**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**
**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

***Θέματα εξέτασης προόδου στο μάθημα «Μηχανική των Συνεχών Μέσων» (ΕΜ257)***

Ηράκλειο, 11 Δεκεμβρίου 2004

**Θέμα 1ο (μονάδες 2)**

Να γραφούν τα αξιώματα διατήρησης της μάζας και της ορμής και να εξαχθούν οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις πεδίου σε μια διάσταση, σε μορφή Lagrange και Euler. [*Σημείωση*: η συνολική δύναμη σε ένα οποιοδήποτε τμήμα $\mathbf{P_t}$ ενός σώματος $\mathbf{B_t}$ στην τρέχουσα διαμόρφωση δίνεται ως $f(\mathbf{P_t}) = \int_{\mathbf{P_t}} (\partial T/\partial x + \rho b)\,\mathrm{d}x$ ]

**Θέμα 2ο (μονάδες 4)**

Η καταστατική εξίσωση για ένα μονοδιάστατο ομογενές γραμμικά ελαστικό στερεό είναι $T = k\varepsilon$, όπου $T$ είναι η τάση, $\varepsilon = \partial u/\partial X$ είναι η ανηγμένη παραμόρφωση και $k > 0$ είναι το μέτρο ελαστικότητας ή ελαστική σταθερά του υλικού.

(α) Απουσία μαζικών δυνάμεων (δηλ. $b = 0$), να δειχθεί ότι συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με το αξίωμα διατήρησης της ορμής προκύπτει η διαφορική εξίσωση του κύματος $\ddot{u} - c^2 u,_{XX} = 0$, όπου $c = \sqrt{k/\rho_o}$ είναι η ταχύτητα του ήχου στο στερεό και $\rho_o$ η αρχική του πυκνότητα.

(β) Με τη βοήθεια της σύνθετης παραγώγισης και των μεταβλητών $\xi = X + ct$ & $\eta = X - ct$, να δειχθεί ότι η εξίσωση κύματος $\ddot{u} - c^2 u,_{XX} = 0$ συνεπάγεται την εξίσωση $u,_{\xi\eta} = 0$ της οποίας η γενική λύση είναι: $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$, δηλ. $u(X,t) = f(X+ct) + g(X-ct)$ (γενική λύση d' Alembert) όπου *f*, *g* αυθαίρετες συναρτήσεις που προσδιορίζονται από τις αρχικές & συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος

(γ) Θεωρείστε ένα ελαστικό στερεό στην κατάσταση αναφοράς $\mathbf{B_o}$ που επεκτείνεται στον ημιάπειρο μονοδιάστατο χώρο δηλ. $\mathbf{B_o} = \{X \,/\, X \geq 0\}$, και το οποίο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, δηλ. η αρχική του μετατόπιση και ταχύτητα είναι μηδέν. Αν στο ένα άκρο του ($X = 0$) εφαρμόσουμε μια δεδομένη τάση $T = T(0,t) = \hat{p}(t)$, ενώ στο άλλο άκρο του ($X \to \infty$) η τάση είναι μηδέν, να αποδειχθεί (χρησιμοποιώντας τη γενική λύση d' Alembert και τις αρχικές και οριακές συνθήκες) ότι

$$u(X,t) = \begin{cases} 0, & X - ct \geq 0 \\ -\dfrac{c}{k}\displaystyle\int_0^{t-X/c} \hat{p}(\tau)\,d\tau, & X - ct < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad T(X,t) = \begin{cases} 0, & X - ct \geq 0 \\ \hat{p}(t - X/c), & X - ct < 0 \end{cases}$$

**Θέμα 3ο (μονάδες 2)**

(α) Να γραφεί η καταστατική εξίσωση του μοντέλου Kelvin-Voigt (K-V) και να δοθεί η σχηματική του απεικόνιση

(β) Σε ποια κατηγορία ιξωελαστικών υλικών ανήκει το μοντέλο K-V σε σχέση με την εξάρτηση από την ιστορία παραμόρφωσης και τη μορφή της καταστατικής του εξίσωσης και τι φαινόμενο μπορεί να προσομοιώσει;

(γ) Ποιο άλλο βασικό μοντέλο ιξωελαστικότητας γνωρίζετε και τι φαινόμενο μπορεί να προσομοιώσει;

(δ) Να δοθεί η σχηματική απεικόνιση του μοντέλου του ερωτήματος (γ). Σε ποια κατηγορία ιξωελαστικών υλικών ανήκει το μοντέλο αυτό σε σχέση με την εξάρτηση από την ιστορία παραμόρφωσης και τη μορφή της καταστατικής του εξίσωσης;

**<u>Θέμα 4ο (μονάδες 2)</u>**

(α) Χρησιμοποιώντας ως δεδομένο ότι $\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{lr} & \delta_{ls} & \delta_{lt} \\ \delta_{mr} & \delta_{ms} & \delta_{mt} \\ \delta_{nr} & \delta_{ns} & \delta_{nt} \end{vmatrix}$, να δείξετε με τη σειρά τα εξής:

- (i) $\varepsilon_{lmt}\varepsilon_{rst} = \delta_{lr}\delta_{ms} - \delta_{ls}\delta_{mr}$
- (ii) $\varepsilon_{lst}\varepsilon_{rst} = 2\delta_{lr}$
- (iii) $\varepsilon_{rst}\varepsilon_{rst} = 6$

(β) Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να υπολογίσετε τις συνιστώσες του γινομένου μεταξύ τριών τανυστών $\boldsymbol{TSP}$, ως προς μια καρτεσιανή βάση $\{\hat{\boldsymbol{i}}_i\}$

(γ) Χρησιμοποιώντας συμβολισμό με δείκτες, να δείξετε ότι: $\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \operatorname{curl}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{curl}(\boldsymbol{v})$, όπου $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ είναι διανυσματικά πεδία