# ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

## ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 12ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

### ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Για να είναι η $f(x,y)$ συνάρτηση πυκνότητας θα πρέπει:

i) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in R^2$ δηλ. $c \geq 0$, και

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty}\int_{-y}^{y} c(y-x)e^{-y}\,dx\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \left[yx - \frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{y} ce^{-y}\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} 2cy^2 e^{-y}\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cancel{-2cy^2e^{-y}}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 4cye^{-y}\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cancel{-4cye^{-y}}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 4ce^{-y}\,dy = 1 \Rightarrow \left[-4ce^{-y}\right]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = 1/4$$

β) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{4}(y-x)e^{-y}\,dy$$, αφού $f(x,y)=0$ όταν

$x \notin [-y, y]$, δηλ. $y < |x|$

Άρα: $$f_X(x) = \left[-\frac{(y-x)}{4}e^{-y}\right]_{y=|x|}^{\infty} + \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{4}e^{-y}\,dy = \left[-\frac{(y-x)}{4}e^{-y} - \frac{e^{-y}}{4}\right]_{y=|x|}^{\infty} =$$

$$= \frac{e^{-|x|}}{4}\left(|x| - x + 1\right)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-y}^{y} \frac{1}{4}(y-x)e^{-y}\,dx = \frac{e^{-y}}{4}\left[yx - \frac{x^2}{2}\right]_{x=-y}^{y} =$$

$$= \frac{e^{-y}}{4}\left[y^2 - \frac{y^2}{2} - \left(-y^2 - \frac{y^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}y^2 e^{-y}, \quad y>0$$

ενώ $f_Y(y) = 0$ όταν $y \leq 0$

γ) $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{4}(y-x)e^{-y}}{\frac{1}{2}y^2 e^{-y}} = \frac{y-x}{2y^2}, \text{ για } \begin{cases} -y \leq x \leq y, \text{ και} \\ 0<y<\infty \end{cases}$$

ενώ $f_{X|Y}(x|y) = 0$ για $\begin{cases} |x|>y, \text{ ή} \\ y \leq 0 \end{cases}$

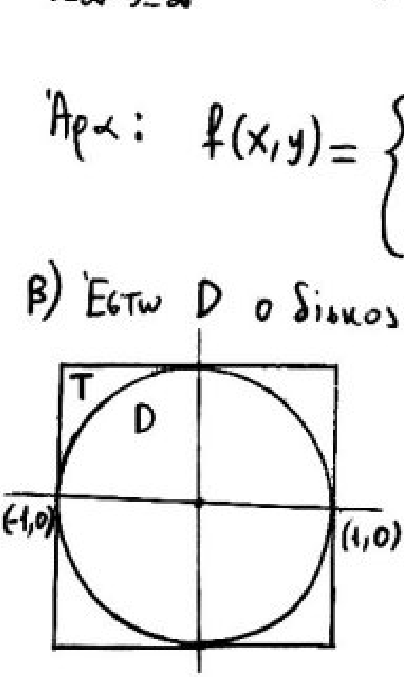
## ΑΣΚΗΣΗ 2

α) Αφού η $f(x,y)$ είναι ομοιόμορφη στο $T = \{(x,y) \setminus -1<x<1, -1<y<1\}$ θα πρέπει $f(x,y) = \begin{cases} c, & \text{αν } (x,y)\in T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$, όπου $c$=σταθερά$>0$ τέτοια ώστε:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} c\,dx\,dy = 1 \Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4} = \frac{1}{\text{εμβαδόν } T}$$

Άρα: $f(x,y) = \begin{cases} 1/4, & \text{αν } -1<x<1 \text{ και } -1<y<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

β) Έστω $D$ ο δίσκος: $D = \{(x,y) \setminus x^2+y^2 \leq 1\}$. Αφού η $f(x,y)$ είναι ομοιόμορφη θα έχουμε:




$$P(X^2+Y^2 \leq 1) = \frac{\text{εμβαδόν } D}{\text{εμβαδόν } T} = \frac{\pi}{4}$$

Εναλλακτικά: $P(X^2+Y^2\leq 1)=\iint_{y^2\leq 1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{4}\,dy\,dx=$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\,2\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\substack{x=\sin t\\ \Rightarrow dx=\cos t\,dt}}{=}$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=\int_{0}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\int_{0}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}dt+\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\cos 2t\,dt \underset{\theta=2t}{=}\frac{\pi}{4}+\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{2}\,d\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

γ) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\,dy=\frac{1}{2}$, για $-1<x<1$

και $f_X(x)=0$, αλλού

Άρα $f_X(x)$ ομοιόμορφη στο $(-1,1)$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\,dx=\frac{1}{2}$, για $-1<y<1$

ενώ $f_Y(y)=0$, αλλού

Άρα $f_Y(y)$ ομοιόμορφη στο $(-1,1)$

Επιπλέον, $X,Y$ είναι ανεξάρτητες, αφού $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

δ) $P(X<\frac{1}{2},Y<0)\underset{\text{ανεξ.}}{=}P(X<\frac{1}{2})\cdot P(Y<0)=F_X(\frac{1}{2})\cdot F_Y(0)=$

$$=\left(\int_{-\infty}^{1/2}f_X(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{0}f_Y(y)\,dy\right)=\left(\int_{-1}^{1/2}\frac{1}{2}dx\right)\cdot\left(\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

# ΑΣΚΗΣΗ 3

Αφού η $X$ είναι ομοιόμορφη στο $(0,1)$ και $Y$ εκθετική με παράμετρο $\lambda=1$, έχουμε:

$$f_X(x)=\begin{cases}1 &, \text{αν } 0<x<1\\ 0 &, \text{αλλιώς}\end{cases} \quad , \quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} &, \text{αν } y>0\\ 0 &, \text{αν } y\leq 0\end{cases}$$

α) $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ανεξ.}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx$$

Όμως $f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\neq 0$ μόνο εάν $0<x<1$ και $z-x>0 \Leftrightarrow x<z$

δηλαδή: $$\begin{cases}0<x<1 &, \text{αν } z\geq 1\\ 0<x<z &, \text{αν } z<1\end{cases}$$

Άρα: $$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^1 f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx &, \text{αν } z\geq 1\\ \int_0^z f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx &, \text{αν } z<1\end{cases}$$

Επομένως:

i) Για $z\geq 1$: $f_Z(z)=\int_0^1 e^{x-z}\,dx=\left[e^{x-z}\right]_{x=0}^{1}=e^{1-z}-e^{-z}=e^{-z}(e-1)$

ii) Για $z<1$: $f_Z(z)=\int_0^z e^{x-z}\,dx=\left[e^{x-z}\right]_{x=0}^{z}=1-e^{-z}$

Αν θέλετε για εξάσκηση επαληθεύστε ότι $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\cdot f_X(z-y)\,dy$

β) <u>1ος Τρόπος</u>: Βρίσκουμε πρώτα την συνάρτηση κατανομής $F_Z$ της $Z=X/Y$ και υπολογίζουμε την πυκνότητα ως $f_Z=dF_Z(z)/dz$

Δηλαδή: $$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X/Y\leq z)=\iint_{\frac{x}{y}\leq z} f(x,y)\,dy\,dx =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ανεξ.}}}{=} \iint_{\frac{x}{y}\leq z} f_X(x)\cdot f_Y(y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_{x/z}^{\infty} 1\cdot e^{-y}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[-e^{-y}\right]_{x/z}^{\infty} dx =$$

$$= \int_0^1 e^{-x/z}\,dx = \left[-z e^{-x/z}\right]_{x=0}^{1} = z\left(1-e^{-1/z}\right), \quad \text{για } z>0$$

Άρα: $f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 1-e^{-1/z}\left(1+\frac{1}{z}\right), & z>0 \\ 0, & z\leq 0 \end{cases}$

2ος Τρόπος: Θέτοντας $U=X$, $Z=X/Y$ υπολογίζουμε την από κοινού πυκνότητα $f_{U,Z}$ και μετά την περιθώρια $f_Z(z)$. Δηλαδή:

$$f_{U,Z}(u,z) = \frac{1}{|J(x,y)|}\,f(x,y) = \frac{1}{\left|\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}\right|}\cdot f_X(x)\cdot f_Y(y) \qquad (1)$$

όπου $u=g_1(x,y)=x$ και $z=g_2(x,y)=\frac{x}{y}$, οπότε: $x=u$ και $y=\frac{u}{z}$

Άρα από την (1) έχουμε: $f_{U,Z}(u,z) = \dfrac{f_X(u)\cdot f_Y\left(\frac{u}{z}\right)}{\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2}\end{vmatrix}\right|} = \dfrac{1\cdot e^{-u/z}}{x/y^2} =$

$$= \frac{u}{z^2}e^{-u/z}, \quad \text{για } 0<u<1 \text{ και } z>0$$

Άρα: $f_Z(z) = \int_0^1 f_{U,Z}(u,z)\,du = \int_0^1 \frac{u}{z^2}e^{-u/z}\,du = \left[-\frac{u}{z}e^{-u/z}\right]_{u=0}^{1} +$

$$+\int_0^1 \frac{1}{z}e^{-u/z}\,du = -\frac{1}{z}e^{-1/z} + \left[-e^{-u/z}\right]_{u=0}^{1} = -\frac{1}{z}e^{-1/z} - e^{-1/z} + 1 =$$

$$= 1-e^{-1/z}\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

# ΑΣΚΗΣΗ 4

**1ος Τρόπος:** $F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X - Y \le z) = \iint_{x-y\le z} f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y+z} f(x,y)\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ t=x-y \\ \text{στο εσωτερικό} \\ \text{ολοκλήρωμα}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f(t+y,y)\,dt\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t+y,y)\,dy\right)dt$$

Άρα: $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z+y,y)\,dy \quad , \quad -\infty < z < \infty \qquad (1)$$

Αν $X, Y$ είναι ανεξάρτητες τότε η τελευταία σχέση δίνει:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z+y)\cdot f_Y(y)\,dy \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

**2ος Τρόπος:** Έστω $U = X$, $Z = X - Y$ και οι συναρτήσεις

$$\left.\begin{aligned} u &= g_1(x,y) = x \\ z &= g_2(x,y) = x-y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= u \\ y &= u-z \end{aligned}\right. \quad , \quad \text{Τότε:}$$

$$f_{U,Z}(u,z) = \frac{1}{|J(x,y)|} f(x,y) = \frac{1}{\left|\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}\right|} f(x,y) = \frac{f(u,u-z)}{\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right|} = f(u,u-z)$$

Άρα: $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,Z}(u,z)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,u-z)\,du \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

Όπου είναι ίδια με την (1) μιας και θέτοντας στο τελευταίο ολοκλήρωμα

$y = u - z \Rightarrow dy = du$ , έχουμε:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z+y, y)\, dy \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

## $\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 5}}$

α) $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ , όπου $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx =$

$$= \int_1^{\infty} \frac{2}{x^3 y^2}\, dx = \frac{2}{y^2}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{y^2} \quad , \text{ για } y \geq 1$$

Άρα: $f_{X|Y}(x/y) = \dfrac{\frac{2}{x^3 y^2}}{1/y^2} = \dfrac{2}{x^3}$ , για $x \geq 1$ , $y \geq 1$

και $f_{X|Y}(x|y) = 0$ , αλλού

β) $E[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_1^{\infty} x \dfrac{2}{x^3}\, dx = 2\left[\dfrac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{\infty} =$

$= 2$ , για $y \geq 1$

και $E[X \mid Y=y] = 0$ , για $y < 1$

<u>Παρατήρηση</u>: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_1^{\infty} \dfrac{2}{x^3 y^2}\, dy = \dfrac{2}{x^3}\left[-\dfrac{1}{y}\right]_1^{\infty} = \dfrac{2}{x^3}$

αν $x \geq 1$ και $f_X(x) = 0$ αλλού. Άρα: $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x,y)$

$\forall (x,y) \in R^2$, οπότε οι $X, Y$ είναι ανεξάρτητες.

## ΑΣΚΗΣΗ 6

$$E[X^3 \backslash Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_{X\backslash Y}(x\backslash y)\, dx \qquad (1)$$

όπου $f_{X\backslash Y}(x\backslash y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ με $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx =$

$$= \int_0^y \frac{e^{-y}}{y}\, dx = \frac{e^{-y}}{y}\left[x\right]_{x=0}^{y} = e^{-y} \quad , \ y>0$$

Άρα $f_{X\backslash Y}(x\backslash y) = \dfrac{e^{-y}/y}{e^{-y}} = \dfrac{1}{y}$ , $y>0$, $0<x<y$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει:

$$E[X^3 \backslash Y=y] = \int_0^y x^3 \frac{1}{y}\, dx = \frac{1}{y}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^y = \frac{y^3}{4} \quad , \ y>0$$

και $E[X^3 \backslash Y=y] = 0$ , για $y \le 0$

## ΑΣΚΗΣΗ 7

$f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ και $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$ , $-\infty < x, y < \infty$

Αφού οι $X, Y$ είναι ανεξάρτητες η από κοινού πυκνότητα τους $f$ δίνεται ως $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$ , $(x,y) \in R^2$

Επομένως: $P(X^2+Y^2 \le 1) = \iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\, dy\, dx =$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi}\, dy\, dx$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε τις πολικές συντεταγμένες, δηλαδή θέτουμε $x = r\cos\theta$ και $r = s\sin\theta$, οπότε $x^2+y^2=r^2$ και $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$

$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

Επίσης, το χωρίο $\{(x,y) \setminus x^2+y^2 \leq 1\}$ είναι ο κυκλικός δίσκος με ακτίνα $=1$, οπότε $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Επομένως:

$$P(X^2+Y^2 \leq 1) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{e^{-r^2/2}}{2\pi} \cdot r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2\pi}\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)' dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1-e^{-1/2}}{2\pi}\, d\theta = 1-e^{-1/2}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 8

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

Αφού οι $X, Y$ είναι ανεξάρτητες, η από κοινού πυκνότητά τους $f$ δίνεται ως: $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Η συνάρτηση κατανομής της $Z = X/(X+Y)$ είναι ίση με:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X}{X+Y} \leq z\right) = \iint\limits_{\frac{x}{x+y} \leq z} f(x,y)\, dy\, dx =$$

$$= \iint\limits_{\substack{\frac{x}{x+y} \leq z \\ x,y>0}} e^{-(x+y)}\, dy\, dx$$ , όπου τα όρια του ολοκληρώματος

υπολογίζονται ως εξής: $\frac{x}{x+y} \leq z \underset{\substack{x>0 \\ y>0}}{\Rightarrow} x \leq zx + zy \Rightarrow zy \geq x(1-z) \Rightarrow$

$\underset{z>0}{\Rightarrow} \quad y \geq x\left(\frac{1}{z} - 1\right)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $0 < z < 1 \Rightarrow \frac{1-z}{z} > 0 \underset{x>0}{\Rightarrow} x\left(\frac{1}{z} - 1\right) > 0$

Οπότε: $$F_Z(z) = \int_0^{\infty}\int_{x\left(\frac{1}{z}-1\right)}^{\infty} e^{-(x+y)}\, dy\, dx = \int_0^{\infty} -e^{-x}\left[e^{-y}\right]_{y=x\left(\frac{1}{z}-1\right)}^{\infty} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-x\left(\frac{1}{z}-1\right)}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x/z}\, dx = \left[-z e^{-x/z}\right]_{x=0}^{\infty} =$$

$$= z$$

ii) $z \geq 1 \Rightarrow \frac{1-z}{z} \leq 0 \underset{x>0}{\Rightarrow} x\left(\frac{1-z}{z}\right) \leq 0$

Οπότε: $$F_Z(z) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\, dy\, dx = 1$$

Επομένως: $$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \leq 0 \\ z & , \quad 0 < z < 1 \\ 1 & , \quad z \geq 1 \end{cases}$$

Άρα: $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 1 , & 0<z<1 \\ 0 , & \text{αλλού} \end{cases}$

δηλ. η $Z$ έχει ομοιόμορφη πυκνότητα στο $(0,1)$

Με παρόμοιο τρόπο, για τη συνάρτηση κατανομής της $V=XY$, έχουμε:

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(XY \leq v) = \iint_{xy \leq v} f(x,y)\, dy\, dx =$$

$$= \iint_{\substack{xy \leq v \\ x,y>0}} e^{-(x+y)} dy\, dx = \int_0^\infty \int_0^{v/x} e^{-(x+y)}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_{y=0}^{v/x} dx = \int_0^\infty e^{-x}\left(1-e^{-v/x}\right) dx , \quad v>0$$

Μολονότι δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος για το τελευταίο ολοκλήρωμα, η $f_V$ υπολογίζεται ως εξής:

$$f_V(v) = \frac{dF_V(v)}{dv} = \int_0^\infty \frac{e^{-(x+\frac{v}{x})}}{x}\, dx , \quad v>0$$

και $f_V(v) = 0$, αν $v \leq 0$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού των $f_Z$ και $f_V$ είναι εκείνος που παρουσιάστηκε στην Άσκηση 3β ως "2ος τρόπος" και που επαναλαμβάνεται εδώ για τον υπολογισμό της $f_W$ με $W=X/Y$ (για την οποία επίσης θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω διαδικασία της παρούσας άσκησης). Έτσι, έστω $U=X$, $W=X/Y$ και οι συναρτήσεις:

$$\left.\begin{array}{l} u = g_1(x,y) = x \\ w = g_2(x,y) = \frac{x}{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = \frac{u}{w} \end{cases} , \quad \text{τότε η από κοινού πυκνότητα}$$

των $U, W$ υπολογίζεται ως: $f_{U,W}(u,w) = \dfrac{f(x,y)}{|J(x,y)|} =$

$$= \frac{f(x,y)}{\left|\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}\right|} = \frac{f(x,y)}{\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix}\right|} = \frac{f(x,y)}{|x|/y^2} = \frac{f\left(u, \frac{u}{w}\right)}{|u|/\left(\frac{u}{w}\right)^2} =$$

$$= \frac{u}{w^2} e^{-\left(u + \frac{u}{w}\right)} \quad , \text{ για } u>0 \text{ και } w>0$$

Άρα: $f_W(w) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,W}(u,w)\, du = \int_0^{\infty} \frac{u}{w^2} e^{-u\left(1+\frac{1}{w}\right)} du =$

$$= \cancelto{0}{\left[\frac{-u}{w^2\left(1+\frac{1}{w}\right)} e^{-u\left(1+\frac{1}{w}\right)}\right]_{u=0}^{\infty}} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-u\left(1+\frac{1}{w}\right)}}{w(w+1)} du =$$

$$= -\frac{1}{w(w+1)\left(1+\frac{1}{w}\right)} \left[e^{-u\left(1+\frac{1}{w}\right)}\right]_{u=0}^{\infty} = \frac{1}{(w+1)^2} \quad , \ w>0$$

και $f_W(w) = 0$ , για $w \leq 0$

## ΑΣΚΗΣΗ 9

Αφού η $f(x,y)$ είναι ομοιόμορφη στο μοναδιαίο δίσκο $D$, δηλαδή στο $D = \{(x,y) \setminus x^2+y^2 \leq 1\}$, θα πρέπει:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & \text{αν } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad , \text{ όπου } c = \text{σταθερά} > 0 \text{, τέτοια ώστε:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1 \Rightarrow \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y)\, dy\, dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} c\, dy\, dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} c\cdot 2\sqrt{1-x^2}\,dx = 1 \Rightarrow 4c\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 1 \underset{x=\sin t}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow 4c\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = 1 \Rightarrow 4c\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 1 \underset{\theta=2t}{\Longrightarrow} 4c\int_0^{\pi} \frac{1+\cos\theta}{4}\,d\theta = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot\left[\theta + \sin\theta\right]_0^{\pi} = 1 \Rightarrow c\cdot\pi = 1 \Rightarrow c = 1/\pi$$

Εναλλακτικά (και συντομότερα) μπορούσαμε κατευθείαν να γράψουμε:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{εμβαδόν } D}, & \text{αν } (x,y)\in D \\ 0, & \text{αν } (x,y)\notin D \end{cases} \quad \text{δηλ. } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & \text{αν } x^2+y^2\leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

α) $R = \sqrt{X^2+Y^2}$

Η συνάρτηση κατανομής της $R$ θα είναι:

$F_R(r) = P(R\leq r) = P(X^2+Y^2\leq r^2)$

Για $0<r<1$, το σύνολο $T_r = \{(x,y) \setminus x^2+y^2\leq r^2\}$ είναι ένας ομόκεντρος δίσκος με τον $D$. Αφού η $f(x,y)$ είναι ομοιόμορφη έχουμε: $P(X^2+Y^2\leq r^2) = \dfrac{\text{εμβαδόν } T_r}{\text{εμβαδόν } D} = \dfrac{\pi r^2}{\pi} = r^2$, για $0<r<1$

Άρα: $F_R(r) = \begin{cases} 0, & \text{αν } r\leq 0 \\ r^2, & \text{αν } 0<r<1 \\ 1, & \text{αν } r\geq 1 \end{cases}$

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας της $R$ είναι ίση με:

$f_R(r) = \dfrac{dF_R(r)}{dr} = \begin{cases} 2r, & \text{αν } 0<r<1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

β) Η μέση απόσταση του $(x,y)$ από την αρχή των αξόνων υπολογίζεται ως:

$$E[R] = \int_{-\infty}^{\infty} r f_R(r)\, dr = \int_0^1 r \cdot 2r\, dr = \left[2\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 10

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{και} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \quad , \quad -\infty < x,y < \infty$$

Αφού οι $X, Y$ είναι ανεξάρτητες, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας θα είναι ίση με: $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \dfrac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi}$, $\quad -\infty < x,y < \infty$

α) Αν $R = \sqrt{X^2+Y^2}$, η συνάρτηση κατανομής της $R$ θα είναι:

$$F_R(\alpha) = P(R \leq \alpha) = P(X^2+Y^2 \leq \alpha^2) = \iint_{x^2+y^2 \leq \alpha^2} f(x,y)\, dy\, dx \quad , \quad \alpha > 0$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, δηλαδή θέτοντας $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, έχουμε: $x^2+y^2 = r^2$ και $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Επίσης, το χωρίο $\{(x,y) \setminus x^2+y^2 \leq \alpha^2\}$ είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\alpha$, οπότε:

$$F_R(\alpha) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \frac{e^{-r^2/2}}{2\pi}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \frac{1}{2\pi}\left(-e^{-r^2/2}\right)' dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\alpha} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-e^{-\alpha^2/2}}{2\pi}\, d\theta = 1 - e^{-\alpha^2/2}$$

Άρα: $F_R(\alpha) = \begin{cases} 0 & , \alpha \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha^2/2} & , \alpha > 0 \end{cases}$

και η συνάρτηση πυκνότητας της R θα είναι ίση με:

$$f_R(\alpha) = \frac{dF_R(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} 0 & , \alpha \leq 0 \\ \alpha e^{-\alpha^2/2} & , \alpha > 0 \end{cases}$$

Β) Η μέση απόσταση του (x, y) από την αρχή των αξόνων είναι ίση με:

$$E(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f_R(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2/2}\, d\alpha = \int_0^{\infty} \alpha \left(-e^{-\alpha^2/2}\right)' d\alpha =$$

$$= \cancel{\left[-\alpha e^{-\alpha^2/2}\right]_0^{\infty}}^{\,0} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2/2}\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2/2}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

## $\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 11}}$

X = χρόνος που χρειάζεται ο 1ος φοιτητής
Y = » » » ο 2ος »

Οι X, Y ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Άρα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & , y > 0 \\ 0 & , y \leq 0 \end{cases}$$

Αφού X, Y είναι ανεξάρτητες, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας τους είναι ίση με: $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & , x>0, y>0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

Ζητάμε την πιθανότητα $P(X \geq 2Y) = P\left(Y \leq \frac{X}{2}\right) = \iint_{y \leq x/2} f(x,y)\,dy\,dx =$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{x/2} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\,dy\,dx = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y}\right]_0^{x/2} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x/2}\right) dx = \int_0^{\infty}\left(\lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-3x\lambda/2}\right) dx =$$

$$= \left[-e^{-\lambda x} + \frac{2}{3}e^{-3\lambda x/2}\right]_{x=0}^{\infty} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 12

Έστω: $X$ = χρόνος άφιξης του ενός (σε ώρες)
$Y$ = » » » άλλου (σε ώρες)

Οι $X, Y$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $(2,3)$, δηλ.

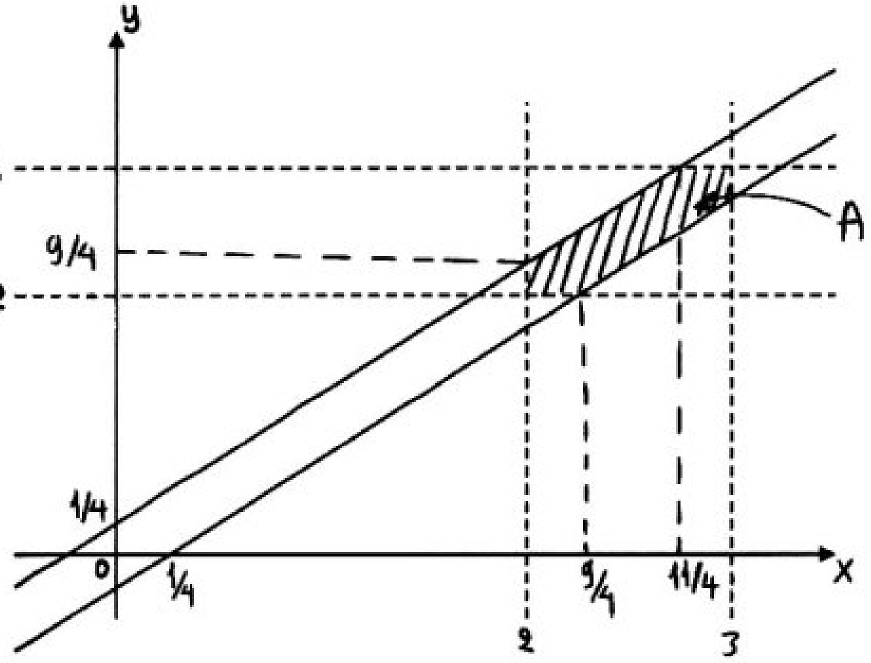
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 2<x<3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \text{και} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 2<y<3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επιπλέον, οι $X, Y$ είναι ανεξάρτητες, οπότε η από κοινού πυκνότητα τους είναι ίση με: $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 2<x,y<3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Ζητάμε την $P\left(|X-Y| \leq \frac{1}{4}\right) = P\left(-\frac{1}{4} \leq X-Y \leq \frac{1}{4}\right) = P\left(X-\frac{1}{4} \leq Y \leq X+\frac{1}{4}\right) =$

$= \iint_A f(x,y)\,dy\,dx = \iint_A dy\,dx$ , όπου το χωρίο ολοκληρώσεως

$A = \{(x,y) \setminus 2 < x,y < 3$ και $x - \frac{1}{4} \leq y \leq x + \frac{1}{4}\}$ φαίνεται διαγραμμισμένο στο ακόλουθο σχήμα:




Άρα: $P(|X-Y| \leq \frac{1}{4}) = \iint_A dy\,dx = \int_2^{9/4}\int_2^{x+1/4} dy\,dx + \int_{9/4}^{11/4}\int_{x-\frac{1}{4}}^{x+\frac{1}{4}} dy\,dx +$

$$+ \int_{11/4}^{3}\int_{x-\frac{1}{4}}^{3} dy\,dx = \int_2^{9/4}\left(x+\frac{1}{4}-2\right)dx + \int_{9/4}^{11/4}\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]dx +$$

$$+ \int_{11/4}^{3}\left(3-x+\frac{1}{4}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{7}{4}x\right]_2^{9/4} + \left[\frac{1}{2}x\right]_{9/4}^{11/4} + \left[\frac{13}{4}x-\frac{x^2}{2}\right]_{11/4}^{3} =$$

$$= \frac{81}{32} - \frac{63}{16} - 2 + \frac{7}{2} + \frac{1}{4} + \frac{39}{4} - \frac{9}{2} - \frac{143}{16} + \frac{121}{32} = \frac{7}{16}$$

Εναλλακτικά (και πιο απλά), επειδή η $f(x,y)$ είναι ομοιόμορφη στο τετράγωνο $S = \{(x,y) \setminus 2 < x,y < 3\}$ έχουμε ότι:

$$P(|X-Y| \leq \tfrac{1}{4}) = P(A) = \frac{\text{Εμβαδόν}(A)}{\text{Εμβαδόν}(S)} = 1 - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}_{\text{Εμβαδόν 2 τριγώνων που αποτελούν την περιοχή } S-A} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$