ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Θεωρία Ρευστών» (ΕΜ255)

Ηράκλειο, 07 Οκτωβρίου 2006

Θέμα 1. (μονάδες 2.5)

α) Διατυπώστε τον ορισμό της «ροής σε μόνιμες συνθήκες». Είναι δυνατόν σε μια τέτοια ροή η επιτάχυνση να είναι μη-μηδενική; Εξηγήστε γιατί. [*μονάδες: 0.5*]

β) Ποια η διαφορά μεταξύ των δυνάμεων συνοχής και των δυνάμεων συνάφειας; [*μονάδες: 0.3*]

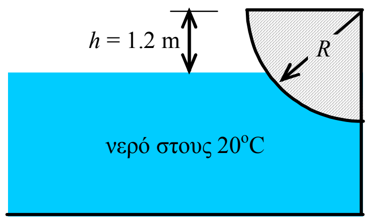
γ) Γράψτε την εξίσωση της αρχής διατήρησης μάζας (εξίσωση συνέχειας) σε διαφορική μορφή. Ποια μορφή λαμβάνει αυτή όταν το ρευστό είναι ασυμπίεστο; [*μονάδες: 0.3*]

δ) Αν το πεδίο ταχύτητας μιας ασυμπίεστης ροής δίνεται ως $\vec{\boldsymbol{v}} = (y^2 e^{-2t} - x^2 y t^3)\vec{\boldsymbol{e}}_1 + (x e^{-t} + kxy^2 t^3)\vec{\boldsymbol{e}}_2$, υπολογίστε τη σταθερά k. [*μονάδες: 0.4*]

ε) Για το πεδίο ταχύτητας τους ερωτήματος (δ), υπολογίστε το διανυσματικό πεδίο της τοπικής επιτάχυνσης, της επιτάχυνσης λόγω μεταφοράς και της ολικής επιτάχυνσης στη χρονική στιγμή $t = 0$. [*μονάδες: 1.0*]

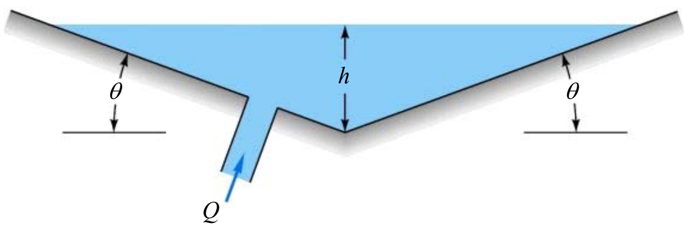
Θέμα 2. (μονάδες 2)

Υπολογίστε το διάνυσμα δύναμης που ασκείται από το νερό στη συμπαγή πύλη που έχει σχήμα τεταρτημόριου κυλίνδρου, με ακτίνα $R = 2.4\ \text{m}$ και μήκος $L = 9\ \text{m}$, θεωρώντας το βάρος της αμελητέο.



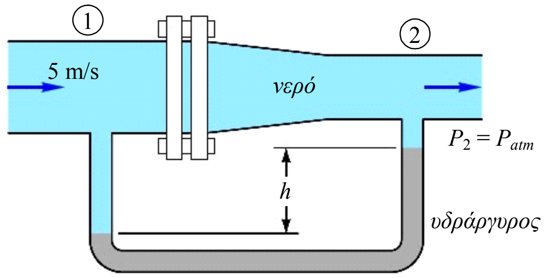
Θέμα 3. (μονάδες 2)

Η δεξαμενή σχήματος V της διπλανής εικόνας έχει ομοιόμορφο πάχος b κάθετα στο επίπεδο του χαρτιού και γεμίζει με νερό με μια ογκομετρική παροχή εισόδου Q. Βρείτε μια έκφραση α) για το ρυθμό μεταβολής $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ του ύψους h, και β) του χρόνου που χρειάζεται για να ανέβει η στάθμη από h_1 σε h_2.



Θέμα 4. (μονάδες 3)

Δυο αγωγοί είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους με ένα σύστημα από φλάντζες και μπουλόνια, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στους αγωγούς ρέει νερό στους 20°C και είναι συνδεδεμένοι με ένα μανόμετρο υδραργύρου. Η διάμετρος της εγκάρσιας διατομής στη θέση 1 είναι ίση με $D_1 = 10\ \text{cm}$ και στη θέση 2 ίση με $D_2 = 7\ \text{cm}$. Η πίεση στην έξοδο (θέση 2) είναι ίση με την ατμοσφαιρική (δηλ. $P_2 = 1\ \text{atm}$). Αν η ένδειξη του μανομέτρου είναι ίση με $h = 60\ \text{cm}$, και θεωρώντας μόνιμες συνθήκες και μονοδιάστατη ασυμπίεστη ροή, υπολογίστε α) την οριζόντια δύναμη που ασκείται στα μπουλόνια, και β) την απώλεια μανομετρικού ύψους μεταξύ των θέσεων 1 και 2.



Θέμα 5. (μονάδες 1.5)

Αέρας ρέει ισοεντροπικά διαμέσου ενός συγκλίνοντος ακροφυσίου που έχει διατομή λαιμού $93\ \text{cm}^2$. Ο αέρας εισέρχεται στο ακροφύσιο με αμελητέα ταχύτητα σε πίεση 414 kPa και θερμοκρασία 95°C. Η πίεση στον αποδέκτη ροής είναι 104 kPa. Υπολογίστε το ρυθμό ροής μάζας σε kg/s, θεωρώντας ότι ο αέρας συμπεριφέρεται ως διατομικό ιδανικό αέριο.

Δεδομένα

πυκνότητα του νερού: $\rho = 998\ \text{kg/m}^3$ (στους 20°C & πίεση 1 atm)

πυκνότητα του υδραργύρου: $\rho_{Hg} = 13550\ \text{kg/m}^3$ (στους 20°C & πίεση 1 atm)

ειδική σταθερά του αέρα: $R^* = 287\ \text{J/(kg}\cdot\text{K)}$, επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 9.81\ \text{m/s}^2$

1 atm = 101325 Pa

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΩΡΙΑ ΡΕΥΣΤΩΝ (ΕΜ 255)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1

α) Ροή σε μόνιμες συνθήκες: Ροή στην οποία οι συνιστώσες της ταχύτητας και οι θερμοδυναμικές ιδιότητες (πυκνότητα, πίεση, θερμοκρασία κλπ) σε κάθε σημείο του χώρου δεν αλλάζουν με το χρόνο. Δηλ. $\vec{v}=\vec{v}(\vec{x})$, $\rho=\rho(\vec{x})$, $P=P(\vec{x})$, $T=T(\vec{x})$, κλπ (συναρτήσεις μόνο της θέσης και όχι του χρόνου)

Για την επιτάχυνση σε ένα σημείο $\vec{x}$, έχουμε:

$$\vec{\alpha}=\dot{\vec{v}}=\cancelto{0}{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}+(\text{grad}\,\vec{v})\,\vec{v}=(\text{grad}\,\vec{v})\,\vec{v}\neq 0 \ (\text{γενικά})$$

και άρα, η επιτάχυνση θα είναι γενικά ένα μη-μηδενικό πεδίο

β) Οι δυνάμεις συνοχής είναι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ <u>ομοίων</u> μορίων (π.χ. οι δυνάμεις μεταξύ μορίων νερού σε μια σταγόνα) ενώ οι δυνάμεις συνάφειας είναι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ <u>ανόμοιων</u> μορίων (π.χ. μεταξύ μορίων νερού και των μορίων μιας γυάλινης επιφάνειας)

γ) Εξίσωση της αρχής διατήρησης μάζας σε διαφορική μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\text{div}(\rho\vec{v})=0 \quad \text{όπου} \quad \begin{cases}\rho = \text{πυκνότητα του ρευστού}\\ \vec{v}=\text{ταχύτητα του ρευστού}\end{cases}$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}+(\text{grad}\,\rho)\cdot\vec{v}}_{\dot{\rho}}+\rho\,\text{div}\,\vec{v}=0 \Leftrightarrow \dot{\rho}+\rho\,\text{div}\,\vec{v}=0$$

Για ασυμπίεστο ρευστό $\dot{\rho}=0$, οπότε η τελευταία εξίσωση είναι: $\operatorname{div}\vec{v}=0$

δ) Για ασυμπίεστη ροή έχουμε: $\operatorname{div}\vec{v}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\left(y^2e^{-2t}-x^2yt^3\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(xe^{-t}+kxy^2t^3\right)}{\partial y}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2xyt^3+2kxyt^3=0 \Leftrightarrow 2xyt^3(-1+k)=0,\ \forall x,y,t$$

Άρα $(-1+k)=0 \Leftrightarrow \boxed{k=1}$

ε) Τοπική επιτάχυνση: $\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right]_{t=0}=\left[\frac{\partial\left(y^2e^{-2t}-x^2yt^3\right)}{\partial t}\vec{e}_1+\right.$

$$\left.+\frac{\partial\left(xe^{-t}+xy^2t^3\right)}{\partial t}\vec{e}_2\right]_{t=0}=\left[\left(-2y^2e^{-2t}-3x^2yt^2\right)\vec{e}_1+\right.$$

$$\left.+\left(-xe^{-t}+3xy^2t^2\right)\vec{e}_2\right]_{t=0}=-2y^2\vec{e}_1-x\vec{e}_2$$

Επιτάχυνση λόγω μεταφοράς: $(\operatorname{grad}\vec{v})\vec{v}=$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y}\\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_x\\ V_y\end{bmatrix}=\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}V_x+\frac{\partial V_x}{\partial y}V_y\right)\vec{e}_1+\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}V_x+\frac{\partial V_y}{\partial y}V_y\right)\vec{e}_2=$$

$$=\left[\left(-2xyt^3\right)\left(y^2e^{-2t}-x^2yt^3\right)+\left(2ye^{-2t}-x^2t^3\right)\left(xe^{-t}+xy^2t^3\right)\right]\vec{e}_1+$$

$$+\left[\left(e^{-t}+y^2t^3\right)\left(y^2e^{-2t}-x^2yt^3\right)+2xyt^3\left(xe^{-t}+xy^2t^3\right)\right]\vec{e}_2$$

οπότε: $\left[(\operatorname{grad}\vec{v})\,\vec{v}\right]_{t=0} = 2yx\,\vec{e_1} + y^2\,\vec{e_2}$

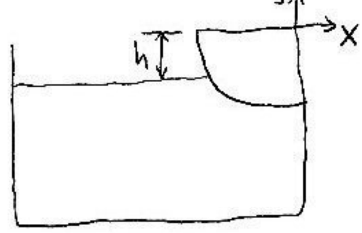
Ολική Επιτάχυνση: $\vec{\alpha} = \dot{\vec{v}} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad}\vec{v})\,\vec{v}$

άρα: $\left(\vec{\alpha}\right)_{t=0} = \left(-2y^2 + 2xy\right)\vec{e_1} + \left(-x + y^2\right)\vec{e_2}$

ΘΕΜΑ 2

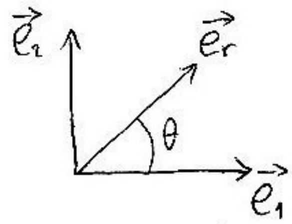
Συνολική δύναμη που ασκείται από το ρευστό στην πύλη:

$\vec{F} = \displaystyle\int_A -P\,d\vec{A}$

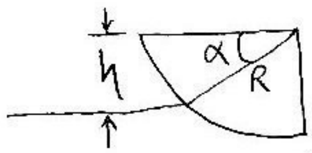


όπου $P = P_{atm} - \rho g(y+h) - P_{atm} \Rightarrow P = -\rho g(y+h)$ με $y \leq -h$

$y = R\sin\theta$



$d\vec{A} = dA\,\vec{e_r} = (R\,d\theta\,dz)\,\vec{e_r} = (R\,d\theta\,dz)(\cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2})$



$\alpha = \arcsin\left(\dfrac{h}{R}\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

Άρα: $\vec{F} = \displaystyle\int_0^L \int_{\pi+\frac{\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \rho g(R\sin\theta + h)\,R(\cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2})\,d\theta\,dz =$

$= \rho g R L \displaystyle\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} (R\sin\theta\cos\theta + h\cos\theta)\,\vec{e_1} + (R\sin^2\theta + h\sin\theta)\,\vec{e_2}\,d\theta =$

$$= \rho g R L \left[\left(\frac{R}{2}\sin^2\theta + h\sin\theta \right)\vec{e}_1 + \left(\frac{R}{2}\theta - \frac{R}{4}\sin 2\theta - h\cos\theta \right)\vec{e}_2 \right]_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= \rho g R L \left[\left(\frac{3}{8}R - \frac{h}{2} \right)\vec{e}_1 + \left(\frac{5\pi}{12}R + \frac{\sqrt{3}}{8}R - \frac{\sqrt{3}}{2}h \right)\vec{e}_2 \right] =$$

$$= (998)(9.81)(2.4)9 \left[\left(\frac{3}{8}2.4 - \frac{1.2}{2} \right)\vec{e}_1 + \left(\frac{5\pi}{12}2.4 + \frac{\sqrt{3}}{8}2.4 - \frac{\sqrt{3}}{2}1.2 \right)\vec{e}_2 \right] =$$

$$= (6.344 \cdot 10^4 N)\,\vec{e}_1 + (5.545 \cdot 10^5 N)\,\vec{e}_2$$

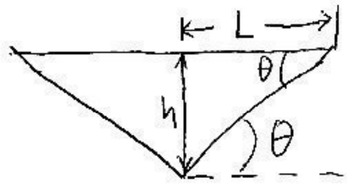
ΘΕΜΑ 3

α) Α.Δ.Μ.: $\displaystyle\int_{CS} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) = -\frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \rho \, d\bar{V} \right) \Longrightarrow$

ασυμπίεστο ρευστό

$$\Longrightarrow \cancel{\rho} \int_{CS} \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\cancel{\rho} \frac{dV_{cv}}{dt} \Longrightarrow -Q = -\frac{dV_{cv}}{dt} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q = \frac{dV_{cv}}{dt} \qquad (1)$$



όπου $V_{cv} = b \cdot \{\text{εμβαδόν τριγώνου}\} =$

$$= b \frac{(2L)h}{2} = bLh = b\frac{h}{\tan\theta}h = \frac{bh^2}{\tan\theta}$$

άρα: $\displaystyle\frac{dV_{cv}}{dt} = \frac{2bh}{\tan\theta}\frac{dh}{dt} \qquad (2)$

$$\{(1),(2)\} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{Q\tan\theta}{2bh} \qquad (3)$$

β) $$(3) \Rightarrow \int_{h_1}^{h_2} h\,dh = \frac{Q\tan\theta}{2b}\int_0^t dt \Rightarrow t = \frac{b}{Q\tan\theta}\left(h_2^2 - h_1^2\right)$$

ΘΕΜΑ 4

$\vec{e}_y$, $\vec{e}_x$

α) Θεωρούμε ως CV το τμήμα στο οποίο ρέει νερό μεταξύ των εγκάρσιων διατομών ① και ②. Υποθέτουμε μονοδιάστατη ασυμπίεστη ροή σε μόνιμες συνθήκες.

Η Α.Δ.Μ. είναι: $$\int_{CS} \vec{V}\cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Επίσης, θεωρώντας τις μαζικές δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό στο CV αμελητέες σε σχέση με τις επιφανειακές δυνάμεις ροής, ο Ν.Ι.Ο. είναι: $$\vec{F}_s = \int_{CS} \vec{V}\rho\left(\vec{V}\cdot d\vec{A}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\alpha\gamma} - \int_{CS} P\,d\vec{A} = \left[-\vec{V}_1(V_1A_1) + \vec{V}_2(V_2A_2)\right]\rho \Rightarrow$$

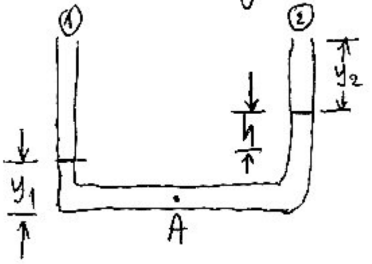
$$\Rightarrow \vec{F}_{\alpha\gamma} - \int_{CS}(P_g + P_{atm})\,d\vec{A} = \rho\left(V_2^2 A_2 - V_1^2 A_1\right)\vec{e}_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\alpha\gamma} - \int_{CS} P_g\,d\vec{A} - P_{atm}\cancelto{0}{\oint_{CS} d\vec{A}} = \rho\left(V_1^2\frac{A_1^2}{A_2^2}A_2 - V_1^2 A_1\right)\vec{e}_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\alpha\gamma} = \int_{A_1} P_g\,d\vec{A} + \rho V_1^2 A_1\left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right)\vec{e}_x \Rightarrow$$

$$\underset{\vec{A}_1=-A_1\vec{e}_x}{\Rightarrow} \vec{F}_{\alpha\gamma} = \left[-(P_g)_1 A_1 + \rho V_1^2 A_1 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right)\right]\vec{e}_x \qquad (1)$$

όπου $\vec{F}_{\alpha\gamma}$ είναι η δύναμη που ασκείται στο ρευστό από τους αγωγούς και ισούται με τη ζητούμενη δύναμη. Επίσης, η σχετική πίεση στη θέση ① είναι $(P_g)_1 = P_1 - P_{atm} = P_1 - P_2$, η οποία υπολογίζεται ως εξής:



$$\left.\begin{aligned} P_A &= P_1 + \rho g (y_2 + h) + \rho_{Hg} g y_1 \\ P_A &= P_2 + \rho g y_2 + \rho_{Hg} g (h + y_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 + \rho g(\cancel{y_2} + h) + \cancel{\rho_{Hg} g y_1} = P_2 + \cancel{\rho g y_2} + \rho_{Hg} g (h + \cancel{y_1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = (\rho_{Hg} - \rho) g h \quad , \quad \text{δηλ. } (P_g)_1 = (\rho_{Hg} - \rho) g h$$

Επίσης: $A_i = \frac{\pi D_i^2}{4}$ με $i = 1, 2$

Άρα: $(1) \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\gamma} = \left\{\rho V_1^2 \frac{\pi D_1^2}{4}\left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 - 1\right] - (\rho_{Hg} - \rho) g h \frac{\pi D_1^2}{4}\right\}\vec{e}_x$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\alpha\gamma} = \frac{\pi}{4}(0.1)^2 \left\{(998)(5)^2\left[\left(\frac{10}{7}\right)^2 - 1\right] - (13550 - 998)(9.81)(0.6)\right\}\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\alpha\gamma} = (-376.3\ N)\vec{e}_x$$

β) Γενικευμένη εξίσωση Bernoulli (Α.Δ.Ε.):

$$W_s = -\int_1^2 \frac{dP}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - g H_L$$

η οποία για μηδενικό αξονικό έργο ($W_s = 0$), αμελητέες διαφορές ύψους ($Z_1 \simeq Z_2$) και ασυμπίεστο ρευστό, δίνει

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = g H_L \Rightarrow H_L = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} \Rightarrow$$

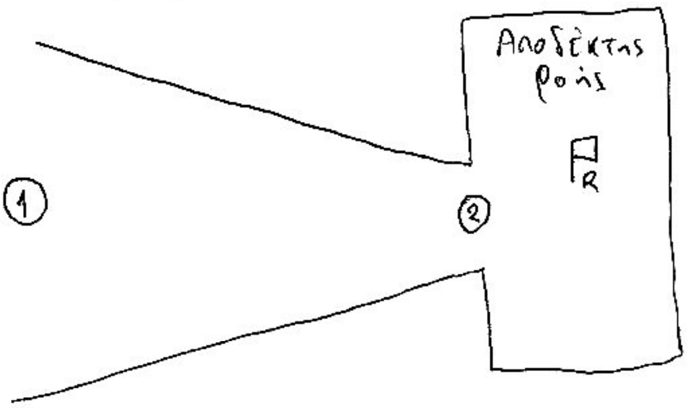
$$\Rightarrow H_L = \frac{(\rho_{Hg} - \rho) g h}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_L = \left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho} - 1\right) h + \frac{V_1^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_L = \left(\frac{13550}{998} - 1\right) 0.6 + \frac{5^2}{2\cdot(9.81)}\left[1 - \left(\frac{10}{7}\right)^4\right] \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_L = 3.5135 \text{ m}$$

$$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 5}}$$



$P_1 = 414\,kPa$
$T_1 = (273.15 + 95)K = 368.15\,K$
$V_1 \simeq 0$

$A_2 = 93\,cm^2 = 93 \cdot 10^{-4}\,m^2$

$P_R = 104\,kPa$

$$V_1 \simeq 0 \Rightarrow \begin{cases} P_0 \simeq P_1 = 414000 \, Pa \\ T_0 \simeq T_1 = 368.15 \, K \end{cases}$$

κρίσιμη πίεση: $P_c = \left(\dfrac{2}{K+1}\right)^{\frac{K}{K-1}} P_0 \underset{\substack{K=\frac{C_p}{C_v}=1.4 \\ \text{για διατομικό} \\ \text{ιδανικό αέριο}}}{\Longrightarrow} P_c = 218.709 \, kPa >$

$> P_R$, άρα η ροή στην A_2 είναι ηχητική $(M_2 = 1)$

και $P_2 = P_c = 218709 \, Pa$

Επίσης, $\dfrac{T_0}{T_2} = 1 + \dfrac{K-1}{2} M_2^2 \underset{M_2=1}{\Longrightarrow} T_2 = \dfrac{2T_0}{K+1} \Rightarrow T_2 = 306.79 \, K$

Ο ρυθμός ροής μάζας είναι ίσος με: $\dot{m} = \rho_2 A_2 V_2$

όπου για ιδανικό αέριο $\rho_2 = \dfrac{P_2}{R^* T_2}$ και $V_2 = \alpha_2 = \sqrt{K R^* T_2}$

οπότε: $\dot{m} = \dfrac{P_2}{R^* T_2} A_2 \sqrt{K R^* T_2} = P_2 A_2 \sqrt{\dfrac{K}{R^* T_2}} =$

$$= (218709)(0.0093)\sqrt{\frac{1.4}{(287)(306.79)}} \; \frac{Kg}{s} = 8.11 \; Kg/s$$