

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μηχανική του Συνεχούς Μέσου» (EM257)

Ηράκλειο, 27 Ιουνίου 2007

Θέμα 1^ο (μονάδες 3)

α) [μονάδες: 1.0] Να δοθεί η σχηματική απεικόνιση ενός ιξωδοελαστικού στερεού το οποίο αποτελείται από ένα ελατήριο και ένα Kelvin-Voigt στερεό συνδεδεμένα σε σειρά και να δειχθεί αναλυτικά ότι η ολική τάση T και η ολική ανηγμένη παραμόρφωση ε υπακούουν στη διαφορική εξίσωση $\dot{T} + \frac{k_1 + k_2}{\mu} T = k_2 \dot{\varepsilon} + \frac{k_1 k_2}{\mu} \varepsilon$, όπου k_2 η σταθερά του ελατηρίου και k_1, μ οι σταθερές του Kelvin-Voigt

τμήματος.

β) [μονάδες: 2.0] Υποθέτοντας ότι τα T, ε είναι πεπερασμένα όταν ο χρόνος $t \rightarrow -\infty$, να δειχθεί ότι το μοντέλο του ερωτήματος (α) ανήκει στην κατηγορία ιξωδοελαστικών υλικών με μεγάλο εύρος εξάρτησης από την ιστορία της παραμόρφωσης (ολοκληρωτικό μοντέλο), δηλ. ότι η σχέση μεταξύ τάσης και ανηγμένης παραμόρφωσης μπορεί να γραφεί ως

$$T(t) = k_\infty \varepsilon(t) + G(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s)\varepsilon(t-s) ds$$

Ποια είναι η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης χαλάρωσης $G(s)$ και ποια είναι η τιμή του k_∞ (μέτρο ελαστικότητας στην κατάσταση ισορροπίας) που βρήκατε από αυτήν την απόδειξη; Σχεδιάστε ποιοτικά τη γραφική παράσταση της $G(s)$ στο διάστημα $[0, \infty)$ για τρεις τιμές μ_1, μ_2, μ_3 του μ με $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > 0$.

Θέμα 2^ο (μονάδες 2)

α) [μονάδες: 0.5] Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, δείξτε ότι:

$$\text{curl}(\varphi \vec{u}) = (\text{grad } \varphi) \times \vec{u} + \varphi (\text{curl } \vec{u})$$

όπου φ, \vec{u} είναι ένα βαθμωτό και ένα διανυσματικό πεδίο, αντίστοιχα.

β) [μονάδες: 1.5] Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να δείξετε ότι: $\det(\mathbf{T} - t\mathbf{I}) = -t^3 + I_T t^2 - II_T t + III_T$, όπου I_T, II_T, III_T είναι οι βασικές αναλλοίωτες του τανυστή \mathbf{T} οι οποίες ορίζονται ως: $I_T = \text{tr}(\mathbf{T})$, $II_T = \frac{1}{2}([\text{tr}(\mathbf{T})]^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2))$ και $III_T = \det \mathbf{T}$.

Θέμα 3^ο (μονάδες 3)

α) [μονάδες: 1.5] Διατηρούμενη συνεχώς ομογενής, μια αέρια μάζα m διαστέλλεται έχοντας πεδίο ταχυτήτων:

$$\vec{v} = x_1(x_3 - t)\vec{e}_1 - x_2 x_3 \vec{e}_2 + 3t x_3 \vec{e}_3$$

Αν σε χρόνο $t = 0$ η μάζα m κατέχει όγκο V_0 σε πόσο χρόνο θα διπλασιαστεί ο όγκος της;

β) [μονάδες: 1.5] Έστω το πεδίο ταχύτητας: $\vec{v} = x_2 f(x_1, x_2)\vec{e}_1 - x_1 f(x_1, x_2)\vec{e}_2$. Βρείτε τη μορφή της συνάρτησης $f(x_1, x_2)$ έτσι ώστε η ροή να είναι αστρόβιλη και το συνεχές μέσο ασυμπιεστο.

Θέμα 4^ο (μονάδες 2)

Για ένα συνεχές μέσο οι συνιστώσες του τανυστή τάσης είναι: $T_{11} = \kappa x_3$, $T_{12} = -\kappa x_2$, $T_{13} = -\kappa x_1$, $T_{22} = \kappa x_1$, $T_{23} = -\kappa x_3$ και $T_{33} = \kappa x_2$. Να υπολογιστεί το διάνυσμα της συνολικής επιφανειακής δύναμης που ασκείται στο υλικό ημικύκλιο $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1 \geq 0$ που βρίσκεται στο επίπεδο $x_3 = 0$.