

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μηχανική του Συνεχούς Μέσου» (EM257)

Ηράκλειο, 19 Σεπτεμβρίου 2007

Θέμα 1^ο (μονάδες 2)

- α) [μονάδες: 0.8] Σε ποια είδη διακρίνουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα συνεχές μέσο και ποια η φυσική σημασία κάθε είδους;
- β) [μονάδες: 1.2] Να διατυπωθεί ο νόμος ισοζυγίου της (γραμμικής) ορμής και να εξαχθεί αναλυτικά η αντίστοιχη Eulerian διαφορική εξίσωση πεδίου στις τρεις διαστάσεις.

Θέμα 2^ο (μονάδες 2)

- α) [μονάδες: 0.5] Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, δείξτε ότι:

$$\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \operatorname{curl}(\vec{u}) \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \operatorname{curl}(\vec{v})$$

όπου \vec{u}, \vec{v} είναι διανυσματικά πεδία.

- β) [μονάδες: 1.5] Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να δείξετε ότι: $\det(\mathbf{T} - t\mathbf{I}) = -t^3 + I_T t^2 - II_T t + III_T$, όπου I_T, II_T, III_T είναι οι βασικές αναλλοίωτες του τανυστή \mathbf{T} οι οποίες ορίζονται ως: $I_T = \operatorname{tr}(\mathbf{T})$, $II_T = \frac{1}{2}([\operatorname{tr}(\mathbf{T})]^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{T}^2))$ και $III_T = \det \mathbf{T}$.

Θέμα 3^ο (μονάδες 1.5)

- α) [μονάδες: 0.5] Υπολογίστε τη σταθερά α έτσι ώστε το πεδίο ταχύτητας

$$\vec{v}(x_1, x_2, t) = (x_2^2 e^{-2t} - x_1^2 x_2 t^3) \vec{e}_1 + (x_1 e^{-t} + \alpha x_1 x_2^2 t^3) \vec{e}_2$$

να αντιστοιχεί σε ένα ασυμπιεστο συνεχές μέσο.

- β) [μονάδες: 1.0] Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής δίνεται ως $\vec{v}(x_1, x_2, t) = (x_2^2 t - x_1^2 t + x_2) \vec{e}_1 + (3x_1 x_2 - x_1^2 t^2) \vec{e}_2$, και το πεδίο της θερμοκρασίας ως $\theta(x_1, x_2, t) = 4x_2^2 - x_1^2 t$, σε αυθαίρετες μονάδες. Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής $\dot{\theta}$ της θερμοκρασίας στο σημείο $(x_1, x_2) = (1, 2)$ τη χρονική στιγμή $t = 3$.

Θέμα 4^ο (μονάδες 2.5)

- α) [μονάδες: 1.0] Να διατυπωθεί η αρχή διατήρησης της μάζας και να εξαχθούν οι αντίστοιχες εξισώσεις πεδίου στις τρεις διαστάσεις σε περιγραφές Lagrange και Euler. Ποια μορφή λαμβάνουν οι εξισώσεις αυτές στη μία διάσταση.

- β) [μονάδες: 1.5] Δίνεται η μονοδιάστατη ροή $\vec{v} = (2xt) \vec{e}_1$. Να βρεθεί η πυκνότητα $\rho(x, t)$ κατά μήκος του θετικού ημιάξονα των x , αν είναι γνωστό ότι $\rho(1, t) = t^4$.

Θέμα 5^ο (μονάδες 3)

Δίνονται οι συνιστώσες του τανυστή τάσης: $T_{11} = 1$, $T_{12} = 1$, $T_{13} = 2$, $T_{22} = \alpha$, $T_{23} = 1$ και $T_{33} = 0$.

- α) [μονάδες: 1.5] Να προσδιοριστεί η τιμή του α και το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3$ (με $n_1 > 0$) κάθετο σε κάποιο επίπεδο E_1 που περνά από την αρχή των αξόνων O , αν γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα τάσης ως προς το επίπεδο E_1 είναι μηδέν, δηλαδή $\vec{t}_{\vec{n}} = \vec{0}$.
- β) [μονάδες: 1.5] Έστω ένα επίπεδο E_2 πάνω στο οποίο βρίσκεται ο άξονας Ox_3 και είναι τέτοιο ώστε $E_2 \perp E_1$. Να βρεθεί η ορθή τάση ως προς το επίπεδο E_2 .