ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μηχανική των Συνεχών Μέσων» (ΕΜ257)

Ηράκλειο, 25 Ιανουαρίου 2005

Θέμα 1$^{\text{ο}}$ (μονάδες 2.5)

(α) Να διατυπωθούν τα αξιώματα διατήρησης της μάζας και της ορμής και να εξαχθούν οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις πεδίου σε μια διάσταση, σε μορφή Lagrange και Euler.

(β) Ποια μορφή λαμβάνουν οι διαφορικές εξισώσεις πεδίου του ερωτήματος (α) στις τρεις διαστάσεις;

Θέμα 2$^{\text{ο}}$ (μονάδες 2.5)

(α) Να δοθεί η σχηματική απεικόνιση του μοντέλου Maxwell και να δειχθεί ότι η τάση T και η ανηγμένη παραμόρφωση (strain) ε υπακούουν στην καταστατική εξίσωση $\dot{T} + \frac{1}{\tau} T = k\dot{\varepsilon}$, όπου $\tau \equiv \mu / k =$ χαρακτηριστικός χρόνος απόσβεσης.

(β) Να δειχθεί ότι το μοντέλο Maxwell ανήκει στην κατηγορία ιξωελαστικών υλικών με μεγάλο εύρος εξάρτησης από την ιστορία της παραμόρφωσης (ολοκληρωτικό μοντέλο), δηλ. ότι η σχέση μεταξύ τάσης και ανηγμένης παραμόρφωσης μπορεί να γραφεί ως

$$T(t) = k_\infty \varepsilon(t) + G(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{1}$$

Ποια είναι η τιμή του k_∞ (μέτρο ελαστικότητας στην κατάσταση ισορροπίας) και ποια η έκφραση της συνάρτησης χαλάρωσης $G(s)$ που βρήκατε από αυτήν την απόδειξη;

(γ) Ποια μορφή παίρνει η εξίσωση (1) στην ειδική περίπτωση που η ανηγμένη παραμόρφωση δίνεται ως $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \mathrm{t} < 0 \\ \varepsilon^*, & \mathrm{t} \geq 0 \end{cases}$, όπου $\varepsilon^* =$ σταθερά. Σχεδιάστε την αντίστοιχη καμπύλη $T - t$ για διάφορες τιμές του $\tau (> 0)$.

Θέμα 3$^{\text{ο}}$ (μονάδες 2.5)

(α) Σε ποια είδη διακρίνουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα συνεχές μέσο και ποια η φυσική ερμηνεία κάθε είδους;

(β) Δείξτε ότι μια κίνηση $\mathbf{B_o} \to \mathbf{B_t}$ είναι ισόχωρη αν και μόνο αν: (i) $\det \boldsymbol{F} = 1$, $\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathbf{B_o}$ και $\forall\, t$ (περιγραφή κατά Lagrange), (ii) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{B_t}$ και $\forall\, t$ (περιγραφή κατά Euler).

<u>Θέμα 4ο (μονάδες 2.5)</u>

(α) Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να δείξετε ότι: $\det\left(\boldsymbol{T}-t\boldsymbol{1}\right)=-t^3+I_{\boldsymbol{T}}t^2-II_{\boldsymbol{T}}t+III_{\boldsymbol{T}}$, όπου $I_{\boldsymbol{T}}, II_{\boldsymbol{T}}, III_{\boldsymbol{T}}$ είναι οι βασικές αναλλοίωτες του τανυστή $\boldsymbol{T}$ και οι οποίες ορίζονται ως $I_{\boldsymbol{T}}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})$, $II_{\boldsymbol{T}}=\frac{1}{2}\left(\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})\right]^2-\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^2)\right)$ και $III_{\boldsymbol{T}}=\det\boldsymbol{T}$.

(β) Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να δείξετε ότι:
$\mathrm{curl}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=[\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}]\boldsymbol{v}-[\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}]\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$, όπου $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ είναι διανυσματικά πεδία.

<u>Τυπολόγιο</u>

- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}$
- Συνιστώσες του συμπληρωματικού τανυστή $\boldsymbol{F}^C$: $F_{li}^c=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}F_{jm}F_{kn}$
- $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\varepsilon_{ijk}u_j v_k\hat{\boldsymbol{\imath}}_i$
- $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\equiv\varepsilon_{ijk}u_{k,j}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_i$