**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**
**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

***Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μηχανική των Συνεχών Μέσων» (ΕΜ257)***

Ηράκλειο, 25 Ιανουαρίου 2005

**Θέμα 1ο (μονάδες 2.5)**

(α) Τι συσχετίζουν οι καταστατικές εξισώσεις; Ποιοι λόγοι υπαγορεύουν τη χρήση τους; Πως συνήθως εξάγεται η μορφή τους; Δώστε 4 παραδείγματα καταστατικών εξισώσεων.

(β) Τι εκφράζει ο 1ος νόμος της θερμοδυναμικής; Να διατυπωθεί η σχετική εξίσωση και να εξαχθεί η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση πεδίου σε μια διάσταση, σε μορφή Lagrange και Euler.

(γ) Δώστε τουλάχιστον δυο ποιοτικές διατυπώσεις του 2ου νόμου της θερμοδυναμικής.

**Θέμα 2ο (μονάδες 2.5)**

(α) Να δοθεί η σχηματική απεικόνιση ενός ιξωελαστικού στερεού το οποίο αποτελείται από ένα ελατήριο και ένα Kelvin-Voigt στερεό συνδεδεμένα σε σειρά και να δειχθεί ότι η ολική τάση $T$ και η ολική ανηγμένη παραμόρφωση (strain) $\varepsilon$ υπακούουν στη διαφορική εξίσωση $\dot{T}+\frac{k_1+k_2}{\mu}T=k_2\dot{\varepsilon}+\frac{k_1k_2}{\mu}\varepsilon$, όπου $k_2$ η σταθερά του ελατηρίου και $k_1,\mu$ οι σταθερές του Kelvin-Voigt τμήματος.

(β) Υποθέτοντας ότι τα $T$, $\varepsilon$ είναι πεπερασμένα όταν ο χρόνος $t\to-\infty$, να δειχθεί ότι το μοντέλο του ερωτήματος (α) ανήκει στην κατηγορία ιξωελαστικών υλικών με μεγάλο εύρος εξάρτησης από την ιστορία της παραμόρφωσης (ολοκληρωτικό μοντέλο), δηλ. ότι η σχέση μεταξύ τάσης και ανηγμένης παραμόρφωσης μπορεί να γραφεί ως

$$T(t)=k_\infty\varepsilon(t)+G(0)\varepsilon(t)+\int_0^\infty \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{1}$$

Ποια η έκφραση της συνάρτησης χαλάρωσης $G(s)$ και ποια είναι η τιμή του $k_\infty$ (μέτρο ελαστικότητας στην κατάσταση ισορροπίας) που βρήκατε από αυτήν την απόδειξη; Δώστε τη γραφική παράσταση της $G(s)$ στο διάστημα $[0,\infty)$, για διάφορες τιμές του $\mu(>0)$.

**Θέμα 3ο (μονάδες 2.5)**

(α) Γράψτε και εξηγείστε την πολική αναπαράσταση του τανυστή κλίσης της παραμόρφωσης. Ποια η φυσική λειτουργία των τανυστών που χρησιμοποιήσατε σε αυτήν την αναπαράσταση κατά τη μεταβολή μιας υλικής ίνας $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_i$ στην κατάσταση αναφοράς σε $\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i$ στην τρέχουσα κατάσταση;

(β) Δείξτε ότι μια κίνηση $\mathbf{B_o}\to\mathbf{B_t}$ είναι ισόχωρη αν και μόνο αν: (i) $\det\boldsymbol{F}=1$, $\forall\ \boldsymbol{X}\in\mathbf{B_o}$ και $\forall\ t$ (περιγραφή κατά Lagrange), (ii) $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$, $\forall\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{B_t}$ και $\forall\ t$ (περιγραφή κατά Euler).

**<u>Θέμα 4ο (μονάδες 2.5)</u>**

(α) Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να δείξετε ότι: $\det\left(\boldsymbol{T} - t\boldsymbol{1}\right) = -t^3 + I_{\boldsymbol{T}} t^2 - II_{\boldsymbol{T}} t + III_{\boldsymbol{T}}$, όπου $I_{\boldsymbol{T}}, II_{\boldsymbol{T}}, III_{\boldsymbol{T}}$ είναι οι βασικές αναλλοίωτες του τανυστή $\boldsymbol{T}$ και οι οποίες ορίζονται ως $I_{\boldsymbol{T}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T})$, $II_{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}\left(\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})\right]^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^2)\right)$ και $III_{\boldsymbol{T}} = \det \boldsymbol{T}$.

(β) Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να δείξετε ότι:
$[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})]\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}) = [(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}]^2$, όπου $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ είναι διανυσματικά πεδία.

**<u>Τυπολόγιο</u>**

- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$
- Συνιστώσες του συμπληρωματικού τανυστή $\boldsymbol{F}^C$: $F_{li}^c = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}F_{jm}F_{kn}$
- $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \varepsilon_{ijk}u_j v_k \hat{\boldsymbol{\imath}}_i$