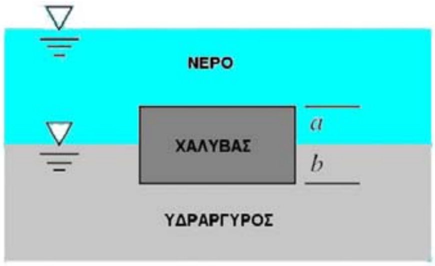
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

<u>Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Θεωρία Ρευστών» (ΕΜ255)</u>

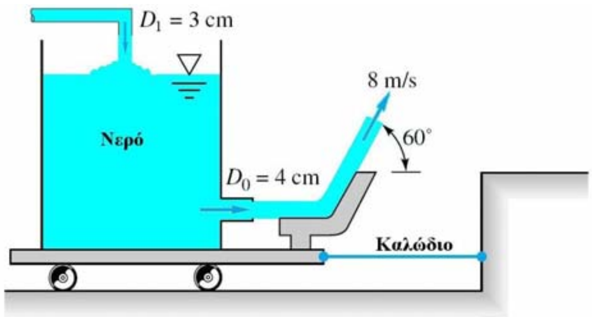
Ηράκλειο, 9 Σεπτεμβρίου 2008



<u>Θέμα 1. (μονάδες 2)</u>

Ένα ομοιόμορφο κομμάτι από χάλυβα ισορροπεί στη διεπιφάνεια υδραργύρου-νερού, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Υπολογίστε το λόγο των αποστάσεων b/a.

Δίνονται: *πυκνότητα υδραργύρου:* $\rho_\upsilon = 13.56\rho_w$, *πυκνότητα χάλυβα:* $\rho_s = 7.85\rho_w$, *όπου* ρ_w *η πυκνότητα του νερού.*



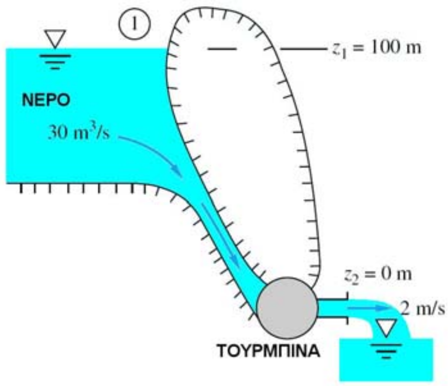
<u>Θέμα 2. (μονάδες 3)</u>

Η δεξαμενή του σχήματος είναι τοποθετημένη πάνω σε ένα καρότσι και τροφοδοτείται με νερό μέσω ενός αγωγού διαμέτρου $3\,\mathrm{cm}$. Η δεξαμενή εκτοξεύει μια φλέβα νερού διαμέτρου $4\,\mathrm{cm}$ και ταχύτητας $8\,\mathrm{m/s}$, η οποία αποκλίνει κατά 60^{o} υπό την επίδραση ενός ελάσματος. Θεωρώντας μόνιμη κατάσταση, να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα εισόδου του νερού στη δεξαμενή. [*μονάδες: 0.5*]

β) την οριζόντια δύναμη που ασκεί το τεντωμένο καλώδιο όταν το καρότσι μένει ακίνητο. [*μονάδες: 2.5*]

Σημείωση: Θεωρείστε ότι οι τριβές μεταξύ καροτσιού και εδάφους είναι αμελητέες και ότι η διάμετρος και το μέτρο της ταχύτητας της φλέβας δεν μεταβάλλονται κατά μήκος της ροής της.



<u>Θέμα 3. (μονάδες 2.5)</u>

Μια υδροηλεκτρική εγκατάσταση (βλ. διπλανό σχήμα) παράγει ενέργεια στέλνοντας νερό σε μια τουρμπίνα (δηλ. στρόβιλο) με ρυθμό $30\,\mathrm{m^3/s}$. Το νερό εξέρχεται από την τουρμπίνα στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα $v_2 = 2\,\mathrm{m/s}$. Η συνολική απώλεια μανομετρικού ύψους του συστήματος είναι $20\,\mathrm{m}$. Να υπολογιστεί η ισχύς σε MW που παίρνει η τουρμπίνα από το νερό.

<u>Θέμα 4. (μονάδες 2.5)</u>

Αέρας ρέει ισοεντροπικά μέσα σε ένα συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο. Το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής σε μια θέση 1 στο συγκλίνον τμήμα είναι $0.05\,\mathrm{m^2}$. Επίσης, $v_1 = 180\,\mathrm{m/s}$, $P_1 = 500\,\mathrm{kPa}$, $T_1 = 470\,\mathrm{K}$.

α) Να υπολογιστεί ο αριθμός Mach στη θέση 1.

β) Να υπολογιστούν η θερμοκρασία και η πίεση ηρεμίας.

γ) Να υπολογιστούν η επιφάνεια A_* και ο ρυθμός ροής μάζας.

δ) Αν η πίεση σε μια θέση 2 είναι $P_2 = 200\,\mathrm{kPa}$, να εξεταστεί αν αυτή η θέση βρίσκεται στο συγκλίνον ή το αποκλίνον τμήμα του ακροφυσίου και να προσδιοριστεί το είδος της ροής (υποηχητική ή υπερηχητική) σε αυτό. Επίσης, να βρεθούν ο αριθμός Mach, η πίεση και το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του λαιμού.

<u>Χρήσιμα Δεδομένα</u>

πυκνότητα του νερού: $\rho = 998\,\mathrm{kg/m^3}$ *(στους 20°C & πίεση 1 atm),*

ειδική σταθερά του αέρα: $R^* = 287\,\mathrm{J/(kg\cdot K)}$, *επιτάχυνση της βαρύτητας:* $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$

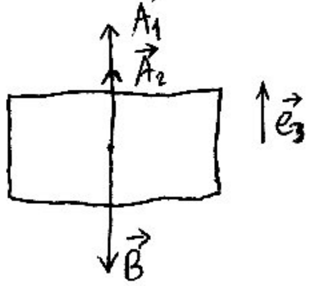
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΩΡΙΑ ΡΕΥΣΤΩΝ (ΕΜ 255)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1

Στο κομμάτι του χάλυβα ασκούνται οι εξής δυνάμεις: Το βάρος του $\vec{B}$, η άνωση $\vec{A}_1$ από τον υδράργυρο & η άνωση $\vec{A}_2$ από το νερό.



όπου: $\vec{B} = -\rho_s g V_s \vec{e}_3$

$$\vec{A}_1 = \rho_\upsilon g V_\upsilon \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{A}_2 = \rho_w g V_w \vec{e}_3$$

με V_υ = ο όγκος του χάλυβα που είναι βυθισμένος στον υδράργυρο

V_w = ο όγκος χάλυβα που είναι βυθισμένος στο νερό

και $V_s = V_\upsilon + V_w$ = ο συνολικός όγκος του χαλύβδινου κομματιού.

Το κομμάτι χάλυβα είναι ακίνητο, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή:

$$\vec{B} + \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = 0 \Rightarrow -\rho_s g V_s + \rho_\upsilon g V_\upsilon + \rho_w g V_w = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\rho_s (V_\upsilon + V_w) + \rho_\upsilon V_\upsilon + \rho_w V_w = 0 \Rightarrow$$

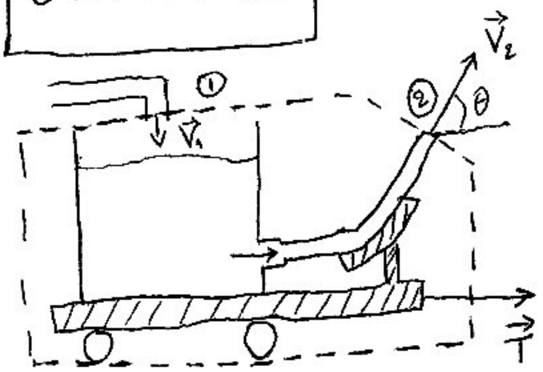
$$\Rightarrow (\rho_\upsilon - \rho_s) V_\upsilon = (\rho_s - \rho_w) V_w \Rightarrow \frac{V_\upsilon}{V_w} = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_\upsilon - \rho_s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_\upsilon}{V_w} = \frac{7.85 - 1}{13.56 - 7.85} \Rightarrow \frac{V_\upsilon}{V_w} \simeq 1.2$$

Όμως, ο όγκος V_υ είναι ανάλογος με την απόσταση b, ενώ ο όγκος V_w είναι ανάλογος με την απόσταση α. Άρα,

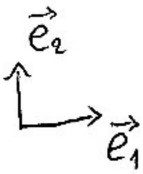
$$\frac{b}{\alpha} \simeq 1.2$$

ΘΕΜΑ 2



$D_1 = 3cm$, $D_2 = 4cm$

$\theta = \frac{\pi}{3}$, $V_2 = 8m/s$



$\vec{V}_1 = ;$ $\vec{T} = ;$

α) Θεωρούμε τον όγκο ελέγχου CV που περιλαμβάνει το σύστημα: καρότσι με νερό, φλέβα όπως φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή στο παραπάνω σχήμα.

Η Α.Δ.Μ. για μόνιμες συνθήκες και ασυμπίεστο ροή γράφεται ως:

$$\int_{CS} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \int_{A_1} \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A_2} \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2 \xRightarrow{\text{ομοιόμορφες ταχύτητες κάθετες στις } \vec{A}_1, \vec{A}_2} -V_1 A_1 + V_2 A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{V_2 A_2}{A_1} \Rightarrow V_1 = V_2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \Rightarrow V_1 = 14.222\ m/s$$. Δηλ. $\vec{V}_1 = (-14.222\ m/s)\,\vec{e}_2$

β) Ν.Ι.Ο. (μόνιμες συνθήκες):

$$\vec{F}_s + \vec{B} = \int_{CS} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \qquad (1)$$

όπου: $\vec{B}$ το συνολικό βάρος καροτσιού και νερού στον CV

$$\vec{F}_s = \vec{T} + \vec{R} + \int_{CS} (-P)\, d\vec{A} = \vec{T} + \vec{R} - P_{atm} \cancelto{0}{\oint d\vec{A}} = \vec{T} + \vec{R}$$

όπου $\vec{R}$ η κατακόρυφη αντίδραση του εδάφους

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (1) γράφεται ως:

$$\int_{CS} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{A_1} \vec{V}_1 \rho (\vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1) + \int_{A_2} \vec{V}_2 \rho (\vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2) =$$

$$= -\vec{V}_1 \rho (V_1 A_1) + \vec{V}_2 \rho (V_2 A_2) = -(-V_1 \vec{e}_2) \rho V_1 A_1 + (V_2 \cos\theta \vec{e}_1 + V_2 \sin\theta \vec{e}_2) \rho V_2 A_2$$

$$= \rho V_1^2 A_1 \vec{e}_2 + \rho V_2^2 A_2 \cos\theta \vec{e}_1 + \rho V_2^2 A_2 \sin\theta \vec{e}_2 =$$

$$= \rho V_2^2 A_2 \cos\theta \vec{e}_1 + \rho (V_1^2 A_1 + V_2^2 A_2 \sin\theta) \vec{e}_2$$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει:

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{B} = \rho V_2^2 A_2 \cos\theta \vec{e}_1 + \rho (V_1^2 A_1 + V_2^2 A_2 \sin\theta) \vec{e}_2 \qquad (2)$$

Η (2) γραμμένη για την οριζόντια διεύθυνση είναι:

$$\vec{T} = \rho V_2^2 A_2 \cos\theta \vec{e}_1$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\rho = 998 \ kg/m^3 \\ &V_2 = 8 \ m/s \\ &A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi (0.04)^2}{4} = 4\pi \cdot 10^{-4} m^2 \\ &\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{T} = 40.13 \ N$$

ΘΕΜΑ 3

Θεωρώντας μονοδιάστατη ροή σε μόνιμη κατάσταση, ισχύει η γενικευμένη εξίσωση Bernoulli:

$$-W_s = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\rho} dP + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(Z_2 - Z_1) + gH_L \qquad (1)$$

όπου ① είναι η επιφάνεια της δεξαμενής και ② η έξοδος της τουρμπίνας.

Για ασυμπίεστη ροή (1) γίνεται:

$$-W_s = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(Z_2 - Z_1) + gH_L \qquad (2)$$

Η Α.Δ.Μ. (για ασυμπίεστη ροή και μόνιμη κατάσταση) δίνει:

$$\int_{cs} \vec{V}\cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_1 = V_2 \left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

η οποία επειδή $A_1 >> A_2$, δίνει $V_1 << V_2$ έτσι ώστε

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \simeq \frac{V_2^2}{2} \qquad (3)$$

Επίσης, $P_1 = P_2 = P_{atm}$ (4)

Αντικαθιστώντας τις (3) και (4) στη (2) προκύπτει:

$$W_s = -\frac{V_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - gH_L \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (5) τις τιμές:

$V_2 = 2m/s$, $g = 9.81\, m/s^2$, $z_1 = 100m$, $z_2 = 0\, m$, $H_L = 20m$, προκύπτει:

$$W_s = 782.8 \ J/kg$$

$$\{\text{ΙΣΧΥΣ ΤΟΥΡΜΠΙΝΑΣ}\} = \dot{W}_s = \dot{m} w_s \Rightarrow \dot{W}_s = \rho Q w_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{W}_s = 998 \cdot 30 \cdot 782.8 \ Watt \Rightarrow \dot{W}_s = 23.437 \ MW$$

ΘΕΜΑ 4

α) Η ταχύτητα του ήχου στη θέση 1 είναι:

$$\alpha_1 = \sqrt{kR^* T_1} = \sqrt{(1.4)(287)(470)} = 434.564 \ m/s$$

όπου ο αέρας λαμβάνεται διατομικό ιδανικό αέριο και άρα $k = 1.4$

Αριθμός Mach στη θέση 1: $M_1 = \frac{V_1}{\alpha_1} \Rightarrow M_1 = \frac{180}{434.564} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_1 = 0.414$$

β) Θερμοκρασία ηρεμίας: $T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2C_p} \underset{C_p=\frac{7}{2}R^*}{\Rightarrow} T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{7R^*} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_0 = 470 + \frac{(180)^2}{7\cdot 287} \Rightarrow T_0 = 486.13\,K$$

Για την πίεση ηρεμίας P_0, έχουμε:

$$\frac{P_0}{P_1} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow P_0 = \left[1 + 0.2\cdot(0.414)^2\right]^{7/2} P_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = 562.6\ kPa$$

γ) η επιφάνεια A_* υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left(\frac{A_1}{A_*}\right)^2 = \frac{1}{M_1^2}\left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)\right]^{\frac{k+1}{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A_1}{A_*}\right)^2 = \frac{1}{(0.414)^2}\left[\frac{5}{6} + \frac{1}{6}(0.414)^2\right]^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_*} = 1.547 \Rightarrow A_* = \frac{0.05}{1.547} \Rightarrow A_* = 0.0323\ m^2$$

Ρυθμός ροής μάζας: $\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 \Rightarrow \dot{m} = \frac{P_1}{R^* T_1} A_1 V_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{m} = \frac{500\cdot 10^3}{287\cdot 470}(0.05)\cdot(180) \Rightarrow \dot{m} = 33.36\ Kg/s$$

δ) Κρίσιμη πίεση $P_c = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} P_0 \Rightarrow P_c = \left(\frac{5}{6}\right)^{7/2} P_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_c = 297.2\ kPa > P_2 = 200\ kPa$$

οπότε η θέση 2 βρίσκεται στο αποκλίνον κομμάτι του ακροφυσίου, όπου η ροή είναι υπερηχητική. Επομένως, η ροή στο λαιμό θα είναι ηχητική, δηλαδή $M_{neck} = 1$ και $A_{neck} = A_*$, $P_{neck} = P_c = 297.2$