ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Μηχανική Συνεχούς Μέσου» (ΕΜ257) – Εαρινό Εξάμηνο 2008-09, Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μια βάση του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{v}_3 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ δεν αποτελούν βάση του $\mathcal{E}$.

Άσκηση 2: Χρησιμοποιήστε συμβολισμό με δείκτες για να υπολογίσετε:
α) Τις συνιστώσες του $\vec{v} \otimes \vec{w}$ συναρτήσει των συνιστωσών των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{w}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{e}_i\}$.
β) Τις συνιστώσες του γινομένου $\underset{\sim}{T}\vec{u}$ συναρτήσει των συνιστωσών του τανυστή 2^{ης} τάξης $\underset{\sim}{T}$ και του διανύσματος $\vec{u}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{e}_i\}$.
γ) Τις συνιστώσες του γινομένου $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{P}$ συναρτήσει των συνιστωσών των τριών τανυστών 2^{ης} τάξης $\underset{\sim}{T}$, $\underset{\sim}{S}$ και $\underset{\sim}{P}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{e}_i\}$.

Άσκηση 3: Χρησιμοποιώντας ως δεδομένο ότι $\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{lr} & \delta_{ls} & \delta_{lt} \\ \delta_{mr} & \delta_{ms} & \delta_{mt} \\ \delta_{nr} & \delta_{ns} & \delta_{nt} \end{vmatrix}$, να δείξετε με τη σειρά τα εξής:

α) $\varepsilon_{lmt}\varepsilon_{rst} = \delta_{lr}\delta_{ms} - \delta_{ls}\delta_{mr}$, β) $\varepsilon_{lst}\varepsilon_{rst} = 2\delta_{lr}$, γ) $\varepsilon_{rst}\varepsilon_{rst} = 6$

Άσκηση 4: Έστω τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, και $\vec{a}$. Χρησιμοποιήστε συμβολισμό με δείκτες για να δείξετε τα εξής:
α) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$
β) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{a}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{a}) - (\vec{u} \cdot \vec{a})(\vec{v} \cdot \vec{w})$
γ) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = (\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w})^2$
δ) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{a}) + (\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{u} \times \vec{a}) + (\vec{w} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{a}) = -2(\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w})\vec{a}$

Άσκηση 5: Έστω τα διανυσματικά πεδία $\vec{u}$ και $\vec{v}$, και τα βαθμωτά πεδία φ και ψ. Χρησιμοποιήστε συμβολισμό με δείκτες για να δείξετε τα εξής:
α) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{u}) = 0$
β) $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\varphi) = \vec{o}$
γ) $\operatorname{div}(\varphi\vec{u}) = (\operatorname{grad}\varphi) \cdot \vec{u} + \varphi \operatorname{div}\vec{u}$
δ) $\operatorname{curl}(\varphi\vec{u}) = (\operatorname{grad}\varphi) \times \vec{u} + \varphi \operatorname{curl}\vec{u}$
ε) $\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = (\operatorname{curl}\vec{u}) \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \operatorname{curl}\vec{v}$
στ) $\operatorname{curl}(\vec{u} \times \vec{v}) = (\operatorname{grad}\vec{u})\vec{v} - (\operatorname{grad}\vec{v})\vec{u} + \vec{u} \operatorname{div}\vec{v} - \vec{v} \operatorname{div}\vec{u}$
ζ) $\operatorname{div}[\operatorname{grad}(\varphi\psi)] = \varphi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\varphi + 2(\operatorname{grad}\varphi) \cdot (\operatorname{grad}\psi)$

Άσκηση 6: Δείξτε ότι το ίχνος και η ορίζουσα ενός τανυστή $\underset{\sim}{T}$ 2^{ης} τάξης μένουν αναλλοίωτες κατά την αλλαγή βάσης $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$, όπου $\mathbb{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ και $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ είναι ορθοκανονικές βάσεις του $\mathcal{E}$.

Άσκηση 7: Έστω δύο ορθοκανονικές βάσεις $\mathbb{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ και $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$ και έστω $\underset{\sim}{Q}$ ο τανυστής αλλαγής βάσης $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$. Δείξτε ότι αν $\det\underset{\sim}{Q} = +1$, τότε η ποσότητα $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$ μένει αναλλοίωτη κατά την αλλαγή βάσης. Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο όταν $\det\underset{\sim}{Q} = -1$.

Άσκηση 8: Έστω ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{u}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ και ένα τανυστικό πεδίο $2^{ης}$ τάξης $\underset{\sim}{T}:\mathcal{E}\to Lin$, και έστω δύο ορθοκανονικές βάσεις $\mathbb{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ και $\mathbb{B}=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$ με $\underset{\sim}{Q}$ να είναι ο τανυστής αλλαγής βάσης $\mathbb{E}\to\mathbb{B}$.

α) Δείξτε ότι οι αποκλίσεις $\operatorname{div}\vec{u}$ και $\operatorname{div}\underset{\sim}{T}$ μένουν αναλλοίωτες κατά την αλλαγή βάσης $\mathbb{E}\to\mathbb{B}$.

β) Δείξτε ότι η ποσότητα $\operatorname{curl}\vec{u}$ μένει αναλλοίωτη κατά την αλλαγή βάσης $\mathbb{E}\to\mathbb{B}$, όταν $\underset{\sim}{Q}\in Orth_+$.

Άσκηση 9: Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να δειχθεί ότι: $\det(\underset{\sim}{T}-\lambda\underset{\sim}{1})=-\lambda^3+I_T\lambda^2-II_T\lambda+III_T$, όπου I_T, II_T, III_T είναι οι βασικές αναλλοίωτες του τανυστή $2^{ης}$ τάξης $\underset{\sim}{T}$ οι οποίες ορίζονται ως: $I_T=\operatorname{tr}(\underset{\sim}{T})$, $II_T=\frac{1}{2}\left([\operatorname{tr}(\underset{\sim}{T})]^2-\operatorname{tr}(\underset{\sim}{T}^2)\right)$ και $III_T=\det\underset{\sim}{T}$.

Άσκηση 10: Έστω ότι ένας συμμετρικός τανυστής $2^{ης}$ τάξης $\underset{\sim}{T}$ που έχει δυο ίσες ιδιοτιμές, δηλ. $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3$. Τότε η χαρακτηριστική του εξίσωση γίνεται: $\det(\underset{\sim}{T}-\lambda\underset{\sim}{1})=-(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^2=0$. Να δειχθεί ότι ο $\underset{\sim}{T}$ ικανοποιεί την εξίσωση: $\underset{\sim}{T}^2-(\lambda_1+\lambda_2)\underset{\sim}{T}+\lambda_1\lambda_2\underset{\sim}{1}=\underset{\sim}{O}$.

Άσκηση 11: Έστω τανυστής $2^{ης}$ τάξης $\underset{\sim}{T}$ με μητρώο συνιστωσών $[\underset{\sim}{T}]=\begin{bmatrix}7&3&0\\3&7&4\\0&4&7\end{bmatrix}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{e}_i\}$.

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{T}$,

β) Να βρεθεί ένα ορθοκανονικό σύστημα ιδιοδιανυσμάτων του $\underset{\sim}{T}$,

γ) Να βρεθεί ο $\underset{\sim}{T}^{1/2}$ και να γραφτούν οι συνιστώσες του ως προς τη βάση $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.

Άσκηση 12: Έστω τανυστής $2^{ης}$ τάξης $\underset{\sim}{F}$ με μητρώο συνιστωσών $[\underset{\sim}{F}]=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{e}_i\}$. Υπολογίστε τους τανυστές $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{U}$ και $\underset{\sim}{V}$ της πολικής παραγοντοποίησης και γράψτε τις συνιστώσες τους ως προς τη βάση $\{\vec{e}_i\}$. Ποιες οι συνιστώσες του δεξιού τανυστή Cauchy-Green $\underset{\sim}{C}$;

Άσκηση 13: Έστω η κίνηση ενός συνεχούς μέσου: $\left\{\begin{aligned}y_1&=e^t+x_1-1\\y_2&=x_2\cos t-x_3\sin t\\y_3&=x_2\sin t+x_3\cos t\end{aligned}\right\}$. Να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα σε υλική και χωρική περιγραφή.

β) Η επιτάχυνση σε υλική και χωρική περιγραφή.

γ) Η κλίση της παραμόρφωσης και ο δεξιός Cauchy-Green τανυστής.

Επίσης, εξετάστε εάν η κίνηση είναι ισόχωρη.

Άσκηση 14: Δίνεται το χωρικό πεδίο ταχύτητας: $\vec{v}(\vec{y},t)=-\kappa y_2\vec{e}_1+\kappa y_1\vec{e}_2+\lambda(y_1^2+y_2^2)\vec{e}_3$, με κ,λ σταθερές.

α) Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x},t)$.

β) Να γραφτεί η ταχύτητα σε υλική περιγραφή.

γ) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση σε υλική και χωρική περιγραφή.

δ) Να διαπιστωθεί ότι κάθε υλικό σημείο του συνεχούς μέσου κινείται σε (κυκλική) κυλινδρική επιφάνεια με σταθερό μέτρο ταχύτητας.

ε) Να βρεθεί η υλική παράγωγος των μεγεθών:

i) $\psi=y_1+2t^2y_2-3y_3$, και ii) $\vec{w}=(y_1t-y_2)\vec{e}_1+y_1y_3t^3\vec{e}_2-3y_2\vec{e}_3$

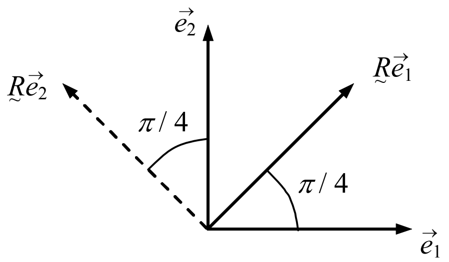
Άσκηση 15: Το χωρικό πεδίο ταχύτητας ενός συνεχούς μέσου δίνεται ως: $\vec{v}\left(\vec{y},t\right)=\dfrac{y_1}{1+t}\vec{e}_1+\dfrac{2y_2}{1+t}\vec{e}_2+\dfrac{3y_3}{1+t}\vec{e}_3$.

Να υπολογιστούν:

α) Η επιτάχυνση σε χωρική και υλική περιγραφή.

β) Εξετάστε αν η κίνηση είναι αστρόβιλη και ισόχωρη. Αν δεν είναι ισόχωρη, βρείτε τα ζεύγη $\left(\vec{x},t\right)$ για τα οποία έχουμε διαστολή όγκου.

Άσκηση 16 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Ιουν2007): Έστω το χωρικό πεδίο ταχύτητας: $\vec{v}\left(\vec{y},t\right)=y_2\varphi(y_1,y_2)\vec{e}_1-y_1\varphi(y_1,y_2)\vec{e}_2$. Βρείτε τη μορφή της συνάρτησης $\varphi(y_1,y_2)$ έτσι ώστε η κίνηση να είναι αστρόβιλη και το συνεχές μέσο ασυμπίεστο.



Άσκηση 17 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Ιαν2006): α) Να βρεθεί το μητρώο συνιστωσών ως προς ΟΚ βάση $\{\vec{e}_i\}$ του τανυστή στροφής $\underset{\sim}{R}$ περί του άξονα $\vec{e}_3$ κατά γωνία $\pi/4$.

β) Να βρεθεί (χωρίς υπολογισμούς) μια μόνο ιδιοτιμή και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του $\underset{\sim}{R}$

Άσκηση 18 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Ιαν2006): Η παραμόρφωση $\vec{f}:\varDelta\to\varDelta_*$ έχει συνιστώσες (ως προς ΟΚ βάση) τις: $f_1(\vec{x})=x_1+x_2$, $f_2(\vec{x})=x_1-x_2$, $f_3(\vec{x})=\varphi(x_3)$, όπου $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, και $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$.

α) Ποιο είναι το πρόσημο της παραγώγου $\varphi'(x_3)$;

β) Αν η $\vec{f}$ διατηρεί τον όγκο (ισόχωρη) και $\varphi(0)=0$, βρείτε την $\varphi(x_3)$ $\forall x_3\in\mathbb{R}$.

γ) Αν η $\vec{f}$ είναι ισόχωρη, βρείτε το μητρώο συνιστωσών του τανυστή έκτασης $\underset{\sim}{U}=(\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F})^{1/2}$.

Άσκηση 19 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Ιαν2006): Σώμα υφίσταται χρονικά ανεξάρτητη παραμόρφωση ενώ ισχύουν τα ισοζύγια ορμής και στροφορμής. Στην παραμορφωμένη περιοχή το πεδίο του τανυστή των τάσεων του Cauchy δίνεται ως $\underset{\sim}{T}\left(\vec{y}\right)=\vec{d}\otimes\vec{y}+c\vec{y}\otimes\vec{d},\ \forall\vec{y}\in\varDelta_*$, όπου $\vec{d}=$ σταθ. $\in\mathcal{E}$, $c=$ σταθ. $\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η τιμή της c.

β) Να βρεθεί το πεδίο δύναμης σώματος στην $\varDelta_*$.

Άσκηση 20: Έστω οι ποσότητες $B_{ij}a_j$, $B_{ij}a_i$, $A_{ij}B_{jk}B_{lk}$, $\varepsilon_{ijk}A_{jm}B_{kl}v_m u_l$, $A_{ij}B_{ji}$. Ποιες από αυτές αντιπροσωπεύουν βαθμωτά μεγέθη, ποιες τις συνιστώσες διανυσμάτων και ποιες τις συνιστώσες τανυστών; Γράψτε τα αντίστοιχα βαθμωτά, διανυσματικά και τανυστικά μεγέθη χωρίς συνιστώσες.

Άσκηση 21 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Σεπτ2006): ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ τανυστής $\underset{\sim}{A}$ έχει μητρώο συνιστωσών $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & b\\ 0 & c & 1/2\end{bmatrix}$ σε κάποια ΟΚ βάση. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των b, c και να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία του τανυστή (με λόγια).

Άσκηση 22 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Σεπτ2006): Κίνηση σώματος δίνεται σαν $\vec{f}\left(\vec{x},t\right)=\underset{\sim}{R}(t)\vec{x},\ \forall\vec{x}\in R$, όπου $\underset{\sim}{R}(t)$ είναι χρονικά εξαρτώμενος τανυστής στροφής.

α) Δείξτε ότι ο τανυστής $\underset{\sim}{W}(t)=\underset{\sim}{R}'(t)\underset{\sim}{R}^T(t)$ είναι λοξός.

β) Γράψτε τα πεδία χωρικής ταχύτητας και χωρικής επιτάχυνσης γι αυτή την κίνηση χωρίς να χρησιμοποιήσετε συνιστώσες.

γ) Επειδή ο $\underset{\sim}{W}(t)$ είναι λοξός, έχει αξονικό διάνυσμα $\vec{w}(t)$. Βρείτε εκφράσεις για τα πεδία χωρικής ταχύτητας και χωρικής επιτάχυνσης που περιέχουν μόνο το $\vec{y}\in\varDelta_t$, το $\vec{w}(t)$ και παραγώγους του $\vec{w}(t)$.

Άσκηση 23 (Θέμα Μ.Σ.Μ. Σεπτ2006): Σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας με πεδίο τανυστή τάσεων Cauchy $\underset{\sim}{T}(\vec{y}) = (\vec{y}\cdot\vec{e})^2 \vec{e}\otimes\vec{e}$, όπου $\vec{e}$ είναι σταθερό διάνυσμα. Να βρεθεί το πεδίο δύναμης σώματος.

Άσκηση 24 (Παλιό θέμα Μ.Θ.Υ.): Για τα πεδία $\vec{u}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ και $\underset{\sim}{S}:\mathcal{E}\to Sym$, $\vec{u},\underset{\sim}{S}\in C^2(\mathcal{E})$, αποδείξτε τις ταυτότητες:

α) $\nabla\cdot(\underset{\sim}{S}\vec{u}) = \underset{\sim}{S}\cdot sym\nabla\vec{u} + \vec{u}\cdot(\nabla\cdot\underset{\sim}{S})$

β) $\nabla\cdot[(\nabla\vec{u})\vec{u}] - (\nabla\vec{u})^T\cdot\nabla\vec{u} - \vec{u}\cdot\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = 0$

Άσκηση 25 (Παλιό θέμα Μ.Θ.Υ.): Αν $\mathit{\Delta}\subset\mathcal{E}$ είναι ανοικτή περιοχή και $\vec{f}:\mathit{\Delta}\to\mathcal{E}$ είναι η απεικόνιση που σε ΟΚ βάση έχει συνιστώσες: $f_1(\vec{x}) = x_1$, $f_2(\vec{x}) = x_2 + g(x_1)$, $f_3(\vec{x}) = x_3 + h(x_1,x_2)$, όπου $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g\in C^1(\mathbb{R})$, $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$, αποδείξτε ότι η $\vec{f}$ είναι παραμόρφωση, δηλαδή ότι $\vec{f}\in C^1(\mathit{\Delta})$, $\det\nabla\vec{f} > 0$ εν $\mathit{\Delta}$, και ότι η $\vec{f}$ είναι ολικά αντιστρέψιμη.

Άσκηση 26: Συνεχές μέσο υφίσταται την παραμόρφωση $\vec{f}:\mathit{\Delta}\to\mathit{\Delta}_*$ με συνιστώσες (ως προς ΟΚ βάση $\{\vec{e}_i\}$) τις: $f_1(\vec{x}) = x_1 + \kappa(x_3^4 - x_2^4 + 2x_1)$, $f_2(\vec{x}) = x_2 + \kappa(x_1^4 - x_3^4 + 2x_2)$, $f_3(\vec{x}) = x_3 + \kappa(x_2^4 - x_1^4 + 2x_3)$, όπου $\kappa = \text{σταθ.}\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογιστεί το μητρώο συνιστωσών του δεξιού Cauchy-Green τανυστή $\underset{\sim}{C}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_i\}$.

β) Να υπολογιστούν οι εκτάσεις κατά τις διευθύνσεις των διανυσμάτων της ΟΚ βάσης $\{\vec{e}_i\}$ και οι γωνίες διάτμησης $\gamma(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$, $i\neq j$, στο υλικό σημείο (1,1,0).

γ) Να βρεθεί η έκταση στο σημείο (1,1,0), κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

δ) Σε ποια υλικά σημεία δύο διευθύνσεις αρχικά παράλληλες προς του άξονες x_1, x_2, αντίστοιχα, διατηρούν την καθετότητα τους;

Άσκηση 27: Δίνεται το υλικό πεδίο ταχύτητας: $\vec{v}(\vec{x},t) = \kappa x_2\vec{e}_1 - 2\kappa t x_1\vec{e}_2 + 3\kappa^2 t^2 x_3\vec{e}_3$, όπου $\kappa = \text{σταθ.}\in\mathbb{R}$.

α) Αποδείξτε ότι όλα τα υλικά σημεία που, σε χρόνο $t=0$ βρίσκονται μέσα στη μοναδιαία σφαίρα $x_i x_i \le 1$, θα βρεθούν, σε χρόνο $t=1$, μέσα σε ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής περί τον άξονα Ox_3.

β) Για ποια τιμή του κ ο όγκος του ελλειψοειδούς είναι διπλάσιος από τον όγκο της σφαίρας;

Άσκηση 28: Δίνεται το χωρικό πεδίο ταχύτητας: $\vec{v}(\vec{y},t) = y_1\vec{e}_1 - y_2\vec{e}_2 + \dfrac{y_3}{1+t}\vec{e}_3$. Να υπολογιστεί το μέτρο ταχύτητας του υλικού σημείου $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, τη χρονική στιγμή $t = \ln 2$

Απάντηση: $|\vec{v}| = 3$

Άσκηση 29: Το πεδίο ταχύτητας ενός ρευστού προέρχεται από το δυναμικό $\varphi = \ln r$ με $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. Είναι το ρευστό ασυμπίεστο;

Άσκηση 30: Για ένα συνεχές μέσο οι συνιστώσες του τανυστή τάσης Cauchy είναι: $T_{11} = \kappa y_3$, $T_{12} = -\kappa y_2$, $T_{13} = -\kappa y_1$, $T_{22} = \kappa y_1$, $T_{23} = -\kappa y_3$ και $T_{33} = \kappa y_2$. Να υπολογιστεί το διάνυσμα της συνολικής επιφανειακής δύναμης που ασκείται στο ημικύκλιο $y_1^2 + y_2^2 = 1$, $y_1 \ge 0$ που βρίσκεται στο επίπεδο $y_3 = 0$.

Άσκηση 31: Υπολογίστε τη σταθερά α έτσι ώστε το χωρικό πεδίο ταχύτητας $\vec{v}(\vec{y},t) = (y_2^2 e^{-2t} - y_1^2 y_2 t^3)\vec{e}_1 + (y_1 e^{-t} + \alpha y_1 y_2^2 t^3)\vec{e}_2$ να αντιστοιχεί σε ένα ασυμπίεστο συνεχές μέσο.

Άσκηση 32: Το χωρικό πεδίο ταχύτητας μιας κίνησης δίνεται ως $\vec{v}(\vec{y},t) = (y_2^2 t - y_1^2 t + y_2)\vec{e}_1 + (3y_1y_2 - y_1^2t^2)\vec{e}_2$, και το χωρικό πεδίο θερμοκρασίας ως $\theta(\vec{y},t) = 4y_2^2 - y_1^2 t$, σε αυθαίρετες μονάδες. Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής $\dot{\theta}$ της θερμοκρασίας στο σημείο $(y_1,y_2) = (1,2)$ τη χρονική στιγμή $t=3$.

Άσκηση 33: Δίνονται οι συνιστώσες του τανυστή τάσης Cauchy: $T_{11} = 1$, $T_{12} = 1$, $T_{13} = 2$, $T_{22} = \alpha$, $T_{23} = 1$ και $T_{33} = 0$. Να προσδιοριστεί η τιμή του α και το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$ (με $n_1 > 0$) κάθετο σε κάποιο επίπεδο E_1 που περνά από την αρχή των αξόνων O, αν γνωρίζουμε ότι η ολκή ως προς το επίπεδο E_1 είναι μηδέν, δηλαδή $\vec{t}(\vec{n}) = \vec{o}$.