ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ -ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέματα εξέτασης στο μάθημα «Θεωρία Ρευστών» (ΕΜ255)

Ηράκλειο, 28 Αυγούστου 2006

Θέμα 1. (μονάδες 2.5)

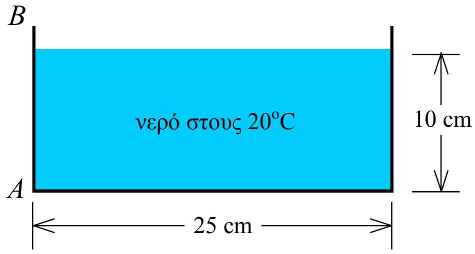
α) Από ποια θερμοδυναμική μεταβλητή εξαρτάται κυρίως το ιξώδες ενός ρευστού; Αν αυτή η μεταβλητή αυξηθεί, τι θα συμβεί στο ιξώδες ενός υγρού και τι στο ιξώδες ενός αερίου; [*μονάδες: 0.5*]

β) Διατυπώστε ποιοτικά τους βασικούς νόμους της μηχανικής του συνεχούς μέσου που χρησιμοποιούνται στη μελέτη της κίνησης των ρευστών. Ποιοι είναι οι δύο τρόποι διατύπωσης τους με εξισώσεις (ή ανισότητες) και ποιες οι διαφορές ως προς την ισχύ τους; [*μονάδες: 1.5*]

γ) Από τι εξαρτάται το σχήμα που θα πάρει μια σταγόνα υγρού όταν τοποθετηθεί πάνω σε μια λεία οριζόντια στερεή επιφάνεια; Σχεδιάστε ποιοτικά τα σχήματα μιας σταγόνας υδραργύρου και μιας σταγόνας νερού πάνω σε γυάλινη επιφάνεια. [*μονάδες: 0.5*]

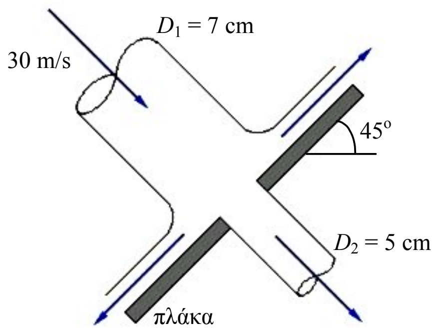
Θέμα 2. (μονάδες 3)

Το δοχείο του διπλανού σχήματος έχει πάχος $b = 12\,\text{cm}$ κάθετα στο επίπεδο του χαρτιού. Αν το δοχείο με το νερό επιταχυνθούν ως συμπαγές σώμα οριζόντια προς τα δεξιά με μια επιτάχυνση $7\ \text{m/s}^2$, υπολογίστε α) το βάθος του νερού στην πλευρά ΑΒ, και β) τη δύναμη που ασκείται από το ρευστό στην επιφάνεια ΑΒ. Υποθέστε ότι το νερό δεν χύνεται.



Θέμα 3. (μονάδες 3)

Μια φλέβα νερού (water jet) διαμέτρου 7 cm και ταχύτητας $30\,\text{m/s}$ προσκρούει σε μια λεία πλάκα, η οποία έχει μια οπή διαμέτρου 5 cm. Ένα μέρος του νερού περνά από την οπή και το υπόλοιπο χωρίζεται σε δυο ροές ακολουθώντας την επιφάνεια της πλάκας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Υπολογίστε το διάνυσμα της δύναμης που απαιτείται για να κρατηθεί η πλάκα στη θέση της. Υποθέστε ότι οι τριβές και η επίδραση της βαρύτητας είναι αμελητέες.



Θέμα 4. (μονάδες 2)

α) Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής δίνεται ως $\vec{v} = (y^2t - x^2t + y)\vec{e}_1 + (3xy - x^2t^2)\vec{e}_2$, και το πεδίο της θερμοκρασίας ως $T = 4y^2 - x^3t$, σε αυθαίρετες μονάδες. Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής $\dot{T}$ της θερμοκρασίας στο σημείο $(x, y) = (1,2)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. [*μονάδες: 0.8*]

β) Ένα στερεό σώμα κινείται με ταχύτητα $500\,\text{m/s}$ μέσα σε ακίνητο αέρα πίεσης 1 atm και θερμοκρασίας 15°C. Υπολογίστε τον αριθμό Mach, τη θερμοκρασία ηρεμίας, την ενθαλπία ηρεμίας και την πίεση ηρεμίας, θεωρώντας ότι ο αέρας συμπεριφέρεται ως διατομικό ιδανικό αέριο. [*μονάδες: 1.2*]

Δεδομένα

πυκνότητα του νερού: $\rho = 998\,\text{kg/m}^3$ (στους 20°C & πίεση 1 atm)

ειδική σταθερά του αέρα: $R^* = 287\,\text{J/(kg}\cdot\text{K)}$, επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 9.81\,\text{m/s}^2$

1 atm = 101325 Pa

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΩΡΙΑ ΡΕΥΣΤΩΝ (ΕΜ 255)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ '06

ΘΕΜΑ 1

α) Το ιξώδες ενός ρευστού εξαρτάται κυρίως από τη θερμοκρασία. Το ιξώδες ενός υγρού μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, ενώ στα αέρια το ιξώδες αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.

β) Οι βασικοί νόμοι της μηχανικής του συνεχούς μέσου είναι:

i) Αρχή διατήρησης μάζας (Α.Δ.Μ.): η μάζα m μιας οποιασδήποτε ποσότητας ύλης μένει σταθερή στο χρόνο (δηλ. $\frac{dm}{dt}=0$)

ii) Νόμος ισοζυγίου (γραμμικής) ορμής (Ν.Ι.Ο.): Η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται σε μια ποσότητα ύλης είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της (γραμμικής) ορμής της $\vec{M}$ (δηλ. $\vec{F}=\frac{d\vec{M}}{dt}$)

iii) Νόμος ισοζυγίου στροφορμής (Ν.Ι.Σ.): Η συνισταμένη ροπή $\vec{m}$ (ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο $\underline{O}$) που ασκείται σε μια ποσότητα ύλης είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της $\vec{h}$ (ως προς το ίδιο σημείο $\underline{O}$), δηλ. $\vec{m}=\frac{d\vec{h}}{dt}$

iv) Αρχή διατήρησης ενέργειας (Α.Δ.Ε. ή 1ος νόμος της θερμοδυναμικής): Το ποσό θερμότητας Q που προσδίδεται σε ένα σύστημα είναι ίσο με το άθροισμα του έργου W που παράγεται από το σύστημα και της μεταβολής στην ενέργεια ΔE του συστήματος (δηλ. $Q = W + \Delta E$)

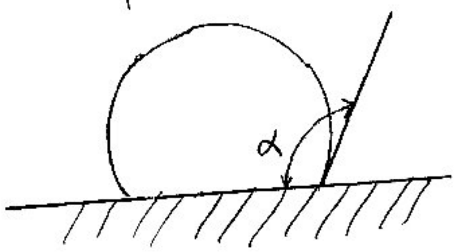
v) Δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής: Η μεταβολή της εντροπίας ΔS ενός συστήματος δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το λόγο της θερμότητας Q που δίνεται στο σύστημα προς τη θερμοκρασία T

(δηλ. $\Delta S \geq \frac{Q}{T}$)

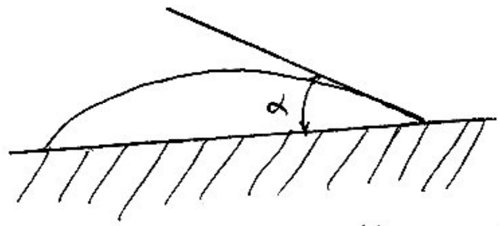
Τρόποι διατύπωσης των παραπάνω νόμων:

1) Ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι οποίες ισχύουν σε κάθε περιοχή (όγκο) του ρευστού (συνεχούς μέσου)
2) Διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες ισχύουν σε κάθε σημείο του ρευστού (συνεχούς μέσου)

γ) Το σχήμα που θα πάρει η σταγόνα εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ των δυνάμεων συνοχής των μορίων του υγρού και των δυνάμεων συνάφειας υγρού-στερεού



Υδράργυρος σε γυαλί, $\alpha > 90°$

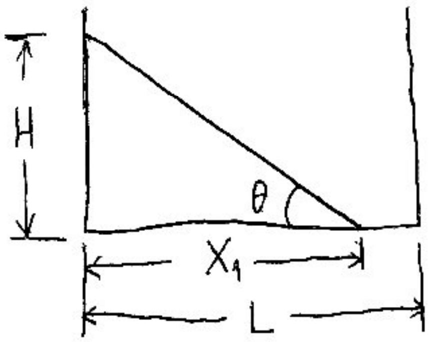


νερό σε γυαλί, $\alpha < 90°$

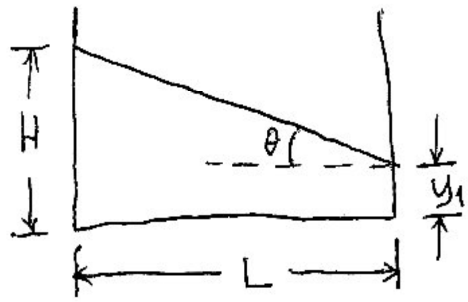
ΘΕΜΑ 2

Δεδομένα:
- $L = 25\,cm$ (οριζόντιο μήκος του δοχείου)
- $h = 10\,cm$ (αρχικό ύψος της στάθμης του νερού)
- $b = 12\,cm$ (πάχος του δοχείου κάθετα στο επίπεδο του χαρτιού)
- $\alpha_x = 7\,m/s^2$ (οριζόντια επιτάχυνση)

α) Το σχήμα της εγκάρσιας διατομής του νερού στο επίπεδο του χαρτιού θα είναι είτε τριγωνικό είτε σχήματος τραπεζίου. Δηλαδή:



ή



Έστω τρίγωνο: [αρχικός όγκος] = [τελικός όγκος] ⇒

$$\Rightarrow Lh\cancel{b} = \frac{HX_1}{2}\cancel{b} \Rightarrow H = \frac{2Lh}{X_1} \qquad (1)$$

Επίσης: $\tan\theta = \dfrac{\alpha_x}{\alpha_y + g} \underset{\alpha_y=0}{\Rightarrow} \tan\theta = \dfrac{\alpha_x}{g} \Rightarrow \dfrac{H}{X_1} = \dfrac{\alpha_x}{g} \qquad (2)$

$$[(1),(2)] \Rightarrow X_1 = \sqrt{\frac{2gLh}{\alpha_x}} \Rightarrow X_1 = 26.471\ \text{cm} > 25\ \text{cm} = L$$

Άρα η εγκάρσια διατομή είναι σχήματος τραπεζίου, οπότε:

$$[\text{αρχικός όγκος}] = [\text{τελικός όγκος}] \Rightarrow \cancel{L}h\cancel{b} = \frac{\cancel{L}(H+y_1)}{2}\cancel{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = 2h - H \qquad (3)$$

Επίσης: $\tan\theta = \dfrac{\alpha_x}{g} \Rightarrow \dfrac{H-y_1}{L} = \dfrac{\alpha_x}{g} \underset{(3)}{\Longrightarrow} \dfrac{2(H-h)}{L} = \dfrac{\alpha_x}{g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow H = h + \frac{\alpha_x}{g}\frac{L}{2} \Rightarrow H = 18.92\ \text{cm}$$

β) Η κατανομή της πίεσης στο νερό δίνεται ως:

$$P = -\rho\left[\alpha_x x + (\alpha_y + g)y\right] + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = -\rho\left[\alpha_x x + gy\right] + C \qquad (4)$$

όπου C σταθερά.

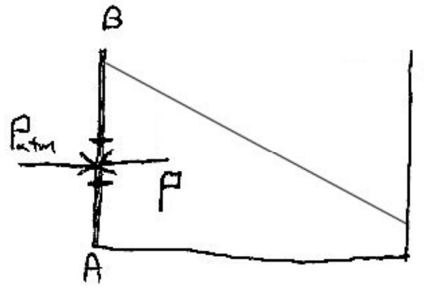
στο $(x,y)=(0,H)$ έχουμε $P=P_{atm}$, οπότε η (4) δίνει:

$$P_{atm} = -\rho g H + C \Rightarrow C = P_{atm} + \rho g H \qquad (5)$$

$$\left[(5)\to(4)\right] \Rightarrow P = P_{atm} + \rho\left[g(H-y) - \alpha_x x\right]$$

Στην επιφάνεια AB έχουμε $x=0$, οπότε:

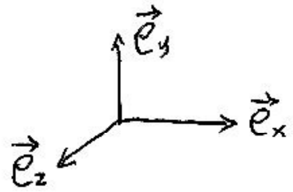
$$P = P_{atm} + \rho g (H-y)$$



Άρα, δύναμη που ασκείται στην AB:

$$F = \int_{AB} -(P-P_{atm})\, d\vec{A} = -\int_{AB} \rho g (H-y)\, d\vec{A}$$

Όμως $d\vec{A} = (dy\,dz)\,\vec{e}_x$



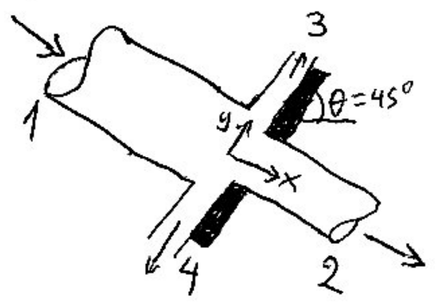
Άρα: $$\vec{F} = \vec{e}_x \int_0^b \int_0^H -\rho g (H-y)\, dy\, dz = -b\rho g \left[Hy - \frac{y^2}{2}\right]_0^H \vec{e}_x =$$

$$= -\left(b\rho g \frac{H^2}{2}\right)\vec{e}_x = -(0.12)(998)(9.81)\frac{(0.1892)^2}{2}\,\vec{e}_x =$$

$$= (-21.028\ N)\,\vec{e}_x$$

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε ασυμπίεστη ροή, χωρίς τριβές, σε μόνιμη κατάσταση. Εφόσον δεν υπάρχει άλλη μαζική δύναμη πέραν της βαρύτητας, ισχύει η εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής.



Ως εκ τούτου, για μια ροϊκή γραμμή από το 1 στο 2:

$$\frac{P_2-P_1}{\rho}+\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+g\left(z_2-z_1\right)=0 \quad (1)$$

όπου $V_i=|\vec{V}_i|$

Όμως: $P_1=P_2=P_{atm}$, και η επίδραση της βαρύτητας θεωρείται αμελητέα (αμελητέες διαφορές ύψους).

Άρα, η (1) δίνει: $V_2=V_1$

Ομοίως προκύπτει ότι $V_3=V_1$ και $V_4=V_1$

Η αρχή διατήρησης μάζας για ασυμπίεστο ρευστό και μόνιμες συνθήκες δίνει: $\displaystyle\int_{cs}\vec{V}\cdot d\vec{A}=0 \underset{\substack{\text{ομοιόμορφες ταχύτητες, κάθετες}\\ \text{στις } \vec{A}_1,\vec{A}_2,\vec{A}_3,\vec{A}_4}}{\Longrightarrow} -V_1A_1+V_2A_2+V_3A_3+V_4A_4$

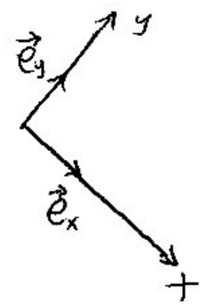
$$\underset{\{V_1=V_2=V_3=V_4\}}{\Longrightarrow} \quad A_3+A_4=A_1-A_2 \qquad (2)$$

Ο νόμος ισοζυγίου ορμής για μόνιμη κατάσταση και αμελητέες μαζικές δυνάμεις δίνει: $\displaystyle\vec{F}_s=\int_{cs}\vec{V}\rho\left(\vec{V}\cdot d\vec{A}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F}_{πλακ}-\cancelto{0}{\oint_{cs}P_{atm}\,d\vec{A}}=\sum_{i=1}^{4}\int_{A_i}\vec{V}_i\rho\left(\vec{V}_i\cdot d\vec{A}_i\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{πλακ}=\rho\left[-\vec{V}_1\left(V_1A_1\right)+\vec{V}_2\left(V_2A_2\right)+\vec{V}_3\left(V_3A_3\right)+\vec{V}_4\left(V_4A_4\right)\right] \Rightarrow$$

$$\underset{[V_1=V_2=V_3=V_4]}{\Longrightarrow} \vec{F}_{πλακ}=\rho V_1\left[-A_1\vec{V}_1+A_2\vec{V}_2+A_3\vec{V}_3+A_4\vec{V}_4\right] \qquad (3)$$



$$\left.\begin{array}{ll} \vec{V}_1 = V_1 \vec{e}_x \ , & \vec{V}_2 = V_2 \vec{e}_x = V_1 \vec{e}_x \\ \vec{V}_3 = V_3 \vec{e}_y = V_1 \vec{e}_y & \vec{V}_4 = -V_4 \vec{e}_y = -V_1 \vec{e}_y \end{array}\right\} (4)$$

$$\{(4) \rightarrow (3)\} \Rightarrow \vec{F}_{\pi\lambda\alpha\kappa} = \rho V_1^2 \left[(A_2 - A_1)\vec{e}_x + (A_3 - A_4)\vec{e}_y \right] \quad (5)$$

Διατμητική τάση αμελητέα $\Rightarrow (\vec{F}_{\pi\lambda\alpha\kappa})_y = 0 \Rightarrow A_3 = A_4 \underset{(2)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_3 = \dfrac{A_1 - A_2}{2} \\ \\ A_4 = \dfrac{A_1 - A_2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow A_3 = A_4 = \frac{\pi}{8}\left(D_1^2 - D_2^2\right) = (3\pi)\ cm^2$$

Ενώ από την (5) προκύπτει: $\vec{F}_{\pi\lambda\alpha\kappa} = \rho V_1^2 (A_2 - A_1)\vec{e}_x =$

$$= \rho V_1^2 \frac{\pi}{4}\left(D_2^2 - D_1^2\right)\vec{e}_x = \left[(998)(30)^2 \frac{\pi}{4}\left(0.05^2 - 0.07^2\right)\right]\vec{e}_x =$$

$= (-1693.067\ N)\vec{e}_x$ που είναι και η ζητούμενη δύναμη για να κρατηθεί η πλάκα στη θέση της

ΘΕΜΑ 4

α) $$\dot{T} = \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (grad\,T)\cdot\vec{V} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial x} v_x + \frac{\partial T}{\partial y} v_y\right) =$$

$$= -x^3 + (-3x^2 t)(y^2 t - x^2 t + y) + 8y(3xy - x^2 t^2)$$

η οποία για $(x, y, t) = (1, 2, 0)$ δίνει:

$\dot{T} = -1 + 16 \cdot 6 = 95$ μονάδες θερμοκρασίας/μονάδα χρόνου β) Δεδομένα: $\begin{cases} P = 1atm \\ T = 15^\circ C = (273.15 + 15)K = 288.15\ K \\ V = 500\ m/s \end{cases}$

Ταχύτητα ήχου στο ρευστό: $\alpha = \sqrt{\kappa R^* T}$

όπου $\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{7}{2}R^*}{\frac{5}{2}R^*} = 1.4$ (υποθέτοντας ότι ο αέρας συμπεριφέρεται ως διατομικό ιδανικό αέριο)

Άρα: $M = \frac{V}{\alpha} = \frac{V}{\sqrt{\kappa R^* T}} = \frac{500}{\sqrt{(1.4)(287)(288.15)}} = 1.469$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2}M^2 \Rightarrow T_0 = \left[1 + \frac{\kappa-1}{2}M^2\right]T \Rightarrow T_0 = 412.51\ K$$

$$h_0 = C_p T_0 = \frac{7}{2}R^* T_0 = 414.366\ kJ/kg$$

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \frac{\kappa-1}{2}M^2\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \Rightarrow P_0 \simeq 3.5105\,atm = 355.7\ kPa$$