## ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

***Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Θεωρία Ρευστών» (ΕΜ255)***

Ηράκλειο, 28 Ιανουαρίου 2008

**Θέμα 1. (μονάδες 2.5)**

α) Θεωρείστε τη ροή ενός ιξώδους ρευστού γύρω από ένα στερεό σώμα. Τι είναι το οριακό στρώμα; [*μονάδες: 0.4*]

β) Από ποια θερμοδυναμική μεταβλητή εξαρτάται κυρίως το ιξώδες ενός ρευστού; Αν αυτή η μεταβλητή αυξηθεί, τι θα συμβεί στο ιξώδες ενός υγρού και τι στο ιξώδες ενός αερίου; [*μονάδες: 0.5*]

γ) Από τι εξαρτάται το σχήμα που θα πάρει μια σταγόνα υγρού όταν τοποθετηθεί πάνω σε μια λεία οριζόντια στερεή επιφάνεια; Σχεδιάστε ποιοτικά τα σχήματα μιας σταγόνας υδραργύρου και μιας σταγόνας νερού πάνω σε γυάλινη επιφάνεια. [*μονάδες: 0.5*]

δ) Το πεδίο ταχύτητας μιας μονοδιάστατης ροής μεταξύ των θέσεων $x=0$ και $x=L$ δίνεται ως

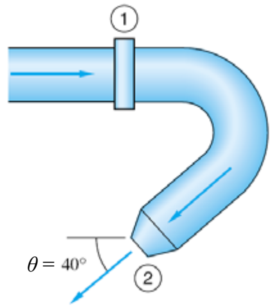
$$\vec{\boldsymbol{v}} = v_o\left(1+\frac{2x}{L}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}}.$$

i) Βρείτε μια αναλυτική έκφραση για το διάνυσμα επιτάχυνσης [*μονάδες: 0.5*]

ii) Για $v_o = 3\,\text{m/s}$ και $L = 15\,\text{cm}$, υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται ένα σωματίδιο ρευστού για να μεταφερθεί από τη θέση $x=0$ στη θέση $x=L$. [*μονάδες: 0.6*]

**Θέμα 2. (μονάδες 2.5)**

Στο σύστημα αγωγών του διπλανού σχήματος ρέει νερό στους 20°C και εξέρχεται στην ατμόσφαιρα με σταθερό ρυθμό 15 Kg/s. Οι διάμετροι είναι $D_1 = 10\,\text{cm}$ και $D_2 = 3\,\text{cm}$. Η σχετική πίεση στη θέση 1 είναι $2.3\,\text{atm}$. Θεωρώντας αμελητέο το βάρος του νερού και των σωληνώσεων, να υπολογιστεί το διάνυσμα της συνολικής δύναμης που ασκούν τα τοιχώματα στο ρευστό που βρίσκεται μεταξύ των θέσεων 1 και 2.




**Θέμα 3. (μονάδες 2.5)**

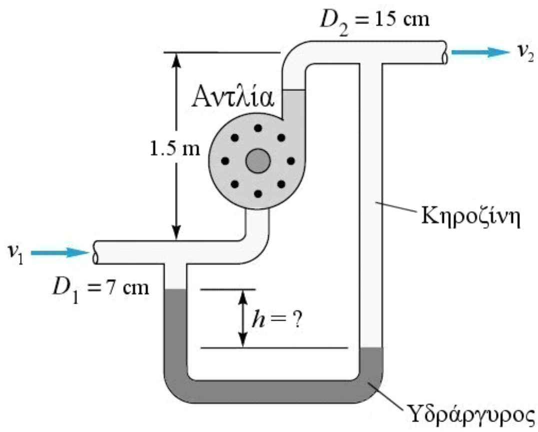
Κηροζίνη ρέει διαμέσου μιας αντλίας με ρυθμό $65\,\text{lt/s}$. Η αντλία προσδίδει στη ροή ισχύ 6 kilowatt και η συνολική απώλεια μανομετρικού ύψους μεταξύ των θέσεων 1 και 2 είναι $2.4\,\text{m}$. Το υπόλοιπο του συστήματος σωληνώσεων δεν απεικονίζεται στο σχήμα, και οι πιέσεις εισόδου και εξόδου είναι άγνωστες.

α) Να γραφτεί αναλυτικά η διαφορά πίεσης $P_2 - P_1$ συναρτήσει του ύψους $h$ και της υψομετρικής διαφοράς $z_2 - z_1$. [*μονάδες: 0.7*]

β) Να υπολογιστεί η διαφορά ύψους $h$ μεταξύ των στηλών υδραργύρου. [*μονάδες: 1.8*]

**Δίνονται:** πυκνότητα υδραργύρου: $\rho_\upsilon = 13550\,\text{kg/m}^3$,

πυκνότητα κηροζίνης: $\rho_\kappa = 804\,\text{kg/m}^3$




**Θέμα 4. (μονάδες 2.5)**

Αέρας ρέει αδιαβατικά και χωρίς τριβές διαμέσου ενός συγκλίνοντος-αποκλίνοντος ακροφυσίου που έχει επιφάνεια λαιμού $6.4\,\text{cm}^2$. Ο αέρας εισέρχεται στο ακροφύσιο με αμελητέα ταχύτητα σε ατμοσφαιρική πίεση και σε θερμοκρασία 21°C. Σε κάποιο σημείο Β στο αποκλίνον τμήμα του ακροφυσίου, η πίεση είναι $9.4\,\text{kPa}$.

α) Να υπολογιστεί ο αριθμός Mach, η πίεση, η απόλυτη θερμοκρασία, η ταχύτητα και η πυκνότητα του αέρα στο λαιμό. [*μονάδες: 1.2*]

β) Προσδιορίστε την επιφάνεια στο σημείο Β. [*μονάδες: 1.3*]

**Δεδομένα**

πυκνότητα του νερού: $\rho = 998\,\text{kg/m}^3$ (στους 20°C & πίεση 1 atm), 1 atm = 101325 Pa

ειδική σταθερά του αέρα: $R^* = 287\,\text{J/(kg}\cdot\text{K)}$, επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 9.81\,\text{m/s}^2$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

# ΘΕΩΡΙΑ ΡΕΥΣΤΩΝ (ΕΜ 255)

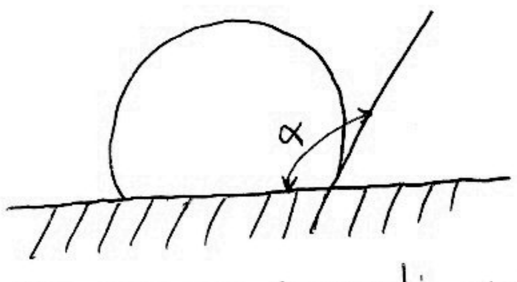
## ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

### ΘΕΜΑ 1

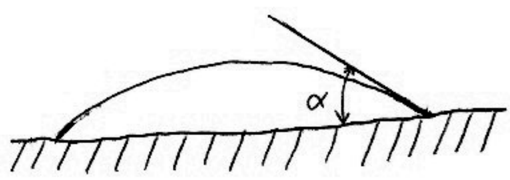
α) Το οριακό στρώμα είναι μια περιοχή διάτμησης που σχηματίζεται στην εξωτερική επιφάνεια του στερεού. Σ' αυτήν την περιοχή η επίδραση του ιξώδους και/ή της τύρβης είναι σημαντική, με αποτέλεσμα την ύπαρξη αξιοσημείωτης τριβής, σε αντίθεση με την περιοχή μακριά από το στερεό σώμα, όπου οι τριβές είναι αμελητέες.

β) Το ιξώδες ενός ρευστού εξαρτάται κυρίως από τη θερμοκρασία. Το ιξώδες των υγρών μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, ενώ στα αέρια το ιξώδες αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.

γ) Το σχήμα που θα λάβει η σταγόνα εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ των δυνάμεων συνοχής των μορίων του υγρού και των δυνάμεων συνάφειας υγρού-στερεού




Υδράργυρος σε γυαλί, $\alpha > 90^\circ$




νερό σε γυαλί, $\alpha < 90^\circ$

δ) i) $\vec{\alpha} = \dot{\vec{v}} = \cancelto{0}{\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + (\mathrm{grad}\,\vec{v})\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} v_x \vec{e}_1 = \dfrac{2v_0}{L} v_0 \left(1 + \dfrac{2x}{L}\right)\vec{e}_1 =$

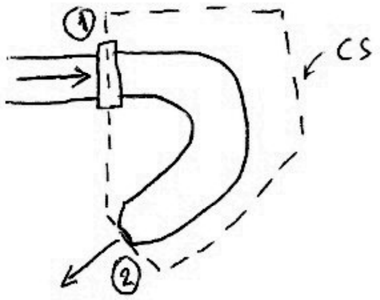
$= \dfrac{2v_0^2}{L}\left(1 + \dfrac{2x}{L}\right)\vec{e}_1$

ii) $V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow V_0 \left(1 + \frac{2x}{L}\right) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_0^L \frac{dx}{V_0\left(1+\frac{2x}{L}\right)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{L}{2V_0}\left[\ln\left(1 + \frac{2x}{L}\right)\right]_0^L \Rightarrow \boxed{t = \frac{L}{2V_0}\ln 3} \Rightarrow t = \left(\frac{0.15}{2\cdot 3}\ln 3\right) sec$$

$$\Rightarrow t \simeq 0.0275 \ sec$$

## ΘΕΜΑ 2




Υποθέτουμε μόνιμες συνθήκες, και ασυμπίεστη ροή

Ν.Ι.Ο. (μον. συνθήκες, αμελητέο βάρος): $\vec{F}_s = \int_{cs} \vec{V}\rho\left(\vec{V}\cdot d\vec{A}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F}_T + \int_{cs}(-P)\,d\vec{A} = \int_{cs}\vec{V}\rho\left(\vec{V}\cdot d\vec{A}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_T + \int_{cs} -\left(P_{atm} + P_g\right) d\vec{A} = \int_{A_1}\vec{V}_1\rho\left(\vec{V}_1\cdot d\vec{A}_1\right) + \int_{A_2}\vec{V}_2\rho\left(\vec{V}_2\cdot d\vec{A}_2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_T + \int_{cs}(-P_{atm})\,d\vec{A} + \int_{cs}(-P_g)\,d\vec{A} = -\vec{V}_1\rho\left(V_1A_1\right) + \vec{V}_2\rho\left(V_2A_2\right) \quad (1)$$

όπου υποθέσαμε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή (ασυμπίεστη ροή) και ότι οι ταχύτητες είναι ομοιόμορφες και κάθετες στις $A_1$ και $A_2$, άρα $\vec{V}_1\cdot d\vec{A}_1 = -V_1\,dA_1$ και $\vec{V}_2\cdot d\vec{A}_2 = V_2\,dA_2$

$$(1) \Rightarrow \vec{F}_T + (-P_{atm}) \oint_{CS} d\vec{A} + \int_{A_1} (-P_g)\, d\vec{A}_1 = -\vec{V}_1 \rho (V_1 A_1) + \vec{V}_2 \rho (V_2 A_2)$$

Θεωρώντας την πίεση ομοιόμορφη στην επιφάνεια, $\vec{A}_1 = -A_1 \vec{e}_1$ και αντικαθιστώντας τις σχέσεις: $\vec{V}_1 = V_1 \vec{e}_1$ και $\vec{V}_2 = -V_2 (\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2)$ προκύπτει:

$$\vec{F}_T = -(P_g)_1 A_1 \vec{e}_1 - V_1^2 \rho A_1 \vec{e}_1 - V_2^2 \rho A_2 (\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2) \qquad (2)$$

A.Δ.Μ. (μον. συνθήκες): $\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \int_{A_1} \rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A_2} \rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \\ \text{Όμως } \dot{m} = \int_{A_2} \rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2 \Rightarrow \dot{m} = \rho V_2 A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \dfrac{\dot{m}}{\rho A_1} & (3) \\[2ex] V_2 = \dfrac{\dot{m}}{\rho A_2} & (4) \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις (3) & (4) στην (2) προκύπτει:

$$\vec{F}_T = -(P_g)_1 A_1 \vec{e}_1 - \frac{\dot{m}^2}{\rho A_1} \vec{e}_1 - \frac{\dot{m}^2}{\rho A_2} (\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2) \Rightarrow$$

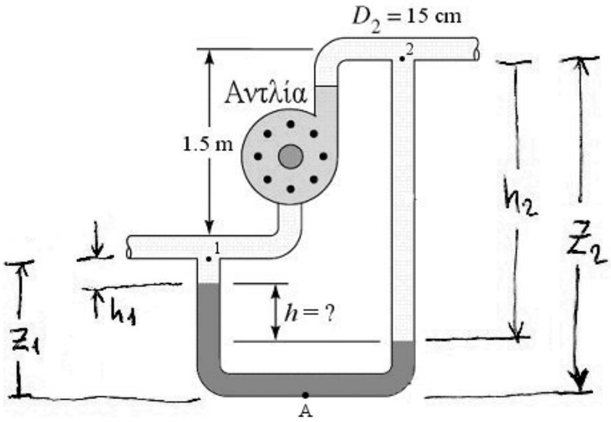
$$\Rightarrow \vec{F}_T = \left[-(P_g)_1 A_1 - \frac{\dot{m}^2}{\rho}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{\cos\theta}{A_2}\right)\right] \vec{e}_1 - \frac{\dot{m}^2}{\rho A_2} \sin\theta\, \vec{e}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} (P_g)_1 = 2.3\,atm = 2.3 \cdot 101325\,Pa = 233047.5\,Pa \\ A_1 = \dfrac{\pi D_1^2}{4} = \dfrac{\pi (0.1)^2}{4} = 0.00785398\,m^2 \\ A_2 = \dfrac{\pi D_2^2}{4} = \dfrac{\pi (0.03)^2}{4} = 7.06858 \cdot 10^{-4}\,m^2 \\ \dot{m} = 15\,Kg/s \\ \rho = 998\,Kg/m^3, \quad \theta = 40^\circ = \dfrac{40}{180}\pi = \dfrac{2\pi}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_T = (-2103.38\ N)\vec{e}_1 + (-205.02\ N)\vec{e}_2$$

# ΘΕΜΑ 3

α)




$$\left.\begin{aligned} P_A &= P_1 + \rho_\kappa g h_1 + \rho_\upsilon g (z_1 - h_1) \\ P_A &= P_2 + \rho_\kappa g h_2 + \rho_\upsilon g (z_2 - h_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow P_1 - P_2 + \rho_\kappa g (h_1 - h_2) + \rho_\upsilon g \left[(z_1 - h_1) - (z_2 - h_2)\right] = 0 \\ &\text{Όμως: } (z_1 - h_1) - (z_2 - h_2) = h \Rightarrow h_1 - h_2 = (z_1 - z_2) - h \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 + (\rho_\upsilon - \rho_\kappa) g h + \rho_\kappa g (z_1 - z_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 = (\rho_\upsilon - \rho_\kappa) g h + \rho_\kappa g (z_1 - z_2) \qquad (1)$$

β) Θεωρώντας μονοδιάστατη ροή σε μόνιμη κατάσταση, ισχύει η γενικευμένη εξίσωση Bernoulli:

$$-W_s = \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} + \frac{|\vec{V}_2|^2 - |\vec{V}_1|^2}{2} + g(z_2 - z_1) + gH_L \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ασυμπίεστη ροή}}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -W_s = \frac{P_2 - P_1}{\rho_\kappa} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + gH_L \underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} \; -w_s = \left(\frac{\rho_u}{\rho_\kappa} - 1\right) g h + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g H_L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{-2\left(w_s + g H_L\right) - \left(V_2^2 - V_1^2\right)}{2\left(\frac{\rho_u}{\rho_\kappa} - 1\right) g} \qquad (2)$$

Για μόνιμες συνθήκες, και ασυμπίεστη μονοδιάστατη ροή: Α.Δ.Μ. ⇒

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \\ \text{Όμως, ογκομετρική παροχή } Q = V_2 A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} V_1 = Q/A_1 \Rightarrow V_1 = \dfrac{4Q}{\pi D_1^2} & (3) \\ V_2 = Q/A_2 \Rightarrow V_2 = \dfrac{4Q}{\pi D_2^2} & (4) \end{array}\right.$$

Επιπλέον, $\{\text{ισχύς αντλίας}\} = \dot{W}_s = \dot{m} w_s \Rightarrow w_s = \dfrac{\dot{W}_s}{\dot{m}} \Rightarrow w_s = \dfrac{\dot{W}_s}{\rho_\kappa Q}$ (5)

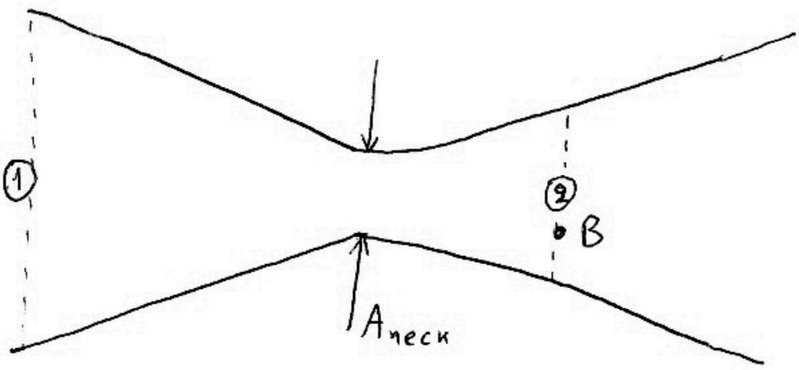
Αντικαθιστώντας τις (3), (4) και (5) στην (2) λαμβάνεται:

$$h = \frac{\rho_\kappa}{\left(\rho_u - \rho_\kappa\right) g} \left[ -\frac{\dot{W}_s}{\rho_\kappa Q} - g H_L - \frac{8 Q^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4} \right) \right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{W}_s = -6 \text{ kW} = -6000 \text{ watts} \\ \rho_\kappa = 804 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_u = 13550 \text{ kg/m}^3 \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2 \\ Q = 65 \text{ lt/s} = 0.065 \text{ m}^3/\text{s} \\ H_L = 2.4 \text{ m} \\ D_1 = 0.07 \text{ m}, \; D_2 = 0.15 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow h = 1.46 \text{ m}$$

**ΘΕΜΑ 4**

α)




$P_1 = 1atm = 101325\ Pa$
$T_1 = (273.15 + 21)K = 294.15\ K$
$V_1 \simeq 0$

$A_{neck} = 6.4\ cm^2 = 6.4 \cdot 10^{-4} m^2$

$P_2 = 9400\ Pa$

Έχουμε: $V_1 \simeq 0 \Rightarrow \begin{cases} P_0 \simeq P_1 = 101325\ Pa \\ T_0 \simeq T_1 = 294.15\ K \end{cases}$

Κρίσιμη πίεση: $P_c = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} P_0 \underset{\substack{k=1.4 \\ \text{(διατομικό ιδαν. αέριο)}}}{\Longrightarrow} P_c = 53528.15\ Pa >$

$> P_2$ και άρα το ακροφύσιο λειτουργεί υπό συνθήκες υπερηχητικής ροής στο αποκλίνον τμήμα έως το ②. Επομένως, η ροή στο λαιμό είναι ηχητική, δηλ. $M_{neck} = 1 = M_*$ και $A_{neck} = A_*$, $P_{neck} = P_c = P_* =$
$= 53528.15\ Pa$

Επίσης, $\frac{T_0}{T_*} = 1 + \frac{k-1}{2} M_*^2 \Rightarrow T_* = \frac{2T_0}{k+1} \Rightarrow T_* = 245.125\ K$

$$V_* = \alpha_* \Rightarrow V_* = \sqrt{kR^*T_*} \Rightarrow V_* = 313.833\ m/s$$

$$\rho_* = \frac{P_*}{R^* T_*} \Rightarrow \rho_* = 0.76087\ kg/m^3$$

β) Α.Δ.Μ. (μονοδιάστατη, μόνιμη ροή) $\Rightarrow \rho_* A_* V_* = \rho_2 A_2 V_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_2 = A_* \frac{\rho_*}{\rho_2} \frac{V_*}{V_2} \qquad (1)$$

ισοεντροπική διαδικασία $\Rightarrow P\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\kappa} = \sigma\tau\alpha\vartheta. \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_2 \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{\kappa} = P_* \left(\frac{1}{\rho_*}\right)^{\kappa} \Rightarrow \frac{\rho_*}{\rho_2} = \left(\frac{P_*}{P_2}\right)^{1/\kappa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_*}{\rho_2} = 3.464 \Rightarrow \rho_2 = 0.21963 \ \frac{kg}{m^3}$$

Α.Δ.Ε. $\Rightarrow \frac{V^2}{2} + C_p T = \sigma\tau\alpha\vartheta. \Rightarrow \frac{V_2^2}{2} + C_p T_2 = \frac{V_1^2}{2} + C_p T_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{V_2^2}{2} + C_p \frac{P_2}{R^* \rho_2} = C_p T_1 \Rightarrow V_2 = \sqrt{2 C_p \left(T_1 - \frac{P_2}{R^* \rho_2}\right)} \Rightarrow$$

$$\underset{C_p = \frac{7}{2} R^*}{\Rightarrow} \quad V_2 = 539.77 \ m/s$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στην (1) προκύπτει: $A_2 = 12.89 \ cm^2$