

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Μηχανική του Συνεχούς Μέσου» (EM257)

Ηράκλειο, 4 Απριλίου 2009

Θέμα 1<sup>ο</sup> (μονάδες 1.5)

Έστω οι ποσότητες  $B_{ij}a_j$ ,  $B_{ij}a_i$ ,  $A_{ij}B_{jk}B_{lk}$ ,  $\varepsilon_{ijk}A_{jm}B_{kl}v_m u_l$ ,  $A_{ij}B_{ji}$ . Ποιες από αυτές αντιπροσωπεύουν βαθμωτά μεγέθη, ποιες τις συνιστώσες διανυσμάτων και ποιες τις συνιστώσες τανυστών; Γράψτε τα αντίστοιχα βαθμωτά, διανυσματικά και τανυστικά μεγέθη χωρίς συνιστώσες.

Θέμα 2<sup>ο</sup> (μονάδες 1.5)

Έστω δύο ορθοκανονικές βάσεις  $\mathbb{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  και  $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  του Ευκλείδειου χώρου  $\mathcal{E}$  και έστω  $\underline{Q}$  ο τανυστής αλλαγής βάσης  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ . Δείξτε ότι αν  $\det \underline{Q} = +1$ , τότε η ποσότητα  $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$  μένει αναλλοίωτη κατά την αλλαγή βάσης. Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο όταν  $\det \underline{Q} = -1$ .

Θέμα 3<sup>ο</sup> (μονάδες 2.0)

Έστω  $\underline{T} = \underline{1} + 3\vec{n} \otimes \vec{n} - 2\vec{n} \otimes \vec{m}$ , όπου  $\vec{m}, \vec{n} \in \mathcal{E}$  είναι δεδομένα ορθοκανονικά διανύσματα.

- α) [μονάδες: 0.6] Υπολογίστε το ίχνος του  $\underline{T}$ .
- β) [μονάδες: 0.8] Δείξτε ότι το  $\vec{n}$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $\underline{T}$  και βρείτε την αντίστοιχη ιδιοτιμή.
- γ) [μονάδες: 0.6] Εξετάστε αν το  $\vec{m}$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $\underline{T}$ .

Θέμα 4<sup>ο</sup> (μονάδες 5)

Έστω  $\underline{A} = \vec{m} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{m}$ , όπου  $\vec{m}, \vec{n} \in \mathcal{E}$  είναι δεδομένα ορθοκανονικά διανύσματα.

- α) [μονάδες: 0.8] Δείξτε ότι η τριάδα  $\mathbb{Y} = \{\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3\}$ , όπου  $\vec{d}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{m} - \vec{n})$ ,  $\vec{d}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{m} + \vec{n})$ ,  $\vec{d}_3 = \vec{n} \times \vec{m}$ , είναι μια ορθοκανονική βάση του  $\mathcal{E}$ .
- β) [μονάδες: 0.7] Βρείτε τις συνιστώσες των  $\vec{m}$  και  $\vec{n}$  ως προς τη βάση  $\mathbb{Y}$ .
- γ) [μονάδες: 0.6] Έστω  $\vec{v}$  ένα τυχαίο διάνυσμα του  $\mathcal{E}$ . Υπολογίστε το  $\underline{A}\vec{v}$  και με βάση το αποτέλεσμα, εξηγήστε γιατί η ορίζουσα του  $\underline{A}$  είναι 0 (χωρίς να την υπολογίσετε).
- δ) [μονάδες: 0.8] Βρείτε τον πίνακα συνιστωσών του  $\underline{A}$  ως προς τη βάση  $\mathbb{Y}$ .
- ε) [μονάδες: 0.8] Βρείτε τις ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του  $\underline{A}$ .
- στ) [μονάδες: 0.6] Εξηγήστε γιατί ο  $\underline{A}$  γράφεται σε φασματική μορφή και γράψτε τον  $\sigma'$  αυτή τη μορφή.
- ζ) [μονάδες: 0.7] Γράψτε τον  $\underline{A}^2$  ως άθροισμα δύο τανυστικών γινομένων διανυσμάτων