ΘΕΜΑ 4

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $|\vec d_i|=1 \ \forall\ i=1,2,3$ και ότι $\vec d_i\cdot\vec d_j=0 \ \forall\ i\neq j$

Έχουμε: $$|\vec d_1|^2=\vec d_1\cdot\vec d_1=\frac{1}{\sqrt2}(\vec m-\vec n)\cdot\frac{1}{\sqrt2}(\vec m-\vec n)=\frac12\Big[\underbrace{\vec m\cdot\vec m}_{|\vec m|^2=1}-\underbrace{\vec m\cdot\vec n}_{0 \text{ αφού } \vec m,\vec n \text{ ορθ}}-\underbrace{\vec n\cdot\vec m}_{0}+\underbrace{\vec n\cdot\vec n}_{|\vec n|^2=1}\Big]=\frac12(1+1)=1 \quad \text{άρα } |\vec d_1|=1$$

Επίσης $$|\vec d_2|^2=\vec d_2\cdot\vec d_2=\frac{1}{\sqrt2}(\vec m+\vec n)\cdot\frac{1}{\sqrt2}(\vec m+\vec n)=\frac12\Big(\underbrace{\vec m\cdot\vec m}_{1}+\underbrace{\vec m\cdot\vec n}_{0}+\underbrace{\vec n\cdot\vec m}_{0}+\underbrace{\vec n\cdot\vec n}_{1}\Big)$$
$$=\frac12(1+1)=1 \quad \text{άρα } |\vec d_2|=1$$

$$|\vec d_3|^2=\vec d_3\cdot\vec d_3=(\vec n\times\vec m)\cdot(\vec n\times\vec m)=\underbrace{(\vec n\cdot\vec n)}_{1}\underbrace{(\vec m\cdot\vec m)}_{1}-\underbrace{(\vec n\cdot\vec m)}_{0}\underbrace{(\vec m\cdot\vec n)}_{0}=1$$

Επίσης: $$\vec d_1\cdot\vec d_2=\frac{1}{\sqrt2}(\vec m-\vec n)\cdot\frac{1}{\sqrt2}(\vec m+\vec n)=\frac12\Big(\underbrace{\vec m\cdot\vec m}_{1}+\underbrace{\vec m\cdot\vec n}_{0}-\underbrace{\vec n\cdot\vec m}_{0}-\underbrace{\vec n\cdot\vec n}_{1}\Big)=0$$

$$\vec d_1\cdot\vec d_3=\frac{1}{\sqrt2}(\vec m-\vec n)\cdot(\vec n\times\vec m)=\frac{1}{\sqrt2}\Big[\vec m\cdot(\vec n\times\vec m)-\vec n\cdot(\vec n\times\vec m)\Big]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt2}\Big[-\vec m\cdot(\vec m\times\vec n)-\vec n\cdot(\vec n\times\vec m)\Big]=\frac{1}{\sqrt2}\Big[-\underbrace{(\vec m\times\vec m)}_{\vec 0}\cdot\vec n-\underbrace{(\vec n\times\vec n)}_{\vec 0}\cdot\vec m\Big]=0$$

$$\vec d_2\cdot\vec d_3=\frac{1}{\sqrt2}(\vec m+\vec n)\cdot(\vec n\times\vec m)=\frac{1}{\sqrt2}\Big[\vec m\cdot(\vec n\times\vec m)+\vec n\cdot(\vec n\times\vec m)\Big]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt2}\Big[-\vec m\cdot(\vec m\times\vec n)+\underbrace{(\vec n\times\vec n)}_{\vec 0}\cdot\vec m\Big]=\frac{1}{\sqrt2}\Big[-\underbrace{(\vec m\times\vec m)}_{\vec 0}\cdot\vec n+\vec 0\cdot\vec m\Big]=0$$

β) Οι συνιστώσες m_i του $\vec m$ ως προς τη βάση Y δίνονται ως:
$m_i=\vec m\cdot\vec d_i$ Άρα:

$$m_1=\vec m\cdot\vec d_1=\vec m\cdot\frac{1}{\sqrt2}(\vec m-\vec n)=\frac{1}{\sqrt2}\underbrace{(\vec m\cdot\vec m)}_{1}-\frac{1}{\sqrt2}\underbrace{(\vec m\cdot\vec n)}_{0}=\frac{1}{\sqrt2}$$

$$m_2=\vec m\cdot\vec d_2=\vec m\cdot\frac{1}{\sqrt2}(\vec m+\vec n)=\frac{1}{\sqrt2}(\vec m\cdot\vec m)+\frac{1}{\sqrt2}(\vec m\cdot\vec n)=\frac{1}{\sqrt2}$$

$$m_3=\vec m\cdot\vec d_3=\vec m\cdot(\vec n\times\vec m)=-\vec m\cdot(\vec m\times\vec n)=-\underbrace{(\vec m\times\vec m)}_{\vec 0}\cdot\vec n=-\vec 0\cdot\vec n=0$$

Άρα $[\vec{m}]^Y = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

Ομοίως: $n_1 = \vec{n}\cdot\vec{d}_1 = \vec{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{m}-\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overset{0}{\vec{n}\cdot\vec{m}} - \overset{1}{\vec{n}\cdot\vec{n}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$n_2 = \vec{n}\cdot\vec{d}_2 = \vec{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{m}+\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{n}\cdot\vec{m} + \vec{n}\cdot\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n_3 = \vec{n}\cdot\vec{d}_3 = \vec{n}\cdot(\vec{n}\times\vec{m}) = (\vec{n}\times\vec{n})\cdot\vec{m} = \vec{0}\cdot\vec{m} = 0$

Άρα $[\vec{n}]^Y = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

γ) $\underset{\sim}{A}\vec{v} = (\vec{m}\otimes\vec{n} + \vec{n}\otimes\vec{m})\vec{v} = (\vec{m}\otimes\vec{n})\vec{v} + (\vec{n}\otimes\vec{m})\vec{v} = (\vec{n}\cdot\vec{v})\vec{m} + (\vec{m}\cdot\vec{v})\vec{n}$

Άρα, ο $\underset{\sim}{A}$ απεικονίζει κάθε διάνυσμα $\vec{v}$ πάνω στο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{m}$ και $\vec{v}$. Έτσι αν $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μια ΟΚ βάση του Ε τα $\underset{\sim}{A}\vec{e}_1, \underset{\sim}{A}\vec{e}_2, \underset{\sim}{A}\vec{e}_3$ βρίσκονται όλα στο ίδιο επίπεδο και ο όγκος του "παραλληλεπιπέδου" που σχηματίζουν είναι μηδέν.

Όμως $|\det \underset{\sim}{A}| = \dfrac{\{\text{όγκος των } \underset{\sim}{A}\vec{e}_1, \underset{\sim}{A}\vec{e}_2, \underset{\sim}{A}\vec{e}_3\}}{\{\text{όγκος } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} = 0 \Rightarrow \det\underset{\sim}{A} = 0$

δ) Οι συνιστώσες του $\underset{\sim}{A}$ ως προς την Y υπολογίζονται ως εξής:

$A_{ij} = \vec{d}_i\cdot\underset{\sim}{A}\vec{d}_j \Rightarrow A_{ij} = \vec{d}_i\cdot\left[(\vec{m}\otimes\vec{n}) + (\vec{n}\otimes\vec{m})\right]\vec{d}_j \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ij} = \vec{d}_i\cdot\left[(\vec{m}\otimes\vec{n})\vec{d}_j + (\vec{n}\otimes\vec{m})\vec{d}_j\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ij} = \vec{d}_i\cdot\left[(\vec{n}\cdot\vec{d}_j)\vec{m} + (\vec{m}\cdot\vec{d}_j)\vec{n}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ij} = \vec{d}_i\cdot(n_j\vec{m} + m_j\vec{n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ij} = n_j\underbrace{\vec{d}_i\cdot\vec{m}}_{m_i} + m_j\underbrace{\vec{d}_i\cdot\vec{n}}_{n_i} \Rightarrow A_{ij} = n_j m_i + m_j n_i \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ij} = m_i n_j + m_j n_i$ (μπορούσε να υπολογιστεί και κατ'ευθείαν από το $\underset{\sim}{A} = \vec{m}\otimes\vec{n} + \vec{n}\otimes\vec{m}$)

Παρατήρηση: $A_{ij} = A_{ji}$ δηλ. $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^T$ (συμμετρικός)

Έχουμε: $A_{11} = m_1 n_1 + m_1 n_1 = 2m_1 n_1 = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

$$A_{12} = A_{21} = m_1 n_2 + m_2 n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$A_{13} = A_{31} = m_1 n_3 + m_3 n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,0 + 0\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$A_{22} = 2 m_2 n_2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$A_{23} = A_{32} = m_2 n_3 + m_3 n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,0 + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$A_{33} = 2 m_3 n_3 = 2\cdot 0\cdot 0 = 0$$

Άρα $\quad [\underset{\sim}{A}]^{Y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ε) Επειδή το μητρώο $[\underset{\sim}{A}]^{Y}$ είναι διαγώνιο, οι ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{A}$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του. δηλ. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$

Για $\lambda_1 = -1$ έχουμε:

$$\underset{\sim}{A}\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1 \Rightarrow \underset{\sim}{A}\vec{u}_1 = -\vec{u}_1 \Rightarrow (\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{1})\vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 = 0 \\ 2y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow [\vec{u}_1]^{Y} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ δηλ. } \vec{u}_1 = x_1 \vec{d}_1, \quad x_1 \in \mathbb{R}^*$$

Για $\lambda_1 = 1$ έχουμε:

$$A\vec{u}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow \underset{\sim}{A}\vec{u}_2 = \vec{u}_2 \Rightarrow (\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{1})\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ -z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow [\vec{u}_2]^{Y} = y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ δηλ. } \vec{u}_2 = y_2 \vec{d}_2, \quad y_2 \in \mathbb{R}^*$$

Για $\lambda_2 = 0$ έχουμε: $\underset{\sim}{A}\vec{u}_3 = \lambda_3 \vec{u}_3 \Rightarrow \underset{\sim}{A}\vec{u}_3 = 0\vec{u}_3 \Rightarrow \underset{\sim}{A}\vec{u}_3 = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -x_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow [\vec{u}_3]^{Y} = z_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ δηλ. } \vec{u}_3 = z_3 \vec{d}_3$$

με $z_3 \in \mathbb{R}^*$

στ) Ο $\underset{\sim}{A}$ είναι συμμετρικός. Άρα $\exists$ ΟΚ βάση του E αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του $\underset{\sim}{A}$. Από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίναμε ότι μια τέτοια βάση είναι η $Y=\{\vec{d}_1,\vec{d}_2,\vec{d}_3\}$

Σε φασματική μορφή ο $\underset{\sim}{A}$ γράφεται:

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i \vec{d}_i\otimes\vec{d}_i \Rightarrow \underset{\sim}{A}=-\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1+\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2$$

ζ) 1ος τρόπος:

$$\underset{\sim}{A}^2=\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}=(\vec{m}\otimes\vec{n}+\vec{n}\otimes\vec{m})(\vec{m}\otimes\vec{n}+\vec{n}\otimes\vec{m})=$$

$$=(\vec{m}\otimes\vec{n})(\vec{m}\otimes\vec{n})+(\vec{m}\otimes\vec{n})(\vec{n}\otimes\vec{m})+(\vec{n}\otimes\vec{m})(\vec{m}\otimes\vec{n})+(\vec{n}\otimes\vec{m})(\vec{n}\otimes\vec{m})$$

$$=\underbrace{\cancel{(\vec{n}\cdot\vec{m})}}_{0}(\vec{m}\otimes\vec{n})+\underbrace{\cancel{(\vec{n}\cdot\vec{n})}}_{1}(\vec{m}\otimes\vec{m})+\underbrace{\cancel{(\vec{m}\cdot\vec{m})}}_{1}(\vec{n}\otimes\vec{n})+\underbrace{\cancel{(\vec{m}\cdot\vec{n})}}_{0}(\vec{n}\otimes\vec{m})$$

$$=\vec{m}\otimes\vec{m}+\vec{n}\otimes\vec{n}$$

2ος τρόπος:

$$\underset{\sim}{A}^2=\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}=(-\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1+\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2)(-\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1+\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2)=$$

$$=(\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1)(\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1)-(\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1)(\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2)-(\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2)(\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1)+$$

$$+(\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2)(\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2)=\underbrace{\cancel{(\vec{d}_1\cdot\vec{d}_1)}}_{1}(\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1)-\underbrace{\cancel{(\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2)}}_{0}(\vec{d}_1\otimes\vec{d}_2)-$$

$$-\underbrace{\cancel{(\vec{d}_2\cdot\vec{d}_1)}}_{0}(\vec{d}_2\otimes\vec{d}_1)+\underbrace{\cancel{(\vec{d}_2\cdot\vec{d}_2)}}_{1}(\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2)=$$

$$=\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1+\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2$$

3ος τρόπος

$$[\underset{\sim}{A}^2]^Y=[\underset{\sim}{A}]^Y[\underset{\sim}{A}]^Y=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Το οποίο επειδή $\underset{\sim}{A}^2=(A^2)_{ij}\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j$ δίνει: $\underset{\sim}{A}^2=\vec{d}_1\otimes\vec{d}_1+\vec{d}_2\otimes\vec{d}_2$