

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μηχανική του Συνεχούς Μέσου» (EM257)

Ηράκλειο, 6 Σεπτεμβρίου 2009

Θέμα 1^ο (μονάδες 2.5)Έστω μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{e}_i\}$ του \mathcal{E} . Επίσης, έστω $\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$, $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ και $\underline{T} = 2\underline{1} - 3\vec{v} \otimes \vec{u}$.

- α) [μονάδες: 0.5]. Υπολογίστε το ίχνος του \underline{T} .
- β) [μονάδες: 0.6]. Δείξτε ότι το \vec{v} είναι ιδιοδιάνυσμα του \underline{T} χωρίς να χρησιμοποιήσετε μητρώα και ορίζουσες. Ποια είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή;
- γ) [μονάδες: 0.6]. Υπολογίστε τον \underline{T}^2 συναρτήσει του $\vec{v} \otimes \vec{u}$.
- δ) [μονάδες: 0.8]. Βρείτε το μητρώο συνιστώσων του \underline{T} ως προς τη βάση $\{\vec{e}_i\}$.

Θέμα 2^ο (μονάδες 1.5)Έστω ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{u} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ με $\vec{u} \in C^1(\mathcal{E})$ και ένα βαθμωτό πεδίο $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\varphi \in C^2(\mathcal{E})$. Αν \vec{x} είναι το διάνυσμα θέσης ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{e}_i\}$ του \mathcal{E} , χρησιμοποιήστε συμβολισμό με δείκτες για να δείξετε τα εξής:

- α) [μονάδες: 0.7]. $\text{grad}(\vec{u} \cdot \vec{x}) = (\text{grad } \vec{u})^T \vec{x} + \vec{u}$
- β) [μονάδες: 0.8]. $\nabla^2(\varphi \vec{x}) = (\nabla^2 \varphi) \vec{x} + 2 \text{grad } \varphi$

Θέμα 3^ο (μονάδες 2.0)Έστω μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{e}_i\}$ του \mathcal{E} . Ένα συνεχές μέσο υφίσταται τη μετατόπιση $\vec{u} : \Delta \rightarrow \Delta_*$ με

$$\vec{u}(\vec{x}) = -x_2 x_3^3 \vec{e}_1 + x_1 x_3^3 \vec{e}_2$$

- α) [μονάδες: 0.8] Να υπολογιστεί το μητρώο συνιστωσών του δεξιού Cauchy-Green τανυστή $\underline{C}(\vec{x})$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_i\}$.
- β) [μονάδες: 0.6] Να υπολογιστούν τα ημίτονα των γωνιών διάτμησης $\gamma(\vec{x}_o, \vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i \neq j$, στο υλικό σημείο $\vec{x}_o = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.
- γ) [μονάδες: 0.6] Να βρεθεί η έκταση στο υλικό σημείο $\vec{x}_o = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{w} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$. Έχουμε αύξηση ή ελάττωση του μήκους των υλικών ινών σε αυτή τη διεύθυνση;

Θέμα 4^ο (μονάδες 2.5)

Η κίνηση ενός συνεχούς μέσου περιγράφεται από τη σχέση:

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = [x_1 + \varphi(t)g(x_2)]\vec{e}_1 + [x_2 + \varphi(t)x_1]\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad (1)$$

όπου $\{\vec{e}_i\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{E} . Επίσης, $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g \in C^1(\mathbb{R})$.

- α) [μονάδες: 0.5]. Να υπολογιστεί το μητρώο συνιστωσών της βαθμίδας παραμόρφωσης ως προς τη βάση $\{\vec{e}_i\}$.
- β) [μονάδες: 0.4]. Αν $\varphi(t) \neq 0 \forall t > 0$, ποιο πρέπει να είναι το πρόσημο της παραγώγου $g'(x_2)$ έτσι ώστε να έχουμε διαστολή όγκου σε κάθε περιοχή του σώματος;
- γ) [μονάδες: 0.4]. Ποια γενική μορφή πρέπει να έχει η συνάρτηση $g(x_2)$ έτσι ώστε η κίνηση να είναι ομοιογενής;
- δ) [μονάδες: 0.5]. Αν $g(x_2) = x_2$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}$, ποιος περιορισμός ισχύει για την $\varphi(t)$, έτσι ώστε η (1) να περιγράφει πράγματι κίνηση $\forall t \in \mathbb{R}^+$;
- ε) [μονάδες: 0.7]. Αν $g(x_2) = x_2$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}$ και $\varphi(t) = te^{-t}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, να βρεθεί το υλικό σημείο (x_1, x_2, x_3) το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ sec}$ βρίσκεται στη θέση $(y_1, y_2, y_3) = (9, 6, 1)$.

Θέμα 5^ο (μονάδες 2.0)Σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας με πεδίο τανυστή τάσεων Cauchy $\underline{T}(\vec{y}) = (\vec{y} \cdot \vec{d})^2 \vec{d} \otimes \vec{d}$, όπου \vec{d} είναι γνωστό σταθερό μη-μηδενικό διάνυσμα.

- α) [μονάδες: 1.2] Να βρεθεί το πεδίο δύναμης σώματος ανά μονάδα όγκου.
- β) [μονάδες: 0.8] Να βρεθεί το διάνυσμα ολκής $\vec{t}(\vec{n}, \vec{y})$ σε ένα επίπεδο παράλληλο στο \vec{d} .

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες