ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης προόδου στο μάθημα «Θεωρία Ρευστών» (ΕΜ255)

Ηράκλειο, 13 Μαΐου 2006

Θέμα 1. (μονάδες 2)

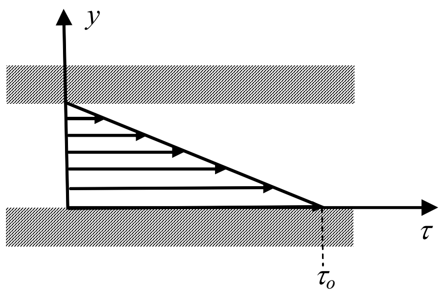
α) Διατυπώστε τη συνθήκη της μη-ολίσθησης και αναφέρατε μια κατηγορία ρευστών για τα οποία η συνθήκη αυτή δεν ισχύει.[*μονάδες: 0.4*]

β) Τι είναι η στρωτή ροή και τι η τυρβώδης ροή; Σχεδιάστε ποιοτικά γραμμές ροής για καθεμιά περίπτωση. Ποια αδιάστατη ποσότητα χρησιμοποιείται ως μέτρο προσδιορισμού στο κατά πόσο μια ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης. Με βάση αυτήν την ποσότητα, ποιες παράμετροι φαίνεται να επηρεάζουν την εκδήλωση της μιας ή της άλλης συμπεριφοράς και πώς; [*μονάδες: 1.2*]

γ) Θεωρείστε τη ροή ενός ιξώδους ρευστού γύρω από ένα στερεό σώμα. Τι είναι το οριακό στρώμα; [*μονάδες: 0.4*]

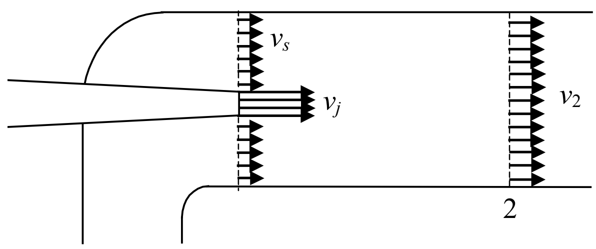
Θέμα 2. (μονάδες 3)

Ένα νευτώνειο ρευστό κινείται σε μόνιμη ροή απλής διάτμησης μεταξύ δύο πλακών, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους 80 mm. Η κάτω πλάκα είναι ακίνητη, ενώ η πάνω κινείται με σταθερή ταχύτητα 1.2 m/s. Υπολογίστε και σχεδιάστε την κατανομή της ταχύτητας μεταξύ των δύο πλακών και βρείτε το ιξώδες του ρευστού αν η κατανομή της διατμητικής τάσης είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, με $\tau_o = 1.5\ \text{Pa}$.



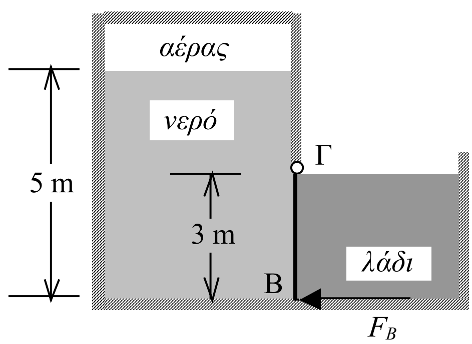
Θέμα 3. (μονάδες 3)

Στην έξοδο του ακροφυσίου του διπλανού σχήματος δημιουργείται μια φλέβα νερού με επιφάνεια εκτόξευσης $A_j = 50\ \text{cm}^2$ και ταχύτητα εκτόξευσης $v_j = 27\ \text{m/s}$, η οποία παρασύρει ένα δευτερεύον ρεύμα νερού που έχει ταχύτητα $v_s = 3\ \text{m/s}$ σε ένα σωλήνα σταθερής διατομής με εμβαδόν $A = 600\ \text{cm}^2$. Στην περιοχή 2 το νερό έχει αναμειχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε η ταχύτητα είναι ομοιόμορφη. Η πίεση στην έξοδο του ακροφυσίου είναι 70 kPa. Προσδιορίστε την πίεση στην περιοχή 2 θεωρώντας μόνιμη κατάσταση. Οι δυνάμεις βαρύτητας και οι τάσεις στα τοιχώματα να θεωρηθούν αμελητέες.



Θέμα 4. (μονάδες 3)

Υπολογίστε τη ολική δύναμη F_B στο άκρο Β που απαιτείται για να εμποδίσει το άνοιγμα της πύλης ΓΒ του φράγματος. Η πύλη αρθρώνεται στο Γ και έχει ορθογώνιο σχήμα με πλάτος 2 m (κάθετα στο επίπεδο του χαρτιού). Η *σχετική* πίεση του αέρα στο αριστερό δοχείο είναι ίση με -0.15 bar, ενώ το άλλο δοχείο είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα. Η πυκνότητα του λαδιού είναι ίση με $750\ \text{kg/m}^3$. Επίσης, υπολογίστε την οριζόντια δύναμη F_Γ στην άρθρωση Γ.



Δεδομένα

πυκνότητα του νερού: $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$ (στους 4 ^{o}C & πίεση 1 atm)

επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 9.81\ \text{m/s}^2$

1 atm = 101325 Pa

1 bar = 10^5 Pa

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΩΡΙΑ ΡΕΥΣΤΩΝ (ΕΜ255)

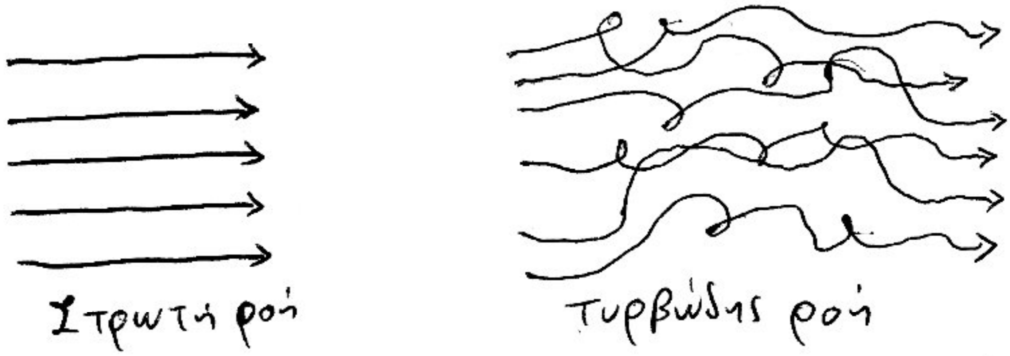
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ (ΜΑΪΟΣ '06)

ΘΕΜΑ 1

α) Συνθήκη μη-ολίσθησης: Τα ιξώδη ρευστά στα σημεία επαφής τους με ένα στερεό σώμα έχουν την ταχύτητα του στερεού.
Επειδή η μη-ολίσθηση μεταξύ ρευστού και στερεού οφείλεται στην ιξώδη φύση του ρευστού, μια σημαντική κατηγορία ρευστών για τα οποία δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη είναι τα ιδανικά (μη-ιξώδη) ρευστά.

β) Στρωτή ροή: ροή του ρευστού σε επίπεδα στρώματα (ή "φύλλα")
Τυρβώδης ροή: ροή με συνιστώσες ταχύτητας που εμφανίζουν τυχαίες (χαοτικές) διακυμάνσεις από τις μέσες (χρονικά) τιμές τους.

Γραμμές ροής:



Στρωτή ροή   Τυρβώδης ροή

Η αδιάστατη ποσότητα που χρησιμοποιείται ως μέτρο προσδιορισμού στο κατά πόσο μια ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης είναι ο αριθμός Reynolds: $Re = \frac{LV\rho}{\mu}$ (1)

όπου L ένα χαρακτηριστικό μήκος (π.χ. η διάμετρος του αγωγού σε μια εσωτερική ροή), V η (μέση) ταχύτητα, ρ η πυκνότητα του ρευστού και μ το ιξώδες του.

Μικρές τιμές του Re (συνήθως για Re < 2000 με 4000) υποδηλώνουν ότι η ροή είναι στρωτή, ενώ για μεγαλύτερες τιμές η ροή γίνεται τυρβώδης (διαμέσου μιας μεταβατικής περιοχής)

Όπως φαίνεται στην εξίσωση (1), η ταχύτητα (V), η γεωμετρία (μέσω του L) και οι ιδιότητες μ, ρ του ρευστού καθορίζουν πότε η ροή θα είναι στρωτή και πότε τυρβώδης. Συγκεκριμένα, υψηλές τιμές των L, V και ρ ευνοούν την εκδήλωση τυρβώδους ροής, ενώ χαμηλές τιμές τους ευνοούν την εμφάνιση στρωτής ροής. Αντίθετα, υψηλές τιμές ιξώδους ευνοούν την εκδήλωση στρωτής ροής, ενώ για μικρά μ ευνοείται η τυρβώδης ροή.

γ) Το οριακό στρώμα είναι μια περιοχή διάτμησης γύρω και μπροστά από το στερεό, στην οποία η επίδραση του ιξώδους και/ή της τύρβης είναι σημαντική, με αποτέλεσμα την ύπαρξη τριβής, εν αντιθέσει με την περιοχή μακριά από το σώμα όπου οι τριβές είναι αμελητέες και η ροή ουσιαστικά ιδανική.

ΘΕΜΑ 2

Από το σχήμα φαίνεται ότι η κατανομή της διατμητικής τάσης τ είναι γραμμική, δηλ. $\tau(y) = \alpha y + b$ με $\tau(0) = \tau_0$ και $\tau(h) = 0$

οπότε: $\begin{cases} b = \tau_0 \\ \alpha h + \tau_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \tau_0 \\ \alpha = -\tau_0/h \end{cases}$

Άρα $\tau(y) = \tau_0\left(1 - \frac{y}{h}\right)$, όπου h η απόσταση μεταξύ των πλακών

Όμως για νευτώνειο ρευστό: $\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial y}$, όπου V η ταχύτητα κατά την οριζόντια διεύθυνση.

Άρα: $\tau_0\left(1-\frac{y}{h}\right)=\mu\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \int \frac{\tau_0}{\mu}\left(1-\frac{y}{h}\right)dy = \int dV \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(y) = \frac{\tau_0}{\mu}\left(y-\frac{y^2}{2h}\right)+C \qquad (1)$$

όπου C σταθερά ολοκλήρωσης.

Συνθήκες μη-ολίσθησης: $\begin{cases} V(0)=0 \\ V(h)=V_0 \end{cases}$ (ταχύτητα κίνησης της πάνω πλάκας)

οπότε $\begin{cases} C=0 \\ V_0=\frac{\tau_0}{\mu}\frac{h}{2} \Rightarrow \mu=\frac{\tau_0 h}{2V_0} \end{cases} \qquad (2)$

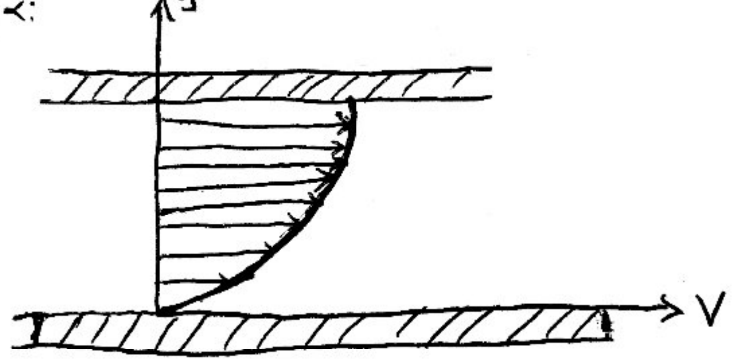
Η (2) για $\left[\tau_0=1.5\ Pa,\ h=80mm=0.08\ m,\ V_0=1.2\ m/s\right]$

δίνει $\mu=\frac{1.5\cdot 0.08}{2\cdot 1.2}\ Pa\cdot s \Rightarrow \mu=0.05\ Pa\cdot s$

$$(1) \Rightarrow V(y)=\frac{\tau_0}{(\tau_0 h)/(2V_0)}\,y\left(1-\frac{y}{2h}\right) \Rightarrow \boxed{V(y)=V_0\left(\frac{y}{h}\right)\cdot\left(2-\frac{y}{h}\right)}$$

η οποία είναι παραβολική. $\frac{dV}{dy}=\frac{\tau}{\mu}$, άρα $\frac{dV}{dy}=0 \Leftrightarrow \tau=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y=h$, το οποίο επειδή $\frac{d^2V}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{d\tau}{dy}<0$ είναι μέγιστο

Άρα:



ΘΕΜΑ 3

Για αμελητέες δυνάμεις βαρύτητας και μόνιμη κατάσταση ο νόμος ισοζυγίου ορμής (Ν.Ι.Ο.) είναι:

$$\underset{\sim}{F_s} = \int_{CS} \rho \underset{\sim}{V} (\underset{\sim}{V} \cdot d\underset{\sim}{A}) \qquad (1)$$

Θεωρώντας ως όγκο ελέγχου το τμήμα του αγωγού μεταξύ των εγκάρσιων διατομών στις θέσεις 1 και 2.

Όμως: $\underset{\sim}{F_s} = \int_{A_1} -P_1 \, d\underset{\sim}{A_1} + \int_{A_2} -P_2 \, d\underset{\sim}{A_2} \underset{\uparrow}{=} P_1 A_1 - P_2 A_2 \Rightarrow$

πιέσεις ομοιόμορφες στις A_1 και A_2

$$\Rightarrow \underset{\sim}{F_s} = (P_1 - P_2) A \qquad (2)$$

Επίσης, θεωρώντας το νερό ασυμπίεστο:

$$\int_{CS} \rho \underset{\sim}{V} (\underset{\sim}{V} \cdot d\underset{\sim}{A}) = -\rho V_s^2 (A - A_j) - \rho V_j^2 A_j + \rho V_2^2 A \qquad (3)$$

Η αρχή διατήρησης μάζας για ασυμπίεστο ρευστό και μόνιμες συνθήκες είναι: $\int_{CS} \underset{\sim}{V} \cdot d\underset{\sim}{A} = 0 \Rightarrow V_s (A - A_j) + V_j A_j = V_2 A \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_2 = V_s \left(1 - \frac{A_j}{A}\right) + V_j \frac{A_j}{A} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3), προκύπτει

$$\int_{CS} \rho \underset{\sim}{V} (\underset{\sim}{V} \cdot d\underset{\sim}{A}) = -\rho A_j \left(1 - \frac{A_j}{A}\right) (V_j - V_s)^2 \qquad (5)$$

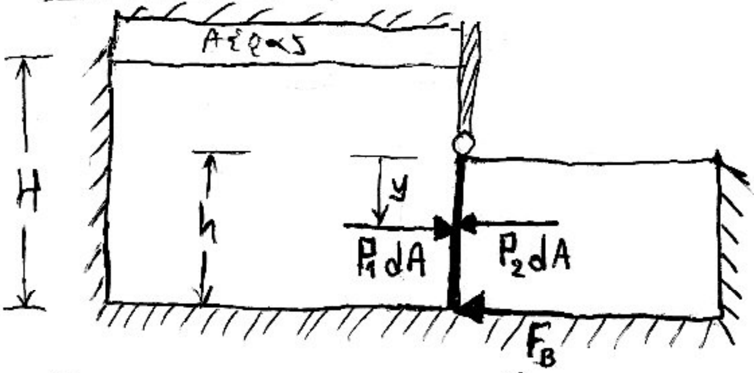
Αντικαθιστώντας τις (5) και (2) στην (1) και λύνοντας ως προς P_2:

$$P_2 = P_1 + \rho \frac{A_j}{A} \left(1 - \frac{A_j}{A}\right) (V_j - V_s)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = \left[70000 + 1000 \cdot \frac{50}{600}\left(1 - \frac{50}{600}\right)(27-3)^2\right] Pa \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = 114000\ Pa \Rightarrow P_2 = 114\ kPa$$

ΘΕΜΑ 4



Στατική ισορροπία $\Rightarrow$ {Άθροισμα των ροπών} $= 0 \Rightarrow$

$$\int_A y P_1 dA - \int_A y P_2 dA - hF_B = 0 \Rightarrow hF_B = \int_A y(P_1 - P_2)\,dA \qquad (1)$$

όπου $dA = w\,dy$ με $W = 2m$ το πλάτος της πύλης

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_{αέρα} + \rho_{νερ}\, g\left[(H-h)+y\right] \\ P_2 &= P_{atm} + \rho_{λαδ}\, g\, y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = (P_{αέρα} - P_{atm}) + \rho_{νερ}\, g(H-h) + (\rho_{νερ} - \rho_{λαδ})\, g\, y \qquad (2)$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση (1) δίνει

$$hF_B = w\int_0^h \left\{\left[P_{αέρα} - P_{atm} + \rho_{νερ}\, g(H-h)\right] y + (\rho_{νερ} - \rho_{λαδ})\, g\, y^2\right\} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_B = w\left\{\left[P_{αέρα} - P_{atm} + \rho_{νερ}\, g(H-h)\right]\frac{h}{2} + (\rho_{νερ} - \rho_{λαδ})\, g\,\frac{h^2}{3}\right\} \qquad (3)$$

όπου: $W = 2m$, $h = 3m$, $H = 5m$, $g = 9.81\, m/s$

$\rho_{νερ.} = 1000\ Kg/m^3$, $\rho_{λαδ.} = 750\ Kg/m^3$

$P_{αέρα} - P_{ατμ} = -0.15\ bar = -0.15 \cdot 10^5\ Pa$

Αντικαθιστώντας στην (3) προκύπτει:

$$F_B = 28575\ N$$

Στατική ισορροπία => {άθροισμα οριζόντιων δυνάμεων} = 0

$$\Rightarrow \int_A P_1 dA - \int_A P_2 dA - F_B + F_r = 0 \Rightarrow F_r = F_B + \int_A (P_2 - P_1) dA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_r = F_B - W \int_0^h \left[P_{αέρα} - P_{ατμ} + \rho_{νερ} g (H-h) + (\rho_{νερ} - \rho_{λαδ}) g y \right] dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_r = F_B - W \left\{ \left[P_{αέρα} - P_{ατμ} + \rho_{νερ} g (H-h) \right] h + (\rho_{νερ} - \rho_{λαδ}) g \frac{h^2}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_r = -21217.5\ N$$ (δηλ. έχει φορά προς τα αριστερά)