπωθούν αξιώματα που αναφέρονται στη συσχέτιση των ***δυνάμεων με την κίνηση***. Το κίνητρο προήλθε από την κλασσική Νευτώνεια Μηχανική. Στη μηχανική του συνεχούς μέσου τα αξιώματα δύναμης - κίνησης διατυπώθηκαν αρχικά από τον Euler και έχουν την ακόλουθη μορφή:

❖ Αξιώματα Euler

Ολική (global) μορφή

E$_1$: $\boxed{\vec{\boldsymbol{f}}(\mathbf{P_t}) = \dot{\vec{\boldsymbol{l}}}(\mathbf{P_t})}$ … Νόμος ισοζυγίου (γραμμικής) ορμής

E$_2$: $\boxed{\vec{\boldsymbol{m}}(\mathbf{P_t};\vec{\boldsymbol{o}}) = \dot{\vec{\boldsymbol{h}}}(\mathbf{P_t};\vec{\boldsymbol{o}})}$ … Νόμος ισοζυγίου στροφορμής

Διατύπωση σε ολοκληρωτική μορφή

$$\dot{\vec{\boldsymbol{l}}}(\mathbf{P_t}) = \overline{\int_{\mathbf{P_t}} \rho\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\upsilon}^{\,\bullet} = \overline{\int_{\mathbf{P_o}} \rho\vec{\boldsymbol{v}}(\det\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}V}^{\,\bullet} = \int_{\mathbf{P_o}} \overline{\rho\vec{\boldsymbol{v}}(\det\boldsymbol{F})}^{\,\bullet}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_o}} \overline{\rho_o\vec{\boldsymbol{v}}}^{\,\bullet}\,\mathrm{d}V =$$

$$= \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_t}} \frac{\rho_o}{\det\boldsymbol{F}}\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}\,\mathrm{d}\upsilon = \int_{\mathbf{P_t}} \rho\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}\,\mathrm{d}\upsilon$$

$$\therefore\quad \mathrm{E}_1 \;\Rightarrow\; \boxed{\int_{\mathbf{P_t}} \rho\vec{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}\upsilon + \int_{\partial\mathbf{P_t}} \vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}\,\mathrm{d}a = \int_{\mathbf{P_t}} \rho\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}\,\mathrm{d}\upsilon} \quad \forall\,\mathbf{P_t}\subseteq\mathbf{B_t}$$

… ολοκληρωτική μορφή του E$_1$

$$\dot{\vec{\boldsymbol{h}}}(\mathbf{P_t};\vec{\boldsymbol{o}}) = \overline{\int_{\mathbf{P_t}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\rho\vec{\boldsymbol{v}}\right]\mathrm{d}\upsilon}^{\,\bullet} = \overline{\int_{\mathbf{P_o}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\rho\vec{\boldsymbol{v}}\right](\det\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}V}^{\,\bullet} =$$

$$= \int_{\mathbf{P_o}} \overline{\left[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\rho_o\vec{\boldsymbol{v}}\right]}^{\,\bullet}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_o}} \left[\vec{\boldsymbol{v}}\times\rho_o\vec{\boldsymbol{v}} + (\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\rho_o\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}\right]\mathrm{d}V =$$

$$= \int_{\mathbf{P_o}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \times \rho_o \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} \right] \mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_t}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \times \frac{\rho_o}{\det \boldsymbol{F}} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} \right] \mathrm{d}\upsilon = \int_{\mathbf{P_t}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \times \rho \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} \right] \mathrm{d}\upsilon$$

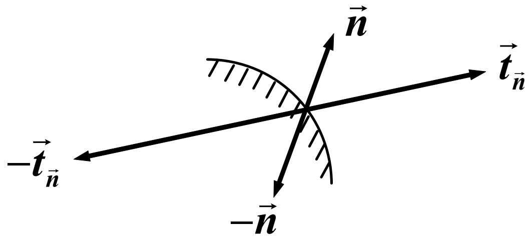
$$\therefore \quad \mathrm{E}_2 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\int_{\mathbf{P_t}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \times \rho \vec{\boldsymbol{b}} \right] \mathrm{d}\upsilon + \int_{\partial \mathbf{P_t}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \times \vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{\boldsymbol{n}}} \right] \mathrm{d}a = \\ &\qquad\qquad = \int_{\mathbf{P_t}} \left[(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \times \rho \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} \right] \mathrm{d}\upsilon \end{aligned}} \qquad \forall\, \mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$$

… ολοκληρωτική μορφή του E_2

Ως αποτελέσματα των E_1 & E_2 προκύπτουν τα παρακάτω βασικά θεωρήματα της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου:

- **Θεώρημα Δράσης - Αντίδρασης (Cauchy's Reciprocal Theorem)**

$$\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = -\vec{\boldsymbol{t}}_{-\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$$



- **Θεώρημα Ύπαρξης του Τανυστή Τάσης**

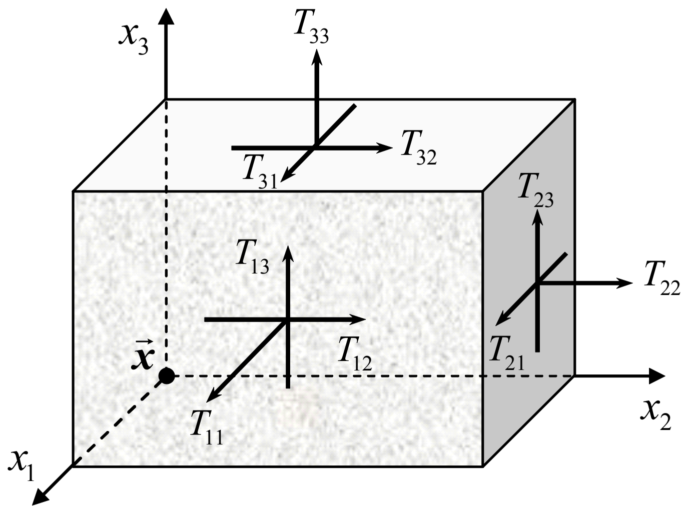
Έστω $\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$, $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ & $\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \in \mathrm{C}^0(\mathbf{B_t})$ & $\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \in \mathrm{C}^1(\mathbf{B_t})$ $\forall\, t$. Τότε, υπάρχει ένας τανυστής $\boldsymbol{T}$ (τανυστής τάσης), για τον οποίο:

$$\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \boldsymbol{T}^T(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{n}} \qquad (\text{δηλ. } \ t_i = T_{ji} n_j) \quad \text{στο } \mathbf{B_t}$$

δηλ. το διάνυσμα τάσης $\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ εξαρτάται γραμμικά από το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{n}}$ το οποίο ορίζει τον προσανατολισμό της στοιχειώδους επιφανείας $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}}$ που περνάει από το $\vec{\boldsymbol{x}}$ & ο συντελεστής γραμμικότητας $\boldsymbol{T}^T(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ είναι ο τανυστής τάσης

Γεωμετρική αναπαράσταση του τανυστή τάσης

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο με ακμές $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, γύρω από το $\vec{x}$. Σε κάθε έδρα ασκείται από το υπόλοιπο σώμα ένα διάνυσμα τάσης το οποίο μπορεί να αναλυθεί κατά τη διεύθυνση των αξόνων. Οι προκύπτουσες συνιστώσες συμβολίζονται ως T_{ij}, όπου το i δηλώνει τη διεύθυνση της κάθετης στην εκάστοτε έδρα & το j δηλώνει τη διεύθυνση της συνιστώσας



$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου} \quad T_{ij} = \begin{cases} \text{ορθή τάση}, & \text{αν } i = j \\ \text{διατμητική τάση}, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

❖ Εύρεση της Τοπικής Μορφής του Αξιώματος Διατήρησης Ορμής

Περιγραφή κατά Euler

$$\mathrm{E}_1: \quad \int_{\mathbf{P_t}} \rho \vec{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}\upsilon + \underbrace{\int_{\partial \mathbf{P_t}} \vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}\,\mathrm{d}a}_{(L)} = \int_{\mathbf{P_t}} \rho \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}\,\mathrm{d}\upsilon, \qquad \forall\, \mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t} \qquad (*)$$

$$(\mathrm{L}) = \int_{\partial \mathbf{P_t}} \boldsymbol{T}^T(\vec{\boldsymbol{x}},t)\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}a = \int_{\mathbf{P_t}} (\mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^T)\,\mathrm{d}\upsilon \qquad \text{... χρήση θεωρήματος απόκλισης}$$

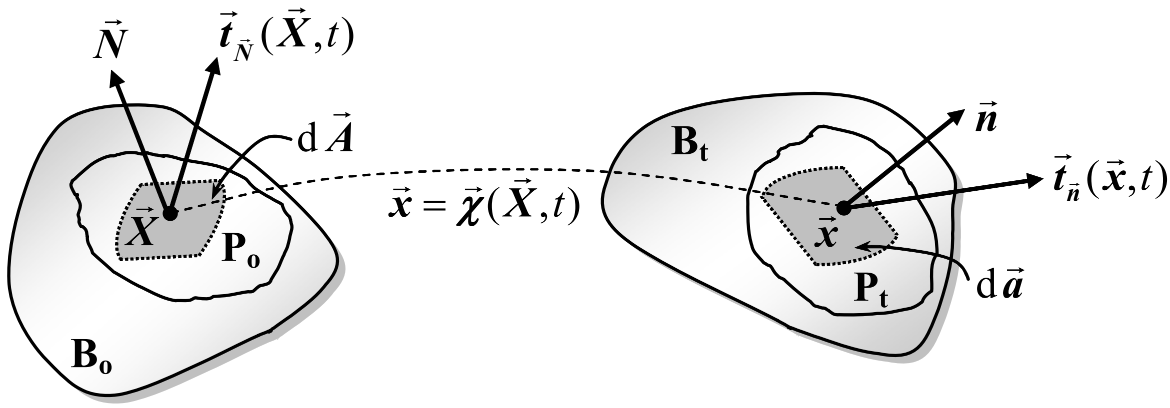
$$(*) \Rightarrow \int_{\mathbf{P_t}} \rho \vec{\boldsymbol{b}} \, \mathrm{d}\upsilon + \int_{\mathbf{P_t}} (\mathrm{div}\, \boldsymbol{T}^T) \, \mathrm{d}\upsilon = \int_{\mathbf{P_t}} \rho \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} \, \mathrm{d}\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{P_t}} (\mathrm{div}\, \boldsymbol{T}^T + \rho \vec{\boldsymbol{b}} - \rho \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}) \, \mathrm{d}\upsilon = \vec{\boldsymbol{o}}, \qquad \forall\, \mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$$

Θεωρώντας ότι κάθε συνιστώσα του διανύσματος $(\mathrm{div}\, \boldsymbol{T}^T + \rho \vec{\boldsymbol{b}} - \rho \dot{\vec{\boldsymbol{v}}})$ είναι συνεχής στο $\mathbf{B_t}$, προκύπτει η ***Eulerian τοπική μορφή του E_1***:

$$\boxed{\mathrm{div}\, \boldsymbol{T}^T + \rho \vec{\boldsymbol{b}} = \rho \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}, \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t},\ \forall\, t}$$

Περιγραφή κατά Lagrange



$$\left.\begin{array}{l} \vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}} \, \mathrm{d}a = \boldsymbol{T}^T \vec{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}a = \boldsymbol{T}^T \, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}} \\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}} = (\det \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F}^{-1})^T \, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}} \, \mathrm{d}a = \underbrace{\boldsymbol{T}^T (\det \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F}^{-1})^T}_{\boldsymbol{S}^T} \, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}} \, \mathrm{d}a = \boldsymbol{T}^T \, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{S}^T \, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}}$$

$\boldsymbol{S} = (\det \boldsymbol{F}) \boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{T}$ ... ***πρώτος τανυστής τάσης Piola-Kirchhoff*** [μηχανική ή ονομαστική τάση $\to$ δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας αναφοράς]

$\boldsymbol{T}$ ... ***τανυστής τάσης Cauchy*** [πραγματική ή αληθής τάση $\to$ δύναμη ανά μονάδα τρέχουσας επιφάνειας]

Δεδομένου ότι $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{N}} \, \mathrm{d}A$, προκύπτει ότι

$$\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{T}^T \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{S}^T \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}A \qquad (**)$$

$\boldsymbol{S}^T \vec{\boldsymbol{N}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}\,\mathrm{d}a}{\mathrm{d}A}$ $\rightarrow$ δύναμη που ασκείται στο $\boldsymbol{x} \in \mathbf{B_t}$ ανά μονάδα επιφάνειας αναφοράς, η οποία ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{\boldsymbol{N}}$ στο $\vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}$ [μηχανική ή ονομαστική έλξη]

$\boldsymbol{T}^T \vec{\boldsymbol{n}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}\,\mathrm{d}a}{\mathrm{d}a}$ $\rightarrow$ δύναμη που ασκείται στο $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$ ανά μονάδα τρέχουσας επιφάνειας, η οποία ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{\boldsymbol{n}}$ στο $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$ [πραγματική ή αληθής έλξη]

Λόγω της (**) και του ισοζυγίου μάζας: $\rho = \dfrac{\rho_o}{\det \boldsymbol{F}} \Rightarrow \rho\,\mathrm{d}\upsilon = \rho_o\,\mathrm{d}V$, η εξίσωση (*) γίνεται:

$$\int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \vec{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}V + \underbrace{\int_{\partial\mathbf{P_o}} \boldsymbol{S}^T \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}A}_{(2)} = \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}\,\mathrm{d}V, \qquad \forall\, \mathbf{P_o} \subseteq \mathbf{B_o} \qquad (\#)$$

$(2) = \int_{\mathbf{P_o}} (\mathrm{DIV}\,\boldsymbol{S}^T)\,\mathrm{d}V$ ... χρήση θεωρήματος απόκλισης

όπου DIV $\equiv$ απόκλιση ως προς $\vec{\boldsymbol{X}}$

$$(\#) \Rightarrow \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \vec{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathbf{P_o}} (\mathrm{DIV}\,\boldsymbol{S}^T)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}\,\mathrm{d}V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{P_o}} (\mathrm{DIV}\,\boldsymbol{S}^T + \rho_o \vec{\boldsymbol{b}} - \rho_o \dot{\vec{\boldsymbol{v}}})\,\mathrm{d}V = \vec{\boldsymbol{o}}, \qquad \forall\, \mathbf{P_o} \subseteq \mathbf{B_o}$$

Θεωρώντας ότι κάθε συνιστώσα του διανύσματος $(\mathrm{DIV}\,\boldsymbol{S}^T + \rho_o \vec{\boldsymbol{b}} - \rho_o \dot{\vec{\boldsymbol{v}}})$ είναι συνεχής στο $\mathbf{B_o}$, προκύπτει η ***Lagrangean τοπική μορφή του*** $\boldsymbol{E_1}$:

$$\boxed{\mathrm{DIV}\,\boldsymbol{S}^T + \rho_o \vec{\boldsymbol{b}} = \rho_o \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}, \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o},\ \forall\, t}$$

❖ Εύρεση της Τοπικής Μορφής του Νόμου Ισοζυγίου της Στροφορμής

E$_2$: $\int\limits_{\mathbf{P_t}}\left[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\rho\vec{\boldsymbol{b}}\right]\mathrm{d}\upsilon+\int\limits_{\partial\mathbf{P_t}}\left[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{\boldsymbol{n}}}\right]\mathrm{d}a=\int\limits_{\mathbf{P_t}}\left[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\rho\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}\right]\mathrm{d}\upsilon$ (\$)

$\forall\,\mathbf{P_t}\subseteq\mathbf{B_t}$

Όμως για το 2$^{\text{ο}}$ ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$\int\limits_{\partial\mathbf{P_t}}\left[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{\boldsymbol{n}}}\right]\mathrm{d}a=\int\limits_{\partial\mathbf{P_t}}(\varepsilon_{ijk}x_j\underbrace{t_k}_{T_{mk}\hat{n}_m}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i)\mathrm{d}a=\int\limits_{\partial\mathbf{P_t}}(\varepsilon_{ijk}x_jT_{mk}n_m\vec{\boldsymbol{\imath}}_i)\mathrm{d}a=\int\limits_{\partial\mathbf{P_t}}\boldsymbol{\Phi}\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}a$$

όπου: $\boldsymbol{\Phi}=\underbrace{\varepsilon_{ijk}x_jT_{mk}}_{\Phi_{im}}(\vec{\boldsymbol{\imath}}_i\otimes\vec{\boldsymbol{\imath}}_m)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης στο τελευταίο ολοκλήρωμα, προκύπτει:

$$\int\limits_{\partial\mathbf{P_t}}\left[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{\boldsymbol{n}}}\right]\mathrm{d}a=\int\limits_{\mathbf{P_t}}(\mathrm{div}\boldsymbol{\Phi})\mathrm{d}\upsilon=\int\limits_{\mathbf{P_t}}\Phi_{im,m}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i\,\mathrm{d}\upsilon=\int\limits_{\mathbf{P_t}}(\varepsilon_{ijk}x_jT_{mk})_{,m}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}_i\,\mathrm{d}\upsilon=$$

$$=\int\limits_{\mathbf{P_t}}(\varepsilon_{ijk}\underbrace{x_{j,m}}_{\delta_{jm}}T_{mk}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i+\underbrace{\varepsilon_{ijk}x_jT_{mk,m}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i}_{(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times(\mathrm{div}\boldsymbol{T}^T)})\mathrm{d}\upsilon=\int\limits_{\mathbf{P_t}}(\varepsilon_{ijk}T_{jk}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i)\mathrm{d}\upsilon+\int\limits_{\mathbf{P_t}}\left[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\mathrm{div}\boldsymbol{T}^T\right]\mathrm{d}\upsilon$$

Επομένως η (\$) γίνεται:

$$\int\limits_{\mathbf{P_t}}(\varepsilon_{ijk}T_{jk}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i)\mathrm{d}\upsilon+\int\limits_{\mathbf{P_t}}[(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{o}})\times\underbrace{(\mathrm{div}\boldsymbol{T}^T+\rho\vec{\boldsymbol{b}}-\rho\dot{\vec{\boldsymbol{v}}})}_{=\vec{\boldsymbol{o}}}]\mathrm{d}\upsilon=\vec{\boldsymbol{o}}$$

$$\therefore\quad\int\limits_{\mathbf{P_t}}(\varepsilon_{ijk}T_{jk}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i)\mathrm{d}\upsilon=\vec{\boldsymbol{o}},\qquad\forall\,\mathbf{P_t}\subseteq\mathbf{B_t}$$

Θεωρώντας ότι κάθε συνιστώσα του διανύσματος $\varepsilon_{ijk}T_{jk}\vec{\boldsymbol{\imath}}_i$ είναι συνεχής στο $\mathbf{B_t}$, προκύπτει:

$$\varepsilon_{ijk}T_{jk}=0\Rightarrow\left\{T_{23}-T_{32}=0,\quad T_{31}-T_{13}=0,\quad T_{12}-T_{21}=0\right\}$$

δηλ. $T_{ij}=T_{ji}$. Άρα, ο τανυστής τάσης $\boldsymbol{T}$ είναι συμμετρικός & η ***Eulerian τοπική μορφή του E$_2$*** γράφεται ως

$$\boxed{\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}},t)=\boldsymbol{T}^T(\vec{\boldsymbol{x}},t)\,, \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{x}}\in \mathbf{B_t},\ \forall\, t}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\boldsymbol{S}=(\det \boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{T}=(\det \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}$$

λαμβάνεται η αντίστοιχη ***Lagrangean τοπική μορφή του E$_2$***:

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{X}},t)\,\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{X}},t)=\boldsymbol{S}^T(\vec{\boldsymbol{X}},t)\,\boldsymbol{F}^T(\vec{\boldsymbol{X}},t), \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{X}}\in \mathbf{B_o},\ \forall\, t}$$

Παρατήρηση: Γενικά ο πρώτος τανυστής τάσης Piola-Kirchhoff είναι μη-συμμετρικός, δηλ. $\boldsymbol{S}\neq\boldsymbol{S}^T$

3. ΚΥΡΙΕΣ ΤΑΣΕΙΣ & ΚΥΡΙΟΙ ΑΞΟΝΕΣ

Επειδή $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^T$, ο τανυστής τάσης $\boldsymbol{T}$ έχει τρεις πραγματικές ιδιοτιμές $\{t_i\}$ και τρία πραγματικά & ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\{\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_i\}$, ως προς τη βάση των οποίων μπορεί να γραφεί στη διαγώνια μορφή:

$$\boldsymbol{T}=t_1\,\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1\otimes\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1+t_2\,\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_2\otimes\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_2+t_3\,\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_3\otimes\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_3=\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0\\ 0 & t_2 & 0\\ 0 & 0 & t_3\end{bmatrix}$$

δηλ. σε μια μορφή που οι διατμητικές τάσεις είναι μηδέν. Οι ορθογώνιοι άξονες των $\{\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_i\}$ αποτελούν το σύστημα των **κύριων αξόνων** & τα στοιχεία-ιδιοτιμές $\{t_i\}$ του $\boldsymbol{T}$ ονομάζονται **κύριες τάσεις**. Τα επίπεδα που είναι κάθετα στα $\{\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_i\}$ ονομάζονται **κύρια επίπεδα**. Σε αυτά δρουν μόνο οι αντίστοιχες κύριες τάσεις (ορθές), αφού οι *διατμητικές τάσεις είναι μηδέν*.

Επομένως, οι κύριες τάσεις $\{t_i\}$ βρίσκονται από τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης: $-t^3+I_{\boldsymbol{T}}t^2-II_{\boldsymbol{T}}t+III_{\boldsymbol{T}}=0$, όπου $I_{\boldsymbol{T}},II_{\boldsymbol{T}},III_{\boldsymbol{T}}$ είναι οι βασικές αναλλοίωτες του $\boldsymbol{T}$ (δηλ. ποσότητες που έχουν την ίδια τιμή ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο είναι εκφρασμένος ο $\boldsymbol{T}$)*:

$$I_{\boldsymbol{T}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}), \qquad II_{\boldsymbol{T}} = \tfrac{1}{2}\left(\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})\right]^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^2)\right), \qquad III_{\boldsymbol{T}} = \det \boldsymbol{T}$$

4. ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΑΣ ΤΑΣΗΣ

Ο τανυστής τάσης $\boldsymbol{T}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα $\boldsymbol{T}_{hyd} + \boldsymbol{T}_{dev}$, όπου

$\boldsymbol{T}_{hyd}$ = Τανυστής υδροστατικής τάσης, ο οποίος για ένα ισοτροπικό Σ.Μ. προκαλεί αλλαγές στον όγκο χωρίς αλλαγές στο σχήμα

$\boldsymbol{T}_{dev}$ = Τανυστής αποκλίνουσας τάσης, ο οποίος προκαλεί την αλλαγή στο σχήμα

$$\boldsymbol{T}_{hyd} = -P\boldsymbol{1} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_{dev} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_{hyd} = \boldsymbol{T} + P\boldsymbol{1} = \begin{bmatrix} T_{11}+P & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}+P & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}+P \end{bmatrix}$$

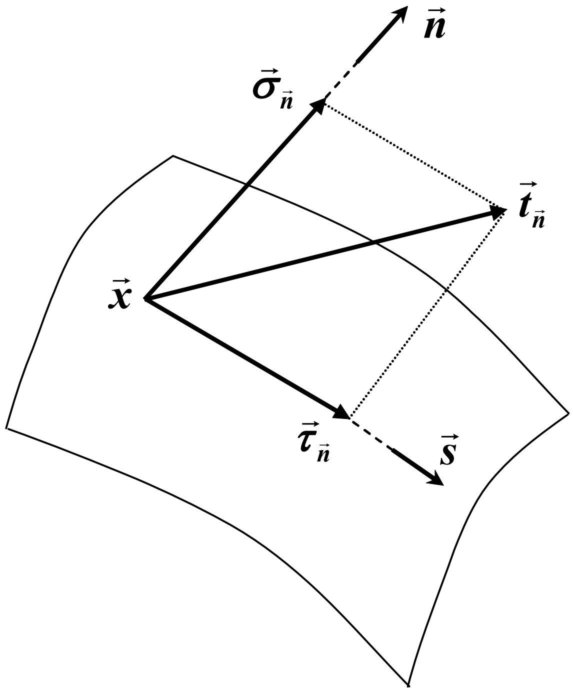
όπου: $-P = \dfrac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})}{3} = \dfrac{1}{3}T_{ii} = \dfrac{T_{11}+T_{22}+T_{33}}{3}$ ... μέση ορθή τάση

5. ΜΕΓΙΣΤΗ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ

Έστω $\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}$ το διάνυσμα τάσης σε μια επιφάνεια που το κάθετο σ’ αυτήν μοναδιαίο διάνυσμα είναι το $\vec{\boldsymbol{n}}$. Είδαμε ότι η $\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}$ μπορεί να αναλυθεί σε μια ορθή τάση $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\vec{n}} = \sigma\vec{\boldsymbol{n}}$ κάθετη στην επιφάνεια και σε μια διατμητική τάση $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\vec{n}} = \tau\vec{\boldsymbol{s}}$ πάνω στην επιφάνεια και ότι αυτή η ανάλυση εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας δηλ. από τη διεύθυνση του $\vec{\boldsymbol{n}}$.

---

* Άρα, οι κύριες τάσεις και οι κύριοι άξονες είναι επίσης αναλλοίωτες ποσότητες.



Η μέγιστη διατμητική τάση $\tau_{\max}$ είναι ίση με την ημιδιαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη κύρια τάση και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που διχοτομεί την ορθή γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις της μεγαλύτερης και της μικρότερης κύριας τάσης. Π.χ. αν $t_1 > t_2 > t_3$ τότε $\tau_{\max} = \dfrac{t_1 - t_3}{2}$ και βρίσκεται στο επίπεδο που διχοτομεί τη γωνία των κύριων διευθύνσεων $\vec{\hat{e}}_1$ και $\vec{\hat{e}}_3$.

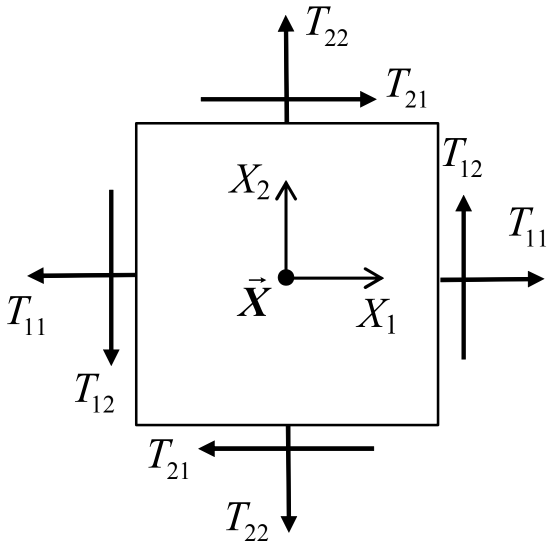
Επίσης, στο επίπεδο της $\tau_{\max}$, δρα μια ορθή τάση που είναι ίση με το ημιάθροισμα της μικρότερης και της μεγαλύτερης κύριας τάσης. Έτσι, για $t_1 > t_2 > t_3$, η ορθή τάση που δρα στο επίπεδο της $\tau_{\max}$ είναι ίση με $\sigma\big|_{\tau_{\max}} = \dfrac{t_1 + t_3}{2}$

6. ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Πολλά προβλήματα μπορούν να απλοποιηθούν θεωρώντας μια διδιάστατη κατάσταση για την τάση. Αυτή η συνθήκη συνήθως προσεγγίζεται στην πράξη όταν η μια διάσταση του Σ.Μ. είναι μικρότερη σε σχέση με τις άλλες, π.χ. μια λεπτή πλάκα στην οποία ασκούνται δυνάμεις μόνο παράλληλα με το επίπεδο της πλάκας. Θεωρώντας το επίπεδο (X_1, X_2) παράλληλο με εκείνο της πλάκας, έχουμε:

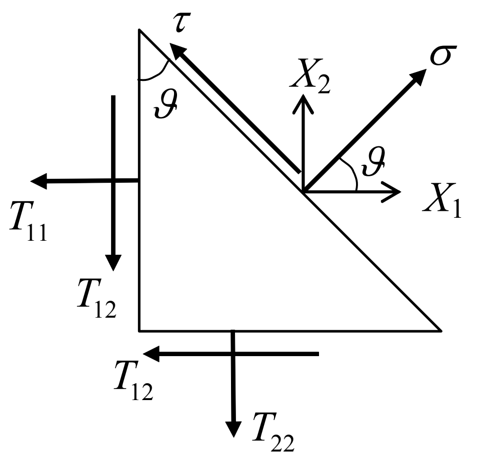
$$
\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Δηλαδή η εντατική κατάσταση σε κάθε υλικό σημείο $\vec{\boldsymbol{X}}$ μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια ενός τετραγώνου απειροστών διαστάσεων:



με $T_{21} = T_{12}$ λόγω της συμμετρίας του τανυστή τάσης $\boldsymbol{T}$.

Έστω ένα οποιοδήποτε στοιχειώδες επίπεδο κάθετο στο επίπεδο (X_1, X_2) που περνά από το $\vec{\boldsymbol{X}}$, και έστω ϑ η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στο επίπεδο με τον άξονα X_1. Όπως έχουμε δει, η συνολική τάση που ασκείται σε αυτό το στοιχειώδες επίπεδο μπορεί να αναλυθεί σε μια ορθή τάση σ και σε μια διατμητική τάση τ:



Αν A είναι το εμβαδόν του στοιχειώδους επιπέδου, τότε $A\cos\vartheta$ είναι το εμβαδόν της πλευράς που είναι κάθετη στον άξονα X_1 και $A\sin\vartheta$ είναι το εμβαδόν της πλευράς που είναι κάθετη στον άξονα X_2. Από την ισορροπία δυνάμεων κατά μήκος των αξόνων X_1 και X_2 έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(\sigma\cos\vartheta-\tau\sin\vartheta)A&=T_{11}A\cos\vartheta+T_{12}A\sin\vartheta\\(\sigma\sin\vartheta+\tau\cos\vartheta)A&=T_{22}A\sin\vartheta+T_{12}A\cos\vartheta\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma=T_{11}\cos^2\vartheta+T_{22}\sin^2\vartheta+2T_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta\\ \tau=(T_{22}-T_{11})\sin\vartheta\cos\vartheta+T_{12}(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)\end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

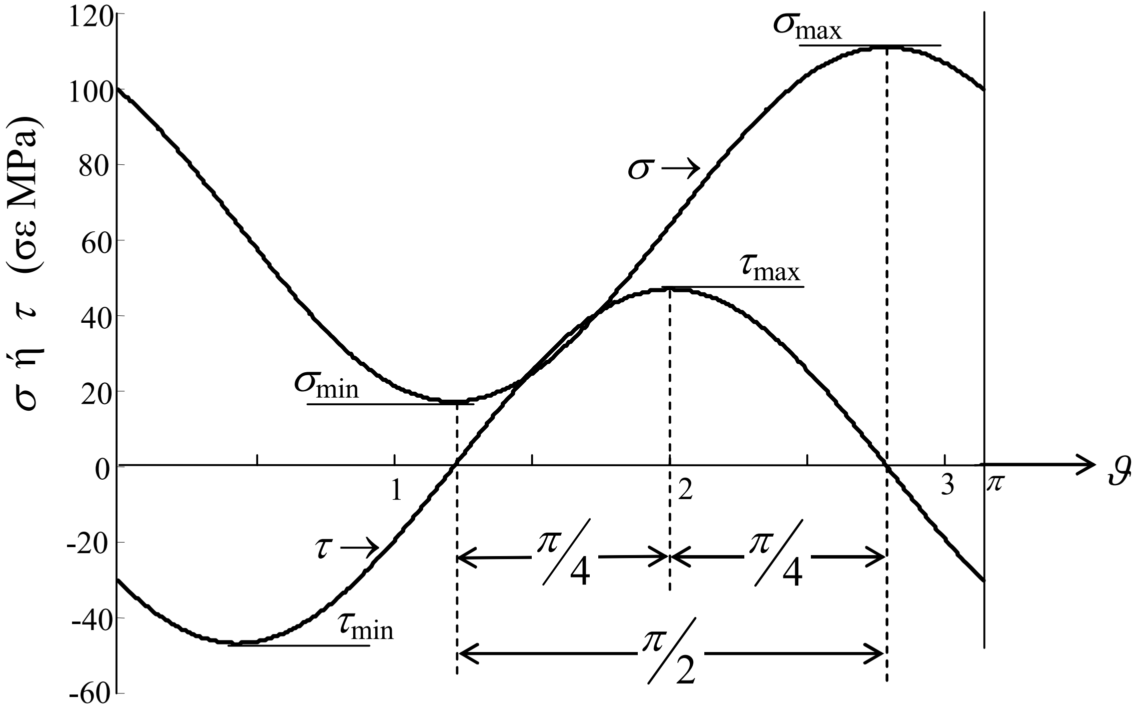
$$\cos^2\vartheta=\frac{1+\cos2\vartheta}{2},\qquad \sin^2\vartheta=\frac{1-\cos2\vartheta}{2},$$

$$2\sin\vartheta\cos\vartheta=\sin2\vartheta,\qquad \cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta=\cos2\vartheta$$

οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως:

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\frac{T_{11}+T_{22}}{2}+\frac{T_{11}-T_{22}}{2}\cos2\vartheta+T_{12}\sin2\vartheta\\ \tau&=\frac{T_{22}-T_{11}}{2}\sin2\vartheta+T_{12}\cos2\vartheta\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Παράδειγμα για
$T_{11} = 100$ MPa, $T_{22} = 28$ MPa, $T_{12} = -30$ MPa



❖ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Για οποιαδήποτε επίπεδη εντατική κατάσταση ισχύουν τα εξής:

- Η ορθή τάση σ και η διατμητική τάση τ μεταβάλλονται περιοδικά με τη γωνία ϑ, έχοντας περίοδο ίση με π.
- Η μέγιστη & η ελάχιστη τιμή ορθής τάσης συμβαίνει όταν η διατμητική τάση είναι μηδέν. Αν ϑ_p είναι η αντίστοιχη τιμή της ϑ, τότε η $(1)_2$ δίνει:

$$\tan 2\vartheta_p = \frac{2T_{12}}{T_{11} - T_{22}} \tag{2}$$

Οι λύσεις ϑ_p και $\vartheta_p + \dfrac{\pi}{2}$ ορίζουν δύο αμοιβαίως κάθετους άξονες, οι οποίοι είναι κάθετοι σε επίπεδα για τα οποία η διατμητική τάση είναι μηδέν. Άρα τα επίπεδα αυτά είναι κύρια επίπεδα, οι άξονες είναι κύριοι άξονες και οι τιμές $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ είναι κύριες τάσεις (δηλ. ιδιοτιμές του $\boldsymbol{T}$).

Από την (2) προκύπτει ότι

$$\sin 2\vartheta_p = \pm\frac{\tan 2\vartheta_p}{\sqrt{1+\tan^2 2\vartheta_p}} = \pm\frac{2T_{12}}{\sqrt{(T_{11}-T_{22})^2+4T_{12}^2}} \tag{3}$$

$$\cos 2\vartheta_p = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\vartheta_p}} = \pm\frac{(T_{11}-T_{22})}{\sqrt{(T_{11}-T_{22})^2+4T_{12}^2}} \tag{4}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις (3) και (4) στην εξίσωση $(1)_1$, βρίσκουμε τις εκφράσεις για τη μέγιστη & την ελάχιστη τιμή ορθής τάσης ως:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{T_{11}+T_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{T_{11}-T_{22}}{2}\right)^2 + T_{12}^2} \\ \sigma_{\min} &= \frac{T_{11}+T_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{T_{11}-T_{22}}{2}\right)^2 + T_{12}^2} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να τις υπολογίσουμε και με διαφορετικό τρόπο. Αφού οι $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ είναι ιδιοτιμές του $\boldsymbol{T}$, αρκεί να λύσουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $-t^3 + I_{\boldsymbol{T}}t^2 - II_{\boldsymbol{T}}t + III_{\boldsymbol{T}} = 0$, όπου οι βασικές αναλλοίωτες του $\boldsymbol{T}$ είναι ίσες με:

$$\begin{cases} I_{\boldsymbol{T}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) = T_{11} + T_{22} \\ II_{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}\left(\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})\right]^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^2)\right) = T_{11}T_{22} - T_{12}^2 \\ III_{\boldsymbol{T}} = \det \boldsymbol{T} = 0 \end{cases}$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης δίνουν τις κύριες τάσεις:

$$\left.\begin{aligned}
t_1 &= \frac{T_{11}+T_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{T_{11}-T_{22}}{2}\right)^2 + T_{12}^2} = \sigma_{\max} \\
t_2 &= \frac{T_{11}+T_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{T_{11}-T_{22}}{2}\right)^2 + T_{12}^2} = \sigma_{\min} \\
t_3 &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Για να βρούμε τους κύριους άξονες αρκεί να βρούμε τις διευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων $\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1, \vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_2$, και $\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_3$. Έτσι, έχουμε:

$$(\boldsymbol{T} - t_1\boldsymbol{1})\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1 = \vec{\boldsymbol{o}} \Rightarrow \vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ (t_1 - T_{11})/T_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \&\ T_{12} \neq 0$$

$$(\boldsymbol{T} - t_2\boldsymbol{1})\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_2 = \vec{\boldsymbol{o}} \Rightarrow \vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_2 = \lambda_2 \begin{bmatrix} (T_{11} - t_1)/T_{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 \in \mathbb{R}, \&\ T_{12} \neq 0^{*}$$

$$(\boldsymbol{T} - t_3\boldsymbol{1})\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_3 = \vec{\boldsymbol{o}} \Rightarrow \vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_3 = \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_3 \in \mathbb{R}, \text{ δηλ. ο άξονας } X_3$$

Η γωνία που σχηματίζει ο πρώτος κύριος άξονας με τον άξονα X_1 έχει συνημίτονο:

$$\cos(\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1, X_1) = \frac{\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1 \cdot \vec{\imath}_1}{\left|\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1\right|\left|\vec{\imath}_1\right|} = \pm \frac{T_{12}}{\sqrt{(t_1 - T_{11})^2 + T_{12}^2}}$$

[*] ***Σημείωση:*** Προφανώς στην περίπτωση που $T_{12} = 0$ έχουμε: $t_1 = T_{11}$, $t_2 = T_{22}$, $t_3 = 0$ και οι κύριοι άξονες ταυτίζονται με τους X_1, X_2, X_3, αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos 2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1$ και αντικαθιστώντας το t_1 από την εξίσωση $(6)_1$ προκύπτει ότι:

$$\cos[2(\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1, X_1)] = \frac{T_{11} - T_{22}}{\sqrt{\left(T_{11} - T_{22}\right)^2 + 4T_{12}^2}} \tag{7}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\cos[2(\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_2, X_1)] = -\frac{T_{11} - T_{22}}{\sqrt{\left(T_{11} - T_{22}\right)^2 + 4T_{12}^2}} \tag{8}$$

Συγκρίνοντας τις (7), (8) με την (4) συμπεραίνουμε ότι οι διευθύνσεις των $\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1, \vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_2$ είναι εκείνες που ορίζουν οι λύσεις ϑ_p και $\vartheta_p + \dfrac{\pi}{2}$ της εξίσωσης (2).

- Η **μέγιστη διατμητική τάση** είναι ίση με

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right)^2 + T_{12}^2}$$

και η **ελάχιστη διατμητική τάση** είναι ίση με

$$\tau_{\min} = -\tau_{\max} = -\sqrt{\left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right)^2 + T_{12}^2}$$

- Όπως οι $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$, έτσι και οι $\tau_{\max}, \tau_{\min}$ ασκούνται σε επίπεδα που είναι κάθετα μεταξύ τους.
- Οι $\tau_{\max}, \tau_{\min}$ ασκούνται στα επίπεδα που διχοτομούν τους κάθετους άξονες των $\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_1$ και $\vec{\hat{\boldsymbol{e}}}_2$, δηλ. στα επίπεδα που ορίζονται από τις γωνίες $\vartheta_p \pm \dfrac{\pi}{4}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17: ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (1^{ος} ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ): [θερμότητα $Q(\mathbf{P_t})$ που δίδεται σε κάθε ποσότητα ύλης $\mathbf{P_t}$] + [Έργο $W(\mathbf{P_t})$ που παρέχεται σε αυτήν την ποσότητα ύλης] = [Μεταβολή της ολικής ενέργειας $\Delta E_{ολ}(\mathbf{P_t})$ αυτής της ποσότητας ύλης], δηλ.

$$\boxed{Q(\mathbf{P_t}) + W(\mathbf{P_t}) = \Delta E_{ολ}(\mathbf{P_t})}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}(\mathbf{P_t}) + \dot{W}(\mathbf{P_t}) = \dot{E}_{ολ}(\mathbf{P_t}) \tag{1}$$

$Q, W \rightarrow$ αναφέρονται στην αλληλεπίδραση κάθε τμήματος του Σ.Μ. με το περιβάλλον του

$E_{ολ} \rightarrow$ σχετίζεται με τη μάζα του $\mathbf{P_t}$ & συνήθως χωρίζεται σε 2 μέρη:

$$E_{ολ} = E + K \tag{2}$$

όπου:

ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ: $E(\mathbf{P_t}) \rightarrow$ πρότυπη (βασική) εμπειρική έννοια περιγραφής του συνεχούς μέσου (όπως, οι προαναφερόμενες έννοιες του χώρου, του χρόνου, της μάζας & της δύναμης), η οποία σχετίζεται με τη μοριακή συμπεριφορά του υλικού

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ: ένα μέγεθος e, που ορίζεται ως εσωτερική ενέργεια / μον. μάζας σε κάθε θέση του σώματος **B**, έτσι ώστε:

$$E(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho e \, \mathrm{d}\upsilon \tag{3}$$

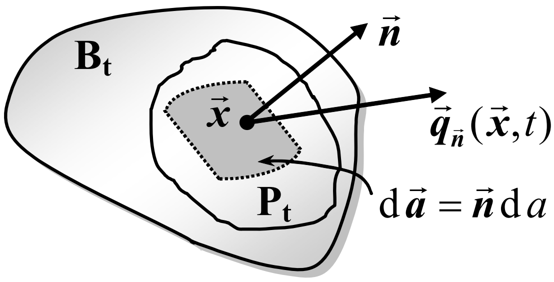
ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ: $K(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \, \mathrm{d}\upsilon$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΟΡΙΣΜΟΙ

ΘΕΡΜΑΝΣΗ $\dot{Q}(\mathbf{P_t})$: συνολικός ρυθμός ροής θερμότητας (θερμική ενέργεια / χρόνο) που παρέχεται στο $\mathbf{P_t}$

- **Ροή θερμότητας λόγω συναγωγής, $\vec{q}_{\vec{n}}(\vec{x},t)$:** ρυθμός ροής θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας μεταξύ γειτονικών σωματιδίων ύλης λόγω της επαφής τους (θερμότητα επαφής)

- **Ροή θερμότητας λόγω ακτινοβολίας, $r(\vec{x},t)$:** ρυθμός παραγωγής θερμότητας ανά μονάδα μάζας που οφείλεται στον εξωτερικό κόσμο (περιβάλλον). Π.χ. θερμότητα από μια ραδιενεργή πηγή, ηλιακή ακτινοβολία, κλπ.



$$\dot{Q}(\mathbf{P_t}) = \underbrace{\int_{\partial \mathbf{P_t}} -\vec{q}_{\vec{n}} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}a}_{\substack{\dot{Q}_c(\mathbf{P_t}) \\ \text{(λόγω αγωγιμότητας)}}} + \underbrace{\int_{\mathbf{P_t}} \rho r\,\mathrm{d}\upsilon}_{\substack{\dot{Q}_r(\mathbf{P_t}) \\ \text{(λόγω ακτινοβολίας)}}} = \int_{\mathbf{P_t}} \left(-\mathrm{div}\vec{q}_{\vec{n}} + \rho r\right)\mathrm{d}\upsilon \qquad (4)$$

Σημείωση: κατά σύμβαση το διάνυσμα $\vec{q}_{\vec{n}}$ έχει φορά προς τα έξω όταν εκλύεται θερμότητα από το Σ.Μ., και γι' αυτόν το λόγο έχουμε το αρνητικό πρόσημο (–) στον ορισμό του $\dot{Q}(\mathbf{P_t})$. Επιπλέον, συγκρίνετε αυτήν την εξίσωση με την έκφραση της συνισταμένης δύναμης $\vec{f}(\mathbf{P_t})$ και παρατηρήστε τις αντιστοιχίες: $\dot{Q}_c(\mathbf{P_t}) \rightarrow \vec{f}_c(\mathbf{P_t})$ & $\dot{Q}_r(\mathbf{P_t}) \rightarrow \vec{f}_b(\mathbf{P_t})$

ΙΣΧΥΣ (ή ΡΥΘΜΟΣ ΠΑΡΕΧΟΜΕΝΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΕΡΓΟΥ):

$$\dot{W}(\mathbf{P_t}) = \underbrace{\int_{\partial \mathbf{P_t}} (\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{\boldsymbol{n}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}a}_{\text{επιφανειακών δυνάμεων}} + \underbrace{\int_{\mathbf{P_t}} (\rho \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\upsilon}_{\text{μαζικών δυνάμεων}} = \int_{\partial \mathbf{P_t}} (\boldsymbol{T}^T \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}a + \int_{\mathbf{P_t}} (\rho \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\upsilon =$$

$$= \int_{\partial \mathbf{P_t}} (\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}a + \int_{\mathbf{P_t}} (\rho \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\upsilon = \int_{\mathbf{P_t}} \left[\mathrm{div}(\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{v}}) + \rho \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \right] \mathrm{d}\upsilon$$

Θεώρημα Ισχύος: $$\boxed{\dot{W}(\mathbf{P_t}) = \dot{K}(\mathbf{P_t}) + \int_{\mathbf{P_t}} (\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\upsilon} \qquad (5)$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\dot{K}(\mathbf{P_t}) = \overline{\int_{\mathbf{P_t}} \tfrac{1}{2}\rho |\vec{\boldsymbol{v}}|^2 \,\mathrm{d}\upsilon}^{\,\bullet} = \int_{\mathbf{P_o}} \tfrac{1}{2}\rho_o \overline{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}^{\,\bullet}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o (\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_t}} \rho (\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\upsilon$$

Επειδή: $\mathrm{div}(\boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{v}}) = (T_{ij} v_j),_i = T_{ij},_i\, v_j + T_{ij} v_j,_i = (\mathrm{div}\boldsymbol{T}^T) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}$

$$\Rightarrow \dot{W}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} [\underbrace{(\mathrm{div}\boldsymbol{T}^T + \rho \vec{\boldsymbol{b}})}_{\rho \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}]\,\mathrm{d}\upsilon =$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbf{P_t}} (\rho \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\upsilon}_{\dot{K}(\mathbf{P_t})} + \int_{\mathbf{P_t}} (\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\upsilon = \dot{K}(\mathbf{P_t}) + \int_{\mathbf{P_t}} (\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\upsilon$$

- **Εξαγωγή της εξίσωσης πεδίου του 1ου Νόμου της Θερμοδυναμικής**

Αντικαθιστώντας την (5) στην (1) και λαμβάνοντας υπόψη την (2) προκύπτει:

$$\dot{E}(\mathbf{P_t}) = \dot{Q}(\mathbf{P_t}) + \int_{\mathbf{P_t}} (\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\upsilon \qquad (6)$$

$$\dot{E}(\mathbf{P_t}) = \overline{\int_{\mathbf{P_t}} \rho e \, \mathrm{d}\upsilon}^{\,\boldsymbol{\cdot}} = \int_{\mathbf{P_o}} \overline{\rho e (\det \boldsymbol{F})}^{\,\boldsymbol{\cdot}} \mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_o}} \overline{\rho_o e}^{\,\boldsymbol{\cdot}} \mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \dot{e} \, \mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_t}} \rho \dot{e} \, \mathrm{d}\upsilon$$

Άρα:
$$\dot{E}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho \dot{e} \, \mathrm{d}\upsilon \tag{7}$$

$$[(4),(7) \rightarrow (6)] \;\; \Rightarrow \int_{\mathbf{P_t}} \left(\rho \dot{e} - \boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad} \vec{\boldsymbol{v}} + \mathrm{div} \vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} - \rho r \right) \mathrm{d}\upsilon = 0 , \quad \forall \, \mathbf{P_t} \subseteq \mathbf{B_t}$$

Θεωρώντας ότι η συνάρτηση $\left(\rho \dot{e} - \boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad} \vec{\boldsymbol{v}} + \mathrm{div} \vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} - \rho r \right)$ είναι συνεχής στο $\mathbf{B_t}$, προκύπτει η ***Eulerian τοπική μορφή του 1^ου^ νόμου της θερμοδυναμικής:***

$$\boxed{\rho \dot{e} = \boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad} \vec{\boldsymbol{v}} - \mathrm{div} \vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} + \rho r , \qquad \forall \; \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t} , \; \forall \; t}$$

$$\Rightarrow \;\; \dot{e} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad} \vec{\boldsymbol{v}} + h , \quad \text{όπου} \quad h \equiv \frac{1}{\rho} \left(- \mathrm{div} \vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} + \rho r \right) = \text{τοπική θέρμανση}$$

<u>*Σημείωση*</u>: $\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad} \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{T}^T \cdot (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{TD}) + \underbrace{\mathrm{tr}(\boldsymbol{TW})}_{0} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{TD}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{D}$

αφού, $\forall$ συμμετρικό τανυστή $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$ & $\forall$ αντισυμμετρικό τανυστή $\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}^T$, ισχύει: $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{W} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{TW}) = 0$

<u>*Εύρεση Lagrangean τοπικής μορφής του 1^ου^ Νόμου της Θερμοδυναμικής*</u>

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{T} = (\det \boldsymbol{F})^{-1} \boldsymbol{FS} \\ \mathrm{grad} \vec{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{F}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad} \vec{\boldsymbol{v}} = (\det \boldsymbol{F})^{-1} (\boldsymbol{S}^T \boldsymbol{F}^T) \cdot (\dot{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{F}^{-1}) = \frac{\boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}}}{\det \boldsymbol{F}}$$

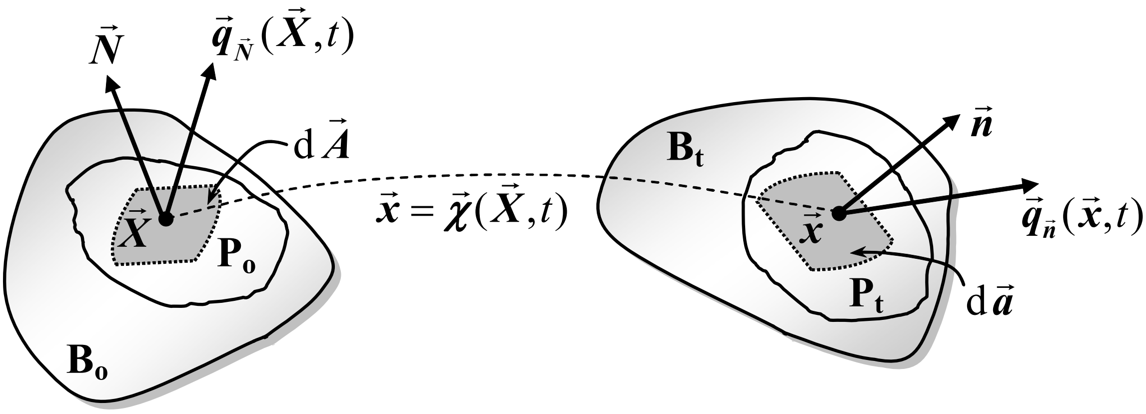
Άρα: $\displaystyle \int_{\mathbf{P_t}} (\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad} \vec{\boldsymbol{v}}) \, \mathrm{d}\upsilon = \int_{\mathbf{P_t}} \frac{\boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}}}{\det \boldsymbol{F}} \mathrm{d}\upsilon = \int_{\mathbf{P_o}} (\boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}}) \, \mathrm{d}V$

και η (6) γράφεται ως:
$$\dot{E}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_o}} (\boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}}) \, \mathrm{d}V + \dot{Q}(\mathbf{P_t}) \tag{8}$$

όπου:

- $\dot{E}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \dot{e} \,\mathrm{d}V$ ... [βλ. εξαγωγή της (7)] (9)

- $\dot{Q}(\mathbf{P_t}) = \int_{\partial\mathbf{P_t}} -\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}a + \int_{\mathbf{P_t}} \rho r \,\mathrm{d}\upsilon = \int_{\partial\mathbf{P_t}} -\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}a + \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o r \,\mathrm{d}V$ (10)



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}a, \quad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}A \\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}} = (\det \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F}^{-1})^T\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} \end{array}\right\} \Rightarrow -\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}a = -\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot (\det \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F}^{-1})^T\,\vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}A =$$

$$= -\underbrace{(\det \boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-1}\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}}_{\vec{q}_{\vec{N}}} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}A = -\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}A$$

$\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} \cdot \vec{\boldsymbol{N}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}}}{\mathrm{d}A}$ $\rightarrow$ ροή θερμότητας λόγω συναγωγής στο $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$ ανά μονάδα επιφάνειας αναφοράς, η οποία ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{N}$ στο $\vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}$

$\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{a}}}{\mathrm{d}a}$ $\rightarrow$ ροή θερμότητας λόγω συναγωγής στο $\boldsymbol{x} \in \mathbf{B_t}$ ανά μονάδα τρέχουσας επιφάνειας, η οποία ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{\boldsymbol{n}}$ στο $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$

$$(10) \rightarrow \dot{Q}(\mathbf{P_t}) = \int_{\partial\mathbf{P_o}} -\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}A + \int_{\mathbf{P_o}} \rho_o r\,\mathrm{d}V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_o}} \left(-\mathrm{DIV}\,\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} + \rho_o r\right)\mathrm{d}V \tag{11}$$

Αντικαθιστώντας τις (9) και (11) στην εξίσωση (8), προκύπτει:

$$\int_{\mathbf{P_o}} \rho_o \dot{e}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathbf{P_o}} (\boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}})\,\mathrm{d}V + \int_{\mathbf{P_o}} \left(-\mathrm{DIV}\,\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} + \rho_o r\right)\mathrm{d}V$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{P_o}} \left(\rho_o \dot{e} - \boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}} + \mathrm{DIV}\,\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} - \rho_o r\right)\mathrm{d}V = 0\,, \quad \forall\, \mathbf{P_o} \subseteq \mathbf{B_o}$$

Θεωρώντας ότι η συνάρτηση $\left(\rho_o \dot{e} - \boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}} + \mathrm{DIV}\,\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} - \rho_o r\right)$ είναι συνεχής στο $\mathbf{B_o}$, προκύπτει η ***Lagrangean τοπική μορφή του 1^{ου} νόμου της θερμοδυναμικής:***

$$\boxed{\rho_o \dot{e} = \boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}} - \mathrm{DIV}\,\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} + \rho_o r, \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o},\ \forall\, t}$$

$$\Rightarrow\ \dot{e} = \frac{1}{\rho_o}\boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}} + h, \quad \text{όπου} \quad h \equiv \frac{1}{\rho_o}\left(-\mathrm{DIV}\,\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} + \rho_o r\right) = \text{τοπική θέρμανση}$$

2^{ΟΣ} ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Είναι μια βασική αρχή της φύσης, η οποία «θίγει» τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ενέργεια, ή αλλιώς την «ποιότητα» της ενέργειας. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να διατυπωθεί ποιοτικά. Π.χ.

- Δεν μπορεί να υπάρξει αυθόρμητη ροή θερμότητας από ένα ψυχρότερο σε ένα θερμότερο αντικείμενο
- Είναι αδύνατο να κατασκευαστεί θερμική μηχανή που να λαμβάνει θερμότητα και να την μετατρέπει εξ ολοκλήρου σε έργο
- Η αταξία ενός «κλειστού» σύστηματος (δηλ. χωρίς εξωτερικές επιδράσεις) δεν ελαττώνεται ποτέ. Ένα μέτρο αυτής της αταξίας αποτελεί η ποσότητα που ονομάζεται **εντροπία**. Επιπλέον, η εντροπία είναι ένα μέτρο του ποσού ενέργειας που δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παραγωγή έργου.

Συνοπτικά, μπορεί να διατυπωθεί ότι ο 2^{ος} νόμος της θερμοδυναμικής εκφράζει την **αύξηση της εντροπίας** και διατυπώνεται μαθηματικά ως:

$$\boxed{\mathrm{d}S \geq \frac{\mathrm{d}Q}{\theta}}$$

δηλ. [Μεταβολή της εντροπίας dS μιας ποσότητας ύλης] ≥ [θερμότητα dQ που δίδεται σε αυτήν την ποσότητα ύλης] / [απόλυτη θερμοκρασία θ]

όπου:

[Εντροπία του $\mathbf{P_t}$] $\equiv S(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} \rho s \,\mathrm{d}\upsilon$, $\quad s$ = εντροπία / μον. μάζας

ΑΠΟΛΥΤΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ: $\theta = \theta(x,t) > 0 \;\rightarrow$ πρότυπη εμπειρική ποσότητα της κλασσικής θερμοδυναμικής

- **Ανισότητα Planck:** $\rho \dot{s} \geq \frac{1}{\theta}\left(-\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} + \rho r\right) \Leftrightarrow \dot{s} \geq \frac{h}{\theta}, \quad \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$

  Σημείωση: αντιστοιχία με τη σχέση $\mathrm{d}S \geq \frac{\mathrm{d}Q}{\theta}$ σε τοπικό επίπεδο (δηλ. για κάθε $x \in \mathbf{B_t}$.

  <u>Εσωτερική απώλεια (internal dissipation)</u>: $\delta \equiv \theta\dot{s} - h = \theta\dot{s} - \frac{1}{\rho}\left(-\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} + \rho r\right)$

  Άρα, ανισότητα Planck $\Leftrightarrow \quad \delta \geq 0, \quad \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$

- **Ανισότητα Fourier:** $\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \mathrm{grad}\,\theta \leq 0, \quad \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$

  $\Leftrightarrow$ η θερμότητα μεταφέρεται με συναγωγή από τα θερμότερα στα ψυχρότερα σημεία

- **Ανισότητα Clausius-Duhem:** $\rho\delta - \frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \mathrm{grad}\,\theta}{\theta} \geq 0, \quad \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}$

  δηλ. συνδυασμός της ανισότητας Planck & της ανισότητας Fourier $\Rightarrow$ την (ασθενέστερη) ανισότητα Clausius-Duhem

$$\Rightarrow\ \rho\dot{s}+\frac{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}-\rho r}{\theta}-\frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}\cdot\operatorname{grad}\theta}{\theta^2}\geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho\dot{s}-\left[-\operatorname{div}\left(\frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}}{\theta}\right)+\frac{\rho r}{\theta}\right]\geq 0\,,\qquad \forall\,\vec{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{B_t}}$$

... τοπική μορφή (Π.Ε.)

Έστω: $\rho\gamma\equiv\rho\dot{s}-\left[-\operatorname{div}\left(\frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}}{\theta}\right)+\frac{\rho r}{\theta}\right]$

Τότε η ανισότητα Clausius-Duhem γράφεται ως:

$$\rho\gamma\geq 0\,,\qquad \forall\,\vec{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{B_t}$$

Ρυθμός παραγωγής εντροπίας στο $\mathbf{P_t}$:

$$\Gamma(\mathbf{P_t})=\int_{\mathbf{P_t}}\rho\gamma\,\mathrm{d}\upsilon=\dot{S}-\underbrace{\int_{\partial\mathbf{P_t}}\frac{-\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}}{\theta}\,\mathrm{d}a}_{\substack{\text{ροή εντροπίας}\\ \text{λόγω συναγωγής}}}-\underbrace{\int_{\mathbf{P_t}}\frac{\rho r}{\theta}\,\mathrm{d}\upsilon}_{\substack{\text{ροή εντροπίας}\\ \text{λόγω ακτινοβολίας}}}$$

$\Rightarrow$ ολική (global) μορφή της ανισότητας Clausius-Duhem:

$$\Gamma(\mathbf{P_t})\geq 0,\quad \forall\ \mathbf{P_t}\subseteq\mathbf{B_t}$$

Ελεύθερη ενεργειακή πυκνότητα Helmoltz: $\psi\equiv e-\theta s$

$$\Rightarrow\dot{\psi}=\dot{e}-\dot{\theta}s-\theta\dot{s}\Leftrightarrow\dot{\psi}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{T}^T\cdot\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}}+h-\dot{\theta}s-\theta\dot{s}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\theta\dot{s}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{T}^T\cdot\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}}+h-\dot{\theta}s-\dot{\psi}\qquad(12)$$

Όμως, η ανισότητα Clausius-Duhem δίνει:

$$\rho\dot{s}-\rho\frac{h}{\theta}-\frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}\cdot\operatorname{grad}\theta}{\theta^2}\geq 0\Leftrightarrow\theta\dot{s}-h-\frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}\cdot\operatorname{grad}\theta}{\rho\theta}\geq 0\overset{(12)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(12)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\vec{\boldsymbol{v}} - \dot{\theta}s - \dot{\psi} - \frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \mathrm{grad}\,\theta}{\rho\theta} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\dot{\psi} + s\dot{\theta} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \cdot \mathrm{grad}\,\theta}{\rho\theta} \leq 0, \quad \forall\, \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{B_t}}$$

… ανισότητα Clausius-Duhem (Π.Ε.)

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις:

$$\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} = (\det \boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-1}\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} \Leftrightarrow \frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}}{\rho} = \frac{\boldsymbol{F}\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}}}{\rho_o}, \qquad \mathrm{grad}\,\theta = (\boldsymbol{F}^{-1})^T\,\mathrm{GRAD}\,\theta,$$

$$\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}}}{\det \boldsymbol{F}} \Leftrightarrow \frac{1}{\rho}\boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\rho_o}\boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}},$$

η τελευταία ανισότητα δίνει:

$$\boxed{\dot{\psi} + s\dot{\theta} - \frac{1}{\rho_o}\boldsymbol{S}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}} + \frac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{N}} \cdot \mathrm{GRAD}\,\theta}{\rho_o\theta} \leq 0, \quad \forall\, \vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}}$$

… ανισότητα Clausius-Duhem (Π.L.)

3^{ΟΣ} ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Όλες οι διεργασίες σταματούν καθώς η θερμοκρασία τείνει στο απόλυτο μηδέν. Καθώς $\theta \to 0$, η εντροπία ενός συστήματος τείνει σε μια σταθερά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18: ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ & ΥΛΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

I. Από τα προηγούμενα κεφάλαια έχουν ήδη εισαχθεί τα ακόλουθα ***πεδία***:

κίνηση:	$\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{\chi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$	(3 αγνώστους)
πυκνότητα μάζας:	$\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)$	(1 άγνωστος)
τανυστής τάσης του Cauchy:	$\boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$	(9 αγνώστους)
απόλυτη θερμοκρασία:	$\theta(\vec{\boldsymbol{x}},t)$	(1 άγνωστος)
διάνυσμα ροής θερμότητας:	$\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{\boldsymbol{n}}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$	(3 αγνώστους)
πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας:	$e(\vec{\boldsymbol{x}},t)$	(1 άγνωστος)
πυκνότητα εντροπίας:	$s(\vec{\boldsymbol{x}},t)$	(1 άγνωστος)
....		
δύναμη πεδίου:	$\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$	(συνήθως δεδομένο)
ροή θερμότητας από ακτινοβολία:	$r(\vec{\boldsymbol{x}},t)$	(συνήθως δεδομένο)
πυκνότητα μάζας αναφοράς:	$\rho_o(\vec{\boldsymbol{X}})$	(δεδομένο)

II. Από τα προηγούμενα κεφάλαια έχει εισαχθεί ένα ***σύνολο αξιωμάτων***, τα οποία τελικά οδηγούν στις παρακάτω εξισώσεις - ανισώσεις:

ισοζύγιο μάζας:	$\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{\boldsymbol{v}}) = 0$	(1 εξίσωση)
ισοζύγιο γραμμικής ορμής:	$\mathrm{div}\boldsymbol{T}^T + \rho\vec{\boldsymbol{b}} = \rho\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}$	(3 εξισώσεις)
ισοζύγιο στροφορμής:	$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$	(3 εξισώσεις)
ισοζύγιο ενέργειας:	$\rho\dot{e} = \boldsymbol{T}^T \cdot \mathrm{grad}\vec{\boldsymbol{v}} - \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{\boldsymbol{n}}} + \rho r$	(1 εξίσωση)
ανισότητα εντροπίας:	$\rho\dot{s} \geq \left[-\mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{\boldsymbol{n}}}}{\theta}\right) + \dfrac{\rho r}{\theta}\right]$	(1 ανίσωση)

$\Rightarrow$ 19 Αγνώστους $\leftrightarrow$ 8 Εξισώσεις

$\Rightarrow \exists$ απαίτηση για 11 ***καταστατικές εξισώσεις***:

$$e = \tilde{e}(\text{ιστορία των πεδίων } \boldsymbol{F} \ \& \ \theta, \ \vec{\boldsymbol{X}}) \qquad \text{(1 εξίσωση)}$$

$$s = \tilde{s}(\text{ ιστορία των πεδίων } \boldsymbol{F} \ \& \ \theta, \ \vec{\boldsymbol{X}}) \qquad \text{(1 εξίσωση)}$$

$$\boldsymbol{T} = \tilde{\boldsymbol{T}}(\text{ ιστορία των πεδίων } \boldsymbol{F} \ \& \ \theta, \ \vec{\boldsymbol{X}}) \qquad \text{(6 εξισώσεις)}$$

$$\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} = \tilde{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\vec{n}}(\text{ ιστορία των πεδίων } \boldsymbol{F} \ \& \ \theta, \ \vec{\boldsymbol{X}}) \qquad \text{(3 εξίσωσεις)}$$

π.χ. θερμοελαστικό υλικό: [ιστορία των πεδίων $\boldsymbol{F}$ & θ] = {$\boldsymbol{F}$, θ, gradθ}

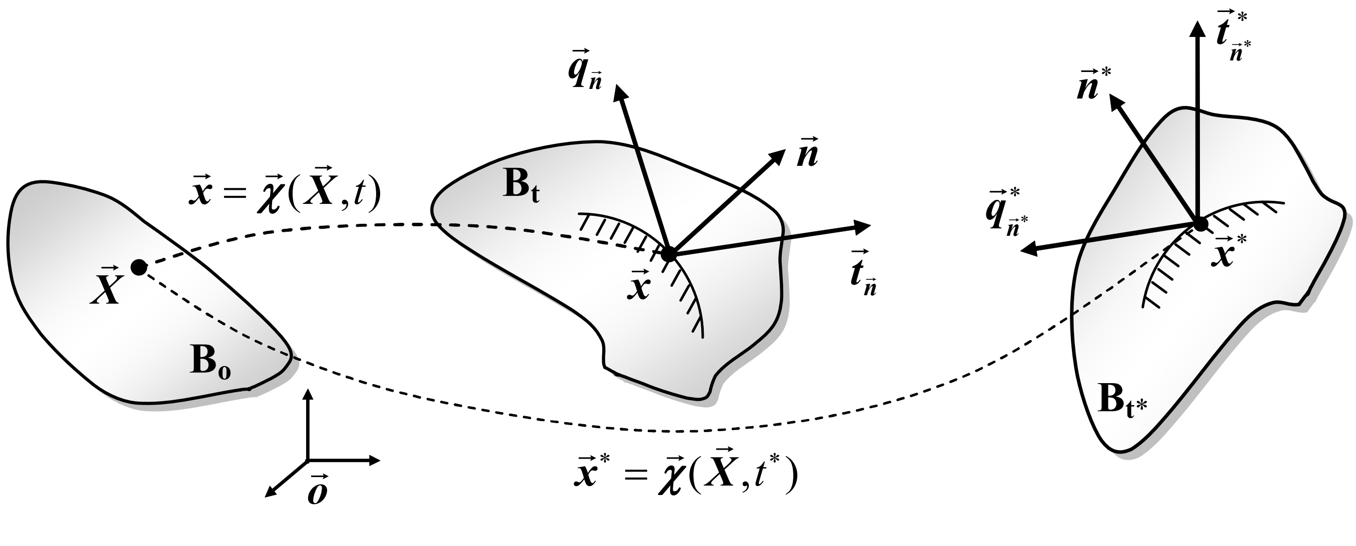
Περιορισμοί που χρειάζεται να ικανοποιούν οι καταστατικές εξισώσεις και οι οποίοι μειώνουν τη γενικότητα τους:

1. Να μην παραβιάζουν την ανισότητα εντροπίας

2. Να είναι συμβατές με την ανεξαρτησία από το σύστημα συντεταγμένων

3. Να συμφωνούν με κάθε περιορισμό που επιβάλλεται από την υλική συμμετρία (π.χ. ισοτροπία)

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ



Κάθε χρονική στιγμή, τα $\mathbf{B_t}$ & $\mathbf{B_{t^*}}$ διαφέρουν μόνο κατά ένα ***σταθερό ποσό***, δηλ. $t^* = t - a$, με a = σταθερά (π.χ. 3 ώρες), δηλ. η απεικόνιση $\{\mathbf{B_t} \rightarrow \mathbf{B_{t^*}}\}$ = κίνηση μη-παραμορφωμένου σώματος, οπότε το θεώρημα Euler $\Rightarrow \vec{\boldsymbol{x}}^* = \vec{\boldsymbol{c}}(t)\big|_{t^*-t} + \boldsymbol{Q}(t)\big|_{t^*-t}(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}})$, όπου $\boldsymbol{Q}(t) \in \mathsf{Q}$

Μια ***αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων*** είναι μια απεικόνιση:

$$(\vec{\boldsymbol{x}},t) \to (\vec{\boldsymbol{x}}^*,t^*), \quad \text{με} \quad \vec{\boldsymbol{x}}^* = \vec{\boldsymbol{c}}(t)\big|_{t^*-t} + \boldsymbol{Q}(t)\big|_{t^*-t}(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{o}}) \quad \& \quad t^* = t - a$$

Ένα ζεύγος $(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ είναι ένα γεγονός. Επομένως, ***η αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων*** είναι μια απεικόνιση από γεγονότα σε γεγονότα.

- *Παρατήρηση 1*: $\boldsymbol{F}^* = \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}^*}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} = \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}^*}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} = \boldsymbol{Q}\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} \Rightarrow \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{QF}$

- *Παρατήρηση 2*: $\vec{\boldsymbol{n}}^* = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{n}}$

Απόδειξη

$$\vec{\boldsymbol{n}}^* = \vec{\boldsymbol{x}}_2^* - \vec{\boldsymbol{x}}_1^* = \vec{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{Q}(\vec{\boldsymbol{x}}_2 - \vec{\boldsymbol{o}}) - \vec{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{Q}(\vec{\boldsymbol{x}}_1 - \vec{\boldsymbol{o}}) = \boldsymbol{Q}(\vec{\boldsymbol{x}}_2 - \vec{\boldsymbol{x}}_1) = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{n}}$$

Αρχή της ανεξαρτησίας από το σύστημα συντεταγμένων: «*Η θερμομηχανική συμπεριφορά ενός υλικού είναι ανεξάρτητη από το επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων*». Η αλλαγή στο σύστημα συντεταγμένων μπορεί ισοδύναμα να θεωρηθεί ως ακολούθως: Το σώμα παρακολουθείται από δύο διαφορετικούς παρατηρητές, οι οποίοι βρίσκονται σε σχετική κίνηση. Σε αυτήν την περίπτωση, η αρχή της ανεξαρτησίας από το σύστημα συντεταγμένων θεωρεί ότι η θερμομηχανική συμπεριφορά είναι ανεξάρτητη από τον παρατηρητή. Επομένως: «*Οι καταστατικές εξισώσεις μένουν αναλλοίωτες κατά την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων*».

- *Παρατήρηση*: $\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}^* = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}$, $\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}^* = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}$, $e^* = e$, $s^* = s$, $\theta^* = \theta$, $\psi^* = \psi$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{\partial \theta^*}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_j^*}{\partial x_i} \Rightarrow \operatorname{grad}\theta = \boldsymbol{Q}^T \operatorname{grad}^* \theta^* \Rightarrow \operatorname{grad}\theta = \boldsymbol{Q}^T \operatorname{grad}^* \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{grad}^* \theta = \boldsymbol{Q} \operatorname{grad} \theta}$$

<u>Πρόταση 1</u>: αρχή της ανεξαρτησίας από το σύστημα συντεταγμένων $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T$$

Απόδειξη: $\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}}^* = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{t}}_{\vec{n}} \Rightarrow \boldsymbol{T}^{*T}\vec{\boldsymbol{n}}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T\vec{\boldsymbol{n}} \Rightarrow \boldsymbol{T}^{*T}\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T\vec{\boldsymbol{n}}, \quad \forall \vec{\boldsymbol{n}}$ με $|\vec{\boldsymbol{n}}| = 1$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T}^{*T}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T \Rightarrow \boldsymbol{T}^{*T} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{Q}^T \Rightarrow \boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T$$

<u>Πρόταση 2</u>: Η αρχή της ανεξαρτησίας από το σύστημα συντεταγμένων επιβάλλει διάφορους περιορισμούς στις καταστατικές εξισώσεις. Αυτό μπορεί να φανεί από τα ακόλουθα ***παραδείγματα***:

- *Εσωτερική ενέργεια*: $e = \tilde{e}(\boldsymbol{F}, \theta)$

  αρχή ανεξαρτησίας από το σύστημα συντεταγμένων $\Rightarrow$

  $$\Rightarrow \quad \tilde{e}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}, \theta) = \tilde{e}(\boldsymbol{F}, \theta),$$

  από τη λύση της οποίας προκύπτει: $\tilde{e}(\boldsymbol{F}, \theta) = \tilde{e}(\boldsymbol{U}, \theta) \equiv \tilde{\tilde{e}}(\boldsymbol{C}, \theta)$
  όπου: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}^2$

- *Ροή θερμότητας*: $\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} = \tilde{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\vec{n}}(\boldsymbol{F}, \theta, \operatorname{grad} \theta)$

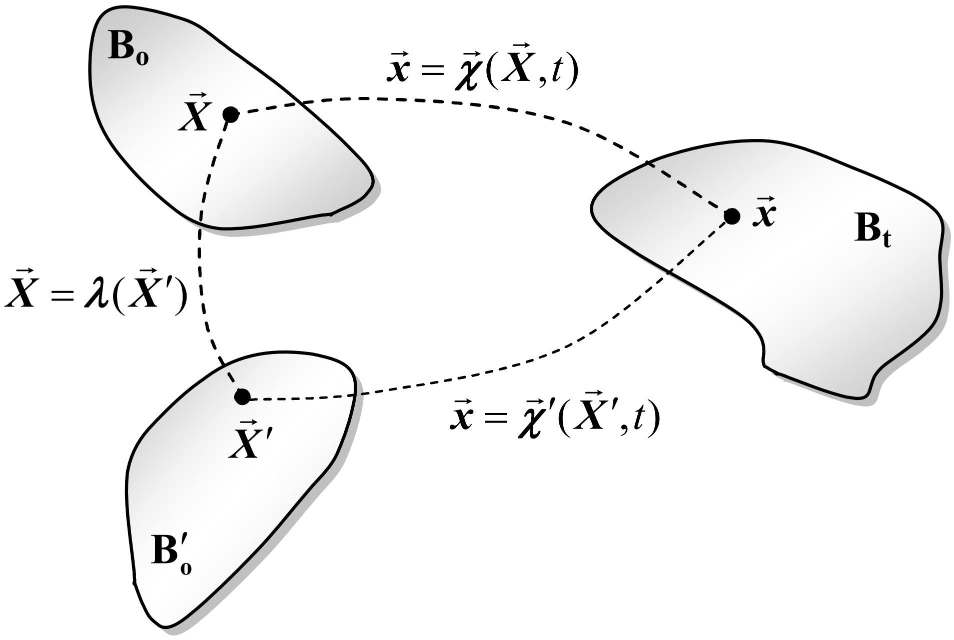
  αρχή ανεξαρτησίας από το σύστημα συντεταγμένων $\Rightarrow$

  $$\tilde{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\vec{n}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{Q} \operatorname{grad} \theta) = \boldsymbol{Q}\tilde{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\vec{n}}(\boldsymbol{F}, \theta, \operatorname{grad} \theta),$$

  από τη λύση της οποίας προκύπτει:

  $$\tilde{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\vec{n}}(\boldsymbol{F}, \theta, \operatorname{grad} \theta) = \boldsymbol{R}\tilde{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\vec{n}}(\boldsymbol{U}, \theta, \boldsymbol{R}^T \operatorname{grad} \theta)$$

ΥΛΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ



$\mathbf{B_o}$ & $\mathbf{B_o'}$ ... δύο διαμορφώσεις αναφοράς που διαφέρουν μόνο κατά ένα σταθερό ποσό

$\mathbf{B_o} \to \mathbf{B_o'}$: $\vec{X} = \boldsymbol{\lambda}(\vec{X}')$ με $\vec{X}' = \boldsymbol{\lambda}^{-1}(\vec{X})$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = \nabla \vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}'} \frac{\partial \vec{X}'}{\partial \vec{X}} = \boldsymbol{F}' \nabla \boldsymbol{\lambda}^{-1}$$

Θέτοντας $\nabla \boldsymbol{\lambda}^{-1} \equiv \boldsymbol{H} \Rightarrow \boldsymbol{F}(\vec{X}, t) = \boldsymbol{F}'(\vec{X}', t) \boldsymbol{H}$ (δηλ. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' \boldsymbol{H}$)

<u>Πρόταση</u>: Για να φανεί πως η υλική συμμετρία επιβάλλει περιορισμούς στις καταστατικές εξισώσεις, θεωρούμε τα ακόλουθα ***παραδείγματα***:

❖ *Εσωτερική ενέργεια*: $e = \tilde{e}(\boldsymbol{F}, \theta)$

Υπολογίζοντας την e σε σχέση με τις $\mathbf{B_o}$ & $\mathbf{B_o'}$, λαμβάνεται:

$$\left. \begin{array}{l} e = \tilde{e}(\boldsymbol{F}, \theta) \\ e = \tilde{e}'(\boldsymbol{F}', \theta) \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{e}'(\boldsymbol{F}', \theta) = \tilde{e}(\boldsymbol{F}, \theta) = \tilde{e}(\boldsymbol{F}'\boldsymbol{H}, \theta)$$

Το υλικό εμφανίζει ***συμμετρία*** ως προς την εσωτερική ενέργεια, αν:

$$\tilde{e}(\boldsymbol{F}',\theta) = \tilde{e}(\boldsymbol{F}'\boldsymbol{H},\theta), \quad \forall \text{ μη-ιδιόμορφο } \boldsymbol{F}'$$

$$\Leftrightarrow \tilde{e}(\boldsymbol{F},\theta) = \tilde{e}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{H},\theta), \quad \forall \text{ μη-ιδιόμορφο } \boldsymbol{F}$$

❖ *Ροή θερμότητας*: $\vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}} = \vec{\boldsymbol{q}}_{\vec{n}}(\boldsymbol{F},\theta,\text{grad}\,\theta)$

Με την ίδια λογική, λέγεται ότι το υλικό εμφανίζει συμμετρία ως προς την αγωγή θερμότητας αν:

$$\tilde{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\vec{n}}(\boldsymbol{F},\theta,\text{grad}\,\theta) = \tilde{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\vec{n}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{H},\theta,\text{grad}\,\theta), \quad \forall \text{ μη-ιδιόμορφο } \boldsymbol{F}$$

<u>Μαθηματικοποίηση της Υλικής Συμμετρίας</u>

$$\rho = \frac{\rho_o}{|\det \boldsymbol{F}|} = \frac{\rho_o'}{|\det \boldsymbol{F}'|} \Rightarrow \rho_o'(\vec{\boldsymbol{X}}') = \frac{\rho_o(\vec{\boldsymbol{X}})}{|\det \boldsymbol{H}|}$$

Ορισμός: Το **B** έχει μια υλική συμμετρία ως προς το $\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$ στο $\vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}$ αν οι διαμορφώσεις $\mathbf{B_o}$ & $\mathbf{B_o'}$ είναι τέτοιες ώστε:

(α) $\rho_o(\vec{\boldsymbol{X}}) = \rho_o'(\vec{\boldsymbol{X}}')\Big|_{\vec{X}'=\lambda^{-1}(\vec{X})}, \qquad \forall \vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}$

(β) $f(\hat{\boldsymbol{F}},\vec{\boldsymbol{X}}) = f'(\hat{\boldsymbol{F}},\vec{\boldsymbol{X}}')\Big|_{\vec{X}'=\lambda^{-1}(\vec{X})}, \quad \forall \vec{\boldsymbol{X}} \in \mathbf{B_o}, \ \& \ \forall$ μη-ιδιόμορφο $\hat{\boldsymbol{F}}$

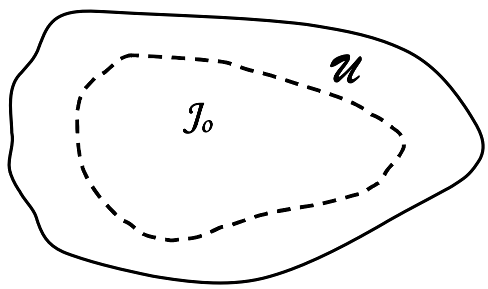
f = μια καταστατική συνάρτηση για το υλικό που μπορεί να είναι βαθμωτή (π.χ. $\tilde{e}$, $\tilde{s}$), διανυσματική (π.χ. $\tilde{\vec{\boldsymbol{q}}}_{\vec{n}}$) ή τανυστική (π.χ. $\tilde{\boldsymbol{T}}$)

❑ **<u>Θεώρημα</u>:** Το **B** έχει μια υλική συμμετρία ως προς το $\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$ στο $\boldsymbol{X} \in \mathbf{B_o}$ αν και μόνο αν

(i) $\boldsymbol{H}$ … μονόμετρος στο $\boldsymbol{X}$, δηλ. $\boldsymbol{H} \in \mathcal{U}$ $(\Leftrightarrow |\det \boldsymbol{H}| = 1)$, και

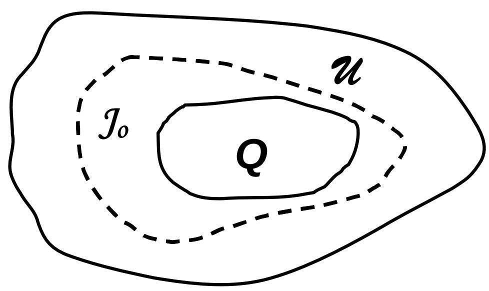
(ii) $f(\hat{\boldsymbol{F}},\vec{\boldsymbol{X}}) = f(\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{H},\vec{\boldsymbol{X}})$ στο $\vec{\boldsymbol{X}}$ & $\forall$ μη-ιδιόμορφο $\hat{\boldsymbol{F}}$

❑ **Θεώρημα:** Έστω ότι το **B** έχει μια υλική συμμετρία ως προς ένα σύνολο $\{\boldsymbol{\lambda}_1(\cdot), \boldsymbol{\lambda}_2(\cdot), \boldsymbol{\lambda}_3(\cdot), ...\}$ στο $\vec{X} \in \mathbf{B_o}$. Τότε, το σύνολο $\mathcal{J}_o = \{\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3, ...\}$, όπου $\boldsymbol{H}_\mathbf{i} = \nabla \boldsymbol{\lambda}_i^{-1}$ στο $\vec{X} \in \mathbf{B_o}$, είναι *ομάδα* που καλείται ***ομάδα τοπικής συμμετρίας*** *του* **B** $\Rightarrow \mathcal{J}_o \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Ορισμός: Το **B** είναι ισότροπο στο $\vec{X} \in \mathbf{B_o}$ αν $\boldsymbol{Q} \subseteq \mathcal{J}_o$ στο $\vec{X} \in \mathbf{B_o}$. Γενικά, το **B** είναι ισότροπο αν η πρόταση αυτή είναι αληθής για $\forall \vec{X} \in \mathbf{B_o}$



1. Ελαστικά Ρευστά

Ορισμός: Το **B** είναι ένα ρευστό στο $\vec{X} \in \mathbf{B_o}$ αν $\mathcal{J}_o = \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Γενικά το **B** είναι ένα ρευστό αν η πρόταση αυτή είναι αληθής για $\forall \vec{X} \in \mathbf{B_o}$

$$\mathcal{J}_o = \boldsymbol{\mathcal{U}} \supseteq \boldsymbol{Q} \Rightarrow \text{ένα ελαστικό ρευστό είναι ισότροπο}$$

Λόγω των περιορισμών που επιβάλλονται από τις θεωρήσεις της ανεξαρτησίας από το σύστημα συντεταγμένων & της υλικής συμμετρίας, η καταστατική εξίσωση της τάσης για ένα ελαστικό υλικό $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}, \vec{X})$ λαμβάνει τη μορφή $\boldsymbol{T} = -P(\rho, \vec{X})\boldsymbol{1}$ για ένα ελαστικό ρευστό

Απόδειξη:

$$\text{(ii)} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{F},\vec{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{FH},\vec{\boldsymbol{X}}), \quad \forall \boldsymbol{H} \in \mathcal{U} = \mathcal{J}_o \qquad [*]$$

Για $\boldsymbol{H} = (\det \boldsymbol{F})^{1/3} \boldsymbol{F}^{-1} \Rightarrow |\det \boldsymbol{H}| = 1$, προκύπτει:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F},\vec{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}[\det \boldsymbol{F}]^{1/3} \boldsymbol{F}^{-1},\vec{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{f}([\det \boldsymbol{F}]^{1/3} \boldsymbol{1},\vec{\boldsymbol{X}})$$

Υπενθυμίζεται ότι $[\det \boldsymbol{F} = \rho_o / \rho]$, οπότε:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{F},\vec{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{g}(\rho,\vec{\boldsymbol{X}})$$

Η ανεξαρτησία από το σύστημα συντεταγμένων υπαγορεύει:

$$\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{QF} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{QTQ}^T, \qquad \forall \ \boldsymbol{Q} \in \mathbf{Q}$$

Σε αυτήν την περίπτωση: $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{QF} \quad \Rightarrow \quad \rho \to \rho^* = \rho_o / |\det(\boldsymbol{QF})| = \rho$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{g}(\rho^*,\vec{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{g}(\rho,\vec{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{g}(\rho,\vec{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{Q}^T, \qquad \forall \ \boldsymbol{Q} \in \mathbf{Q}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{g}(\rho,\vec{\boldsymbol{X}})$ είναι ένας ισότροπος τανυστής $2_{\text{ης}}$ τάξης, οπότε στη γενικότερη περίπτωση μπορεί να παρασταθεί ως $\boldsymbol{g}(\rho,\vec{\boldsymbol{X}}) = -P(\rho,\vec{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{1}$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{T} = -P(\rho,\vec{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{1} \qquad [**]$$

όπου $P(\rho,\vec{\boldsymbol{X}})$ ... βαθμωτή πίεση. Αν το ελαστικό ρευστό είναι ομογενές τότε $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}) \Rightarrow \boldsymbol{T} = -P(\rho)\boldsymbol{1}$

Σημείωση 1: η $[*]$ θα πρέπει να ισχύει $\forall \boldsymbol{H} \in \mathcal{U}$, δηλ. $\{\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{FH} \Rightarrow \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}\}$, $\forall \boldsymbol{H} \in \mathcal{U}$. Πράγματι, $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{FH} \Rightarrow \rho \to \rho$, και η $[**]$ συμφωνεί με αυτό το αποτέλεσμα

Σημείωση 2: Ένα ελαστικό ρευστό δεν μπορεί να φέρει διατμητικές τάσεις (εναλλακτικός ορισμός του ελαστικού ρευστού)

2. Ελαστικά Στερεά

Ορισμός: Το **B** είναι ένα στερεό στο $\vec{X} \in \mathbf{B_o}$ αν $\mathcal{J}_o \subseteq \mathcal{Q}$. Γενικά το **B** είναι ένα στερεό αν η πρόταση αυτή είναι αληθής για $\forall\ \vec{X} \in \mathbf{B_o}$

$$\Rightarrow \text{ ένα στερεό είναι ισότροπο στο } \vec{X} \in \mathbf{B_o} \text{ αν } \mathcal{J}_o = \mathcal{Q}$$

Λόγω της υλικής συμμετρίας, η καταστατική εξίσωση της τάσης $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}, \vec{X})$, γίνεται: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}, \vec{X}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{FH}, \vec{X})$, $\forall\, \boldsymbol{H} \in \mathcal{Q}$

Επιλέγοντας $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^T$, προκύπτει:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}, \vec{X}) = \boldsymbol{f}(\underbrace{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{VR}} \boldsymbol{R}^T, \vec{X}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, \vec{X}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{B}, \vec{X}), \quad \text{με} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{FF}^T$$

Η ανεξαρτησία από το σύστημα συντεταγμένων απαιτεί:

$$\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{QF} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{QTQ}^T, \quad \forall\;\boldsymbol{Q} \in \mathcal{Q}$$

Όμως, $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{QF} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{QBQ}^T$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{QBQ}^T, \vec{X}) = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{B}, \vec{X})\boldsymbol{Q}^T \qquad (\#)$$

$\Rightarrow \boldsymbol{g}(\boldsymbol{B}, \vec{X})$ είναι μια ισότροπη τανυστική συνάρτηση του $\boldsymbol{B}$.

Επίλυση της (#) $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{B}, \vec{X}) = a_o \boldsymbol{1} + a_1 \boldsymbol{B} + a_2 \boldsymbol{B}^2}$ (\$)

όπου: $a_\ell = \tilde{a}_\ell(I_B, II_B, III_B, \vec{X})$, για $\ell = 0, 1, 2$

$$I_{\boldsymbol{B}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}), \qquad II_{\boldsymbol{B}} = \tfrac{1}{2}\Big(\big[\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})\big]^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^2)\Big), \qquad III_{\boldsymbol{B}} = \det \boldsymbol{B}$$

... βασικές αναλλοίωτες του $\boldsymbol{B}$

Η (\$) είναι μια απλοποιημένη καταστατική εξίσωση, κατάλληλη για ένα γενικό ***μη-γραμμικό ισότροπο ελαστικό στερεό***

Γραμμικοποίηση $\Rightarrow$ $\boldsymbol{B} \doteq \boldsymbol{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ ***Νόμος του Hooke της Γραμμικής Θεωρίας της Ελαστικότητας:***

$$\boldsymbol{T} = \lambda(\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{δηλ.} \quad T_{ij} = \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

… (λ, μ) = σταθερές του Lamé

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\boldsymbol{u}} + (\nabla\vec{\boldsymbol{u}})^T\right]$, $\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \ddot{\vec{\boldsymbol{u}}}$ και αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση διατήρησης της ορμής $\mathrm{DIV}\,\boldsymbol{S}^T + \rho_o\vec{\boldsymbol{b}} = \rho_o\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}$, με $\boldsymbol{S} \doteq \boldsymbol{T}$, προκύπτει:

$$\mu\nabla^2\vec{\boldsymbol{u}} + (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{DIV}\,\vec{\boldsymbol{u}}) + \rho_o\vec{\boldsymbol{b}} = \rho_o\ddot{\vec{\boldsymbol{u}}}$$

δηλ.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{i,ij} + \rho_o b_i = \rho_o\ddot{u}_i$$

… εξισώσεις Navier για τη μετατόπιση $\vec{\boldsymbol{u}}$ γραμμικά ελαστικού στερεού

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται εύκολα με τη χρήση δεικτών κι είναι η γενίκευση στις τρεις διαστάσεις της ***εξίσωσης κύματος*** που είδαμε για το μονοδιάστατο ελαστικό στερεό. Η επίλυση της σε διάφορα προβλήματα συνοριακών / αρχικών τιμών αποτελεί ουσιαστικά το αντικείμενο της (γραμμικής) "**Θεωρίας Ελαστικότητας**"

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΟΜΟΓΕΝΗ ΙΞΩΔΗ ΡΕΥΣΤΑ</u>

Η καταστατική εξίσωση που περιγράφει αυτήν τη συμπεριφορά είναι:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}(\rho, \mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}), \quad \text{με} \quad \rho = \rho_o / \det\boldsymbol{F} \quad \& \quad \rho_o = \text{σταθερή}$$

Θεωρώντας ανεξαρτησία από το σύστημα συντεταγμένων, μπορεί να δειχτεί ότι

$$\boxed{\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{1} + \beta_1\boldsymbol{D} + \beta_2\boldsymbol{D}^2} \qquad (*)$$

όπου: $p = \tilde{p}(\rho, I_D, II_D, III_D)$, $\beta_\ell = \tilde{\beta}_\ell(\rho, I_D, II_D, III_D)$, για $\ell = 1, 2$

$$I_{\boldsymbol{D}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}), \qquad II_{\boldsymbol{D}} = \tfrac{1}{2}\Big(\big[\mathrm{tr}(\boldsymbol{D})\big]^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^2)\Big), \qquad III_{\boldsymbol{D}} = \det \boldsymbol{D}$$

... βασικές αναλλοίωτες του $\boldsymbol{D} = \tfrac{1}{2}\Big[(\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}) + (\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}})^T\Big]$

❖ Γραμμικά Νευτωνικά Ρευστά

$$p = \tilde{p}(\rho, I_D, II_D, III_D) = -P(\rho) + \lambda I_D = -P(\rho) + \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{D})$$

$$\beta_1 = 2\mu, \qquad \beta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{T} = -P(\rho)\boldsymbol{1} + \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{D})\boldsymbol{1} + 2\mu\boldsymbol{D}}$$

δηλ. $T_{ij} = -P(\rho)\delta_{ij} + \lambda D_{mm}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$

… (λ, μ) = σταθερές του υλικού

Για ασυμπίεστο ρευστό ($\mathrm{tr}\,\boldsymbol{D} = \mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}} = 0$) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{T} = -P(\rho)\boldsymbol{1} + 2\mu\boldsymbol{D}$

$\mu \equiv$ ιξώδες

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\boldsymbol{D} = \tfrac{1}{2}\Big[(\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}) + (\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}})^T\Big]$ και αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση διατήρησης της ορμής $\mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^T + \rho\vec{\boldsymbol{b}} = \rho\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}$, προκύπτει:

$$-\mathrm{grad}\,P + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}) + \mu\nabla^2\vec{\boldsymbol{v}} + \rho\vec{\boldsymbol{b}} = \rho\left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \big[\mathrm{grad}\,\vec{\boldsymbol{v}}\big]\vec{\boldsymbol{v}}\right)$$

δηλ.

$$-P_{,i} + (\lambda + \mu)v_{j,ji} + \mu v_{i,jj} + \rho b_i = \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j}v_j\right)$$

… εξισώσεις **Navier-Stokes** για την ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{v}}$ γραμμικού Νευτώνειου ασυμπίεστου ρευστού

Η επίλυση της σε διάφορα προβλήματα συνοριακών / αρχικών τιμών αποτελεί ουσιαστικά το αντικείμενο της "**Ρευστομηχανικής**"

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΧΡΗΣΙΜΑ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΑ

1. Η.Χ. Αϋφαντής, *Κεφάλαια Μηχανικής Ρευστών & Στερεών (Μηχανική Συνεχούς Μέσου)*, έκδοση: Υπηρεσία δημοσιευμάτων, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 1998.

2. Μ. Ματσικούδη – Ηλιοπούλου, *Εισαγωγή στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου* (Σημειώσεις), Τομέας Μηχανικής, Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 1995.

3. Ι.Δ. Χατζηδημητρίου και Γ.Δ. Μπόζης, *Εισαγωγή στη Μηχανική των Συνεχών Μέσων*, εκδόσεις Α. Τζιόλα Ε., 2η έκδοση, Θεσσαλονίκη, 1997.

4. J.H. Heinbockel, *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University, 1996.

5. Victor E. Saouma, *Introduction to Continuum Mechanics and Elements of Elasticity/Structural Mechanics*, lecture notes, Department of Civil Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, 1998.

6. W.M. Lai, D. Rubin, E. Krempl, *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, New York, 3rd edition, 1993.

7. G.E. Mase, *Continuum Mechanics*, Scaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1970.

8. A.J. Roberts, *A One-dimensional Introduction to Continuum Mechanics*, World Scientific, Singapore, 1994.