ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

<u>Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μηχανική του Συνεχούς Μέσου» (ΕΜ257)</u>

Ηράκλειο, 29 Μαΐου 2009

<u>Θέμα 1ο (μονάδες 2.0)</u>

Έστω ο τανυστής προβολής $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{1} - \vec{n} \otimes \vec{n}$, όπου $|\vec{n}| = 1$.

α) [*μονάδες: 0.4*] Υπολογίστε το ίχνος του $\underset{\sim}{P}$.

β) [*μονάδες: 1.0*] Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{P}$ χωρίς να κάνετε πράξεις (με ορίζουσες, μητρώα κλπ), αλλά μόνο σκεφτόμενοι/ες γεωμετρικά.

γ) [*μονάδες: 0.6*] Έστω ο τανυστής ανάκλασης $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{1} - 2\vec{n} \otimes \vec{n}$. Να υπολογιστεί το γινόμενο $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}$. Εξηγήστε το αποτέλεσμα γεωμετρικά.

<u>Θέμα 2ο (μονάδες 3.0)</u>

Συνεχές μέσο υφίσταται την παραμόρφωση $\vec{f} : \Delta \to \Delta_*$ με συνιστώσες (ως προς ΟΚ βάση $\{\vec{e}_i\}$) τις:

$$f_1(\vec{x}) = 2x_1, \qquad f_2(\vec{x}) = 3x_2 + x_1^2, \qquad f_3(\vec{x}) = x_3 + x_1 x_2$$

α) [*μονάδες: 0.6*] Να υπολογιστεί το μητρώο συνιστωσών της βαθμίδας παραμόρφωσης ως προς τη βάση $\{\vec{e}_i\}$. Είναι η παραμόρφωση ομοιογενής; Είναι ισόχωρη;

β) [*μονάδες: 0.6*] Να υπολογιστεί το μητρώο συνιστωσών του δεξιού Cauchy-Green τανυστή $\underset{\sim}{C}(\vec{x})$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_i\}$.

γ) [*μονάδες: 0.6*] Να υπολογιστούν οι εκτάσεις $\lambda(\vec{x}, \vec{e}_i)$ κατά τις διευθύνσεις των διανυσμάτων της ΟΚ βάσης $\{\vec{e}_i\}$ και να εξετάσετε αν έχουμε αύξηση ή ελάττωση του μήκους των υλικών ινών σε αυτές τις διευθύνσεις.

δ) [*μονάδες: 0.6*] Να υπολογιστούν τα ημίτονα των γωνιών διάτμησης $\gamma(\vec{x}_o, \vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i \neq j$, στο υλικό σημείο $\vec{x}_o = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

ε) [*μονάδες: 0.6*] Να βρεθεί η έκταση στο υλικό σημείο $\vec{x}_o = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

<u>Θέμα 3ο (μονάδες 2.5)</u>

Δίνεται το χωρικό πεδίο ταχύτητας: $\vec{v}(\vec{y}, t) = \left(y_1 y_3 e^{-t}\right)\vec{e}_1 + \left(-y_2 y_3 e^{-t}\right)\vec{e}_2$.

α) [*μονάδες: 0.5*] Εξετάστε αν το υλικό είναι ασυμπίεστο.

β) [*μονάδες: 0.6*] Εξετάστε αν η κίνηση είναι αστρόβιλη.

γ) [*μονάδες: 1.4*] Υπολογίστε το χωρικό πεδίο επιτάχυνσης.

<u>Θέμα 4ο (μονάδες 2.5)</u>

Σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας με πεδίο τανυστή τάσεων Cauchy $\underset{\sim}{T}(\vec{y}) = |\vec{y}|^2 \vec{d} \otimes \vec{c}$, όπου $\vec{d}$ είναι γνωστό σταθερό μη-μηδενικό διάνυσμα και $\vec{c}$ άγνωστο σταθερό μη-μηδενικό διάνυσμα.

α) [*μονάδες: 0.6*] Να βρεθεί ποια ιδιότητα πρέπει να έχει το $\vec{c}$ και επιλέξτε ένα τέτοιο $\vec{c}$ για να απαντήσετε στα υπόλοιπα ερωτήματα.

β) [*μονάδες: 1.2*] Θεωρώντας ότι η πυκνότητα είναι $\rho(\vec{y}) = \rho = \sigma\tau\alpha\theta.$, να βρεθεί το πεδίο δύναμης σώματος ανά μονάδα όγκου $\rho\vec{b}(\vec{y})$.

γ) [*μονάδες: 0.7*] Να βρεθεί το διάνυσμα ολκής $\vec{t}(\vec{n}, \vec{y})$ στα επίπεδα που είναι κάθετα στο $\vec{d}$.

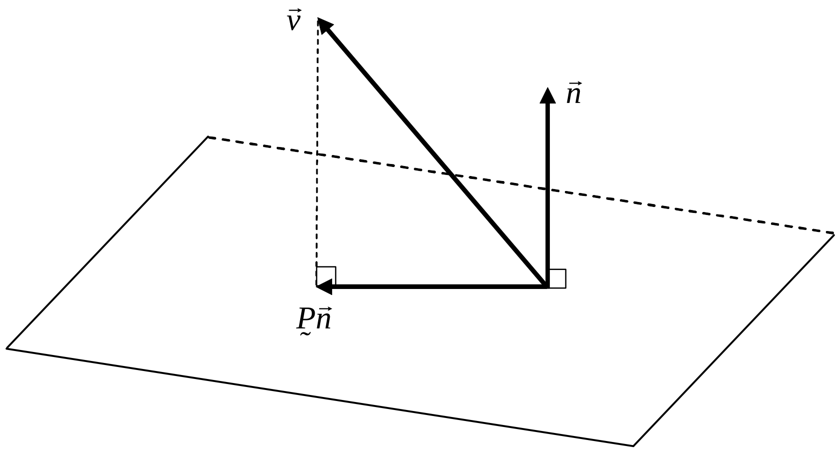
Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΪΟΥ 2009

Θέμα 1

α) $\mathrm{tr}(\underset{\sim}{P}) = \mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{1} - \vec{n}\otimes\vec{n}\right) = \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{1} - \mathrm{tr}\left(\vec{n}\otimes\vec{n}\right) = 3 - \vec{n}\bullet\vec{n} = 3 - \left|\vec{n}\right|^2 = 3 - 1 = 2$

β) Αν $\vec{v}$ ένα οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα του $\mathcal{E}$, τότε το $\underset{\sim}{P}\vec{v}$ είναι η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο επίπεδο που έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το $\vec{n}$. Σχηματικά:



Από τον ορισμό του ιδιοδιανύσματος, ξέρουμε ότι ένας τανυστής δεν αλλάζει τη διεύθυνση ενός ιδιοδιανύσματος του (μπορεί ν' αλλάζει ή όχι τη φορά και το μέγεθος του). Σκεφτόμενοι/ες στην περίπτωση μας λοιπόν γεωμετρικά, έχουμε:

Προφανώς, το κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ προβάλλεται στο μηδενικό διάνυσμα $\vec{o}$. Άρα, $\boxed{\underset{\sim}{P}\vec{n} = 0\vec{n}}$, δηλαδή το $\vec{n}$ (και επομένως κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα πάνω στη διεύθυνση του $\vec{n}$) είναι ιδιοδιάνυσμα του $\underset{\sim}{P}$ με ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$.

Επίσης, αν $\vec{m}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα που ανήκει στο επίπεδο, τότε αυτό προβάλλεται στον εαυτό του. Άρα, $\boxed{\underset{\sim}{P}\vec{m} = \vec{m}}$, δηλαδή είναι ιδιοδιάνυσμα του $\underset{\sim}{P}$ με ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$.

Οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα του $\mathcal{E}$ προβάλλεται σε διάνυσμα που δεν είναι στην ίδια ευθεία. Άρα, δεν υπάρχουν άλλα ιδιοδιανύσματα.

Ο χαρακτηριστικός χώρος (ιδιόχωρος) της $\lambda_1 = 0$ είναι η ευθεία που ορίζεται από το $\vec{n}$, ενώ ο χαρακτηριστικός χώρος (ιδιόχωρος) της $\lambda_2 = 1$ είναι το επίπεδο προβολής.

γ)
$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P} &= \left(\underset{\sim}{1} - 2\vec{n}\otimes\vec{n}\right)\left(\underset{\sim}{1} - \vec{n}\otimes\vec{n}\right) = \underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{1}(\vec{n}\otimes\vec{n}) - (2\vec{n}\otimes\vec{n})\underset{\sim}{1} + (2\vec{n}\otimes\vec{n})(\vec{n}\otimes\vec{n}) = \\
&= \underset{\sim}{1} - (\vec{n}\otimes\vec{n}) - 2(\vec{n}\otimes\vec{n}) + 2(\vec{n}\bullet\vec{n})(\vec{n}\otimes\vec{n}) = \underset{\sim}{1} - 3(\vec{n}\otimes\vec{n}) + 2\left|\vec{n}\right|^2(\vec{n}\otimes\vec{n}) = \\
&= \underset{\sim}{1} - 3(\vec{n}\otimes\vec{n}) + 2(\vec{n}\otimes\vec{n}) = \underset{\sim}{1} - \vec{n}\otimes\vec{n} = \underset{\sim}{P}
\end{aligned}$$

Άρα, $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}$, το οποίο σημαίνει $(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P})\vec{v} = \underset{\sim}{P}\vec{v}, \quad \forall\,\vec{v}\in\mathcal{E}$, δηλαδή $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{P}\vec{v}) = \underset{\sim}{P}\vec{v}, \quad \forall\,\vec{v}\in\mathcal{E}$.

Γεωμετρική ερμηνεία: Αν $\vec{v}$ ένα οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα του $\mathcal{E}$, τότε το $\underset{\sim}{A}\vec{v}$ είναι το «είδωλο» του $\vec{v}$ ως προς το επίπεδο που έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το $\vec{n}$. Αν λοιπόν ο $\underset{\sim}{A}$ εφαρμοστεί στο $\underset{\sim}{P}\vec{v}$ το οποίο ανήκει στο επίπεδο για κάθε $\vec{v}\in\mathcal{E}$, το «είδωλο» του θα είναι ο εαυτός του.

Θέμα 2

α) $\underset{\sim}{F}(\vec{x}) = \nabla \vec{f}(\vec{x}) \;\Rightarrow\; F_{ij}(\vec{x}) = \dfrac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} \;\Rightarrow\; \left[\underset{\sim}{F}(\vec{x})\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_3} \end{bmatrix} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \left[\underset{\sim}{F}(\vec{x})\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 3 & 0 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{bmatrix}$, το οποίο εξαρτάται από το $\vec{x}$ και άρα η ΠΜΦ <u>δεν</u> είναι ομοιογενής

Επίσης, $\det\{\underset{\sim}{F}(\vec{x})\} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 3 & 0 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 1$, και άρα η ΠΜΦ <u>δεν</u> είναι ισόχωρη.

β) $\left[\underset{\sim}{C}(\vec{x})\right] = \left[\underset{\sim}{F}(\vec{x})\right]^T \left[\underset{\sim}{F}(\vec{x})\right] \;\Rightarrow\; \left[\underset{\sim}{C}(\vec{x})\right] = \begin{bmatrix} 2 & 2x_1 & x_2 \\ 0 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 3 & 0 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow\; \left[\underset{\sim}{C}(\vec{x})\right] = \begin{bmatrix} 4 + 4x_1^2 + x_2^2 & 6x_1 + x_1 x_2 & x_2 \\ 6x_1 + x_1 x_2 & 9 + x_1^2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{bmatrix}$

γ) $\lambda(\vec{x}, \vec{e}_1) = \sqrt{C_{11}(\vec{x})} = \sqrt{4 + 4x_1^2 + x_2^2}$, το οποίο είναι μεγαλύτερο από 1 $\forall\, \vec{x} \in \Delta$, και άρα έχουμε <u>αύξηση</u> μήκους των υλικών ινών που στην κατάσταση αναφοράς είναι παράλληλες στο $\vec{e}_1$.

$\lambda(\vec{x}, \vec{e}_2) = \sqrt{C_{22}(\vec{x})} = \sqrt{9 + x_1^2}$, το οποίο είναι επίσης μεγαλύτερο από 1 $\forall\, \vec{x} \in \Delta$, και άρα έχουμε <u>αύξηση</u> μήκους όλων των υλικών ινών που στην κατάσταση αναφοράς είναι παράλληλες στο $\vec{e}_2$.

$\lambda(\vec{x}, \vec{e}_3) = \sqrt{C_{33}(\vec{x})} = 1$, και άρα δεν μεταβάλλεται το μήκος των υλικών ινών που στην κατάσταση αναφοράς είναι παράλληλες στο $\vec{e}_3$.

δ) Στο υλικό σημείο $\vec{x}_o = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, έχουμε $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$, οπότε το μητρώο συνιστωσών του $\underset{\sim}{C}(\vec{x})$ που βρήκαμε στο ερώτημα (β) δίνει:

$\left[\underset{\sim}{C}(\vec{x}_o)\right] = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 7 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα, από τη σχέση:

$$\sin\left\{\gamma(\vec{x}_o, \vec{e}_i, \vec{e}_j)\right\} = \frac{C_{ij}(\vec{x}_o)}{\sqrt{C_{ii}(\vec{x}_o)}\sqrt{C_{jj}(\vec{x}_o)}} \quad \text{(χωρίς άθροισμα στους δείκτες),}$$

προκύπτουν:

$$\sin\{\gamma(\vec{x}_o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)\} = \frac{C_{12}(\vec{x}_o)}{\sqrt{C_{11}(\vec{x}_o)}\sqrt{C_{22}(\vec{x}_o)}} = \frac{7}{\sqrt{9}\sqrt{10}} = \frac{7}{3\sqrt{10}},$$

$$\sin\{\gamma(\vec{x}_o,\vec{e}_1,\vec{e}_3)\} = \frac{C_{13}(\vec{x}_o)}{\sqrt{C_{11}(\vec{x}_o)}\sqrt{C_{33}(\vec{x}_o)}} = \frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{1}} = \frac{1}{3}$$

$$\sin\{\gamma(\vec{x}_o,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\} = \frac{C_{23}(\vec{x}_o)}{\sqrt{C_{22}(\vec{x}_o)}\sqrt{C_{33}(\vec{x}_o)}} = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ε) Έχουμε: $\lambda(\vec{x}_o,\vec{e}) = \left|\underset{\sim}{F}(\vec{x}_o)\vec{e}\right|$,

όπου $\vec{e}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$

Στο υλικό σημείο $\vec{x}_o = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, έχουμε $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$, οπότε το μητρώο συνιστωσών του $\underset{\sim}{F}(\vec{x})$ που βρήκαμε στο ερώτημα (α) δίνει:

$$\Rightarrow \quad \left[\underset{\sim}{F}(\vec{x}_o)\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης, το μοναδιαίο $\vec{e}$ κατά διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ είναι το:

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}}\left(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right) = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right)$$

Άρα: $\left[\underset{\sim}{F}(\vec{x}_o)\vec{e}\right] = \left[\underset{\sim}{F}(\vec{x}_o)\right]\left[\vec{e}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/\sqrt{14} \\ 9/\sqrt{14} \\ 6/\sqrt{14} \end{bmatrix}$

Επομένως, $\lambda(\vec{x}_o,\vec{e}) = \left|\underset{\sim}{F}(\vec{x}_o)\vec{e}\right| = \sqrt{\frac{6^2}{14} + \frac{9^2}{14} + \frac{6^2}{14}} = \sqrt{\frac{153}{14}}$

<u>Θέμα 3</u>

α) $\nabla \bullet \vec{v}\left(\vec{y},t\right) = \frac{\partial v_1\left(\vec{y},t\right)}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2\left(\vec{y},t\right)}{\partial y_2} + \frac{\partial v_3\left(\vec{y},t\right)}{\partial y_3} = y_3 e^{-t} - y_3 e^{-t} + 0 = 0, \quad \forall\, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\forall\, t \in \mathbb{R}$

Άρα το υλικό <u>είναι</u> ασυμπίεστο.

β) $\nabla \times \vec{v}\left(\vec{y},t\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial y_1} & \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_3} \\ y_1 y_3 e^{-t} & -y_2 y_3 e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = \left(y_2 e^{-t}\right)\vec{e}_1 + \left(y_1 e^{-t}\right)\vec{e}_2$

το οποίο δεν είναι ίσο με $\vec{o}$ για όλα τα $\left(\vec{y},t\right)$ και άρα το υλικό <u>δεν</u> είναι αστρόβιλο.

γ) $\vec{a}(\vec{y},t)=\dot{\vec{v}}(\vec{y},t) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(\vec{y},t)=\dfrac{\partial \vec{v}(\vec{y},t)}{\partial t}+\{\nabla\vec{v}(\vec{y},t)\}\vec{v}(\vec{y},t)$ (1)

όπου: $\dfrac{\partial \vec{v}(\vec{y},t)}{\partial t}=\left(-y_1 y_3 e^{-t}\right)\vec{e}_1+\left(y_2 y_3 e^{-t}\right)\vec{e}_2$ (2)

$$\{\nabla\vec{v}(\vec{y},t)\}_{ij}=\frac{\partial v_i(\vec{y},t)}{\partial y_j} \quad \Rightarrow \quad [\nabla\vec{v}(\vec{y},t)]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1(\vec{y},t)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_1(\vec{y},t)}{\partial y_2} & \dfrac{\partial v_1(\vec{y},t)}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial v_2(\vec{y},t)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_2(\vec{y},t)}{\partial y_2} & \dfrac{\partial v_2(\vec{y},t)}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial v_3(\vec{y},t)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_3(\vec{y},t)}{\partial y_2} & \dfrac{\partial v_3(\vec{y},t)}{\partial y_3} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad [\nabla\vec{v}(\vec{y},t)]=\begin{bmatrix} y_3 e^{-t} & 0 & y_1 e^{-t} \\ 0 & -y_3 e^{-t} & -y_2 e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $\left[\{\nabla\vec{v}(\vec{y},t)\}\vec{v}(\vec{y},t)\right]=\begin{bmatrix} y_3 e^{-t} & 0 & y_1 e^{-t} \\ 0 & -y_3 e^{-t} & -y_2 e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 y_3 e^{-t} \\ -y_2 y_3 e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 y_3^2 e^{-2t} \\ y_2 y_3^2 e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$

Δηλαδή: $\{\nabla\vec{v}(\vec{y},t)\}\vec{v}(\vec{y},t)=\left(y_1 y_3^2 e^{-2t}\right)\vec{e}_1+\left(y_2 y_3^2 e^{-2t}\right)\vec{e}_2$ (3)

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) προκύπτει το χωρικό πεδίο επιτάχυνσης:

$$\vec{a}(\vec{y},t)=\left(y_1 y_3^2 e^{-2t}-y_1 y_3 e^{-t}\right)\vec{e}_1+\left(y_2 y_3^2 e^{-2t}+y_2 y_3 e^{-t}\right)\vec{e}_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}(\vec{y},t)=y_1 y_3 e^{-t}\left(y_3 e^{-t}-1\right)\vec{e}_1+y_2 y_3 e^{-t}\left(y_3 e^{-t}+1\right)\vec{e}_2$$

Θέμα 4

α) Από το τοπικό ισοζύγιο στροφορμής (Τ.Ι.Σ.) έχουμε:

$\underset{\sim}{T}(\vec{y})=\underset{\sim}{T}^T(\vec{y}) \quad \Rightarrow \quad |\vec{y}|^2\,\vec{d}\otimes\vec{c}=\left(|\vec{y}|^2\,\vec{d}\otimes\vec{c}\right)^T \quad \Rightarrow \quad |\vec{y}|^2\,\vec{d}\otimes\vec{c}=|\vec{y}|^2\left(\vec{d}\otimes\vec{c}\right)^T \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad |\vec{y}|^2\,\vec{d}\otimes\vec{c}=|\vec{y}|^2\,\vec{c}\otimes\vec{d}$, η οποία ισχύει $\forall\,\vec{y}$, άρα και για $\vec{y}\neq\vec{o}\Rightarrow|\vec{y}|\neq 0$.

Επομένως, $\vec{d}\otimes\vec{c}=\vec{c}\otimes\vec{d}$

Και από τον ορισμό της ισότητας τανυστών προκύπτει ότι $\left(\vec{d}\otimes\vec{c}\right)\vec{v}=\left(\vec{c}\otimes\vec{d}\right)\vec{v}, \quad \forall\,\vec{v}\in\mathcal{E}$

$\Rightarrow \quad (\vec{c}\bullet\vec{v})\vec{d}=\left(\vec{d}\bullet\vec{v}\right)\vec{c}, \quad \forall\,\vec{v}\in\mathcal{E}$

Δηλαδή, ο τανυστής $\vec{d}\otimes\vec{c}$ απεικονίζει κάθε διάνυσμα $\vec{v}$ σε διάνυσμα πάνω στη διεύθυνση του $\vec{d}$, ενώ ο τανυστής $\vec{c}\otimes\vec{d}$ σε διάνυσμα πάνω στη διεύθυνση του $\vec{c}$. Αφού, όμως οι δύο τανυστές είναι ίσοι τα $\vec{c}$ και $\vec{d}$ πρέπει να βρίσκονται στην ίδια διεύθυνση. Άρα, $\vec{c}=\lambda\vec{d}$ με $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Επιλέγω $\vec{c}=\vec{d}$ για ν' απαντήσω στα υπόλοιπα ερωτήματα. Άρα, $\underset{\sim}{T}(\vec{y})=|\vec{y}|^2\,\vec{d}\otimes\vec{d}$

β) Από το τοπικό ισοζύγιο ορμής (Τ.Ι.Ο.) σε κατάσταση ισορροπίας, έχουμε:

$$\nabla\bullet\underset{\sim}{T}(\vec{y})+\rho\vec{b}(\vec{y})=\vec{o} \;\Rightarrow\; \rho\vec{b}(\vec{y})=-\nabla\bullet\underset{\sim}{T}(\vec{y}) \;\Rightarrow\; \rho b_i(\vec{y})=-\frac{\partial T_{ij}(\vec{y})}{\partial y_j} \tag{4}$$

Όμως, $T_{ij}(\vec{y})=\left(|\vec{y}|^2\,\vec{d}\otimes\vec{d}\right)_{ij} \;\Rightarrow\; T_{ij}(\vec{y})=|\vec{y}|^2\,d_i d_j \;\Rightarrow\; T_{ij}(\vec{y})=y_k y_k d_i d_j \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \frac{\partial T_{ij}(\vec{y})}{\partial y_j}=\frac{\partial y_k}{\partial y_j}y_k d_i d_j+y_k\frac{\partial y_k}{\partial y_j}d_i d_j \;\Rightarrow\; \frac{\partial T_{ij}(\vec{y})}{\partial y_j}=2\delta_{kj}y_k d_i d_j \;\Rightarrow\; \frac{\partial T_{ij}(\vec{y})}{\partial y_j}=2y_j d_i d_j$$

Άρα, η (4) γίνεται:

$$\rho b_i(\vec{y})=-2y_j d_i d_j \;\Rightarrow\; \rho b_i(\vec{y})=-2\left(y_j d_j\right)d_i \;\Rightarrow\; \rho b_i(\vec{y})=-2\left(\vec{y}\bullet\vec{d}\right)d_i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \rho\vec{b}(\vec{y})=-2\left(\vec{y}\bullet\vec{d}\right)\vec{d} \;\Rightarrow\; \rho\vec{b}(\vec{y})=-2\left(\vec{d}\otimes\vec{d}\right)\vec{y}$$

γ) Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$ κάθετο στο εν λόγω επίπεδο είναι $\vec{n}=\dfrac{1}{|\vec{d}|}\vec{d}$.

Άρα, $\vec{t}(\vec{n},\vec{y})=\underset{\sim}{T}(\vec{y})\vec{n}=\left(|\vec{y}|^2\,\vec{d}\otimes\vec{d}\right)\dfrac{1}{|\vec{d}|}\vec{d}=\dfrac{|\vec{y}|^2}{|\vec{d}|}\left(\vec{d}\bullet\vec{d}\right)\vec{d}=\dfrac{|\vec{y}|^2}{|\vec{d}|}|\vec{d}|^2\,\vec{d}=|\vec{y}|^2\,|\vec{d}|\,\vec{d}$